

文章编号: 1001-0920(2009)02-0244-05

一种新的中立型延时系统不稳定特征根的数值方法

郝智红¹, 胡广大¹, 李华德¹, 梁建坤²

(1. 北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083; 2. 沈阳药科大学 计算中心, 沈阳 110016)

摘要: 针对中立型延时系统超越特征方程的特点, 提出了计算其不稳定特征根的数值方法. 首先分析了系统具有有限个不稳定特征根的条件及其在复平面上的范围, 并结合特征根的对称性, 缩小计算范围; 然后对缩小后的区域进行网格划分, 根据函数局部极小值原理并结合几何搜索的方式得到不稳定特征根的近似值, 作为非线性无约束优化方法 *f*solve 的初值, 进而得到不稳定特征根的数值解; 最后通过计算实例验证了所提方法的有效性.

关键词: 中立型延时系统; 函数局部极值; 几何搜索; 非线性无约束优化

中图分类号: TP273

文献标识码: A

New numerical method for unstable characteristic roots of neutral delay systems

HAO Zhi-hong¹, HU Guang-da¹, LI Hua-de¹, LIANG Jian-kun²

(1. School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. Computer Center, Shenyang Pharmaceutical University, Shenyang 110016, China. Correspondent: HAO Zhi-hong, E-mail: ustbhzh@yahoo.com.cn)

Abstract: Based on the properties of characteristic equation for neutral delay systems, a numerical method for unstable characteristic roots of systems is proposed. Firstly, the condition of characteristic equation with finite unstable characteristic roots are analyzed, so does the region of them in the complex plane. Owing to the symmetry of unstable characteristic roots, the region is narrowed. Based on the principle of local minimum value, the shrink bounded closed region is divided into different grid. Then approximation value of unstable characteristic roots is obtained by using geometric search manner. The calculation result is treated as the initial value of unconstrained nonlinear optimization method (*f*solve), and the accurate numerical solutions of unstable characteristic roots are derived. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Neutral delay systems; Local extremum of function; Geometric search; Unconstrained nonlinear optimization

1 引言

在工程实际中, 自动控制、电力网络等总是存在滞后现象, 这些系统的数学模型多为中立型延时微分方程. 一直以来, 国内外主要集中于研究标准时滞系统的稳定性, 如文献[1]利用凸方向概念边界理论构造了时滞系统的特征多项式的测试集; 文献[2]利用频域法研究了使系统稳定的最大滞后量的界. 然而当前对于中立型延时系统的研究较少, 这是由于这类方程性态更加复杂, 系统中差分算子较难处理, 其超越特征方程具有无穷根, 给研究带来很大难度. 文献[3]研究了这类系统的稳定性, 并指出了使系统

具有有限个不稳定特征根的条件, 但没有指出这些特征根的求解方法.

在求解非线性方程的方法中, 能够直接求解中立型延时系统超越特征方程的不多^[4-8]. 牛顿迭代法虽然具有二阶收敛速度, 但每步迭代都要计算导数值, 并要求初值在收敛域之内, 否则会影响迭代速度和精度, 尤其是针对超越方程的多根性的情况, 对初值的依赖性更显突出; 魏尔 (Weyl) 方法对含有特征根的子区间继续进行划分, 最后搜索逼近至一个很小区域, 则近似认为是特征根. 这种方法虽实用, 但搜索过程复杂、计算缓慢.

收稿日期: 2007-11-26; 修回日期: 2008-03-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10571036); 北京市教育委员会重点学科共建项目(xk100080537).

作者简介: 郝智红(1980—), 女, 内蒙古赤峰人, 助教, 博士生, 从事延时控制理论的研究; 胡广大(1962—), 男, 黑龙江佳木斯人, 教授, 博士生导师, 从事延时控制理论等研究.

针对以上描述,本文给出一种新的中立型延时系统不稳定特征根的数值计算方法.

2 系统描述

考虑中立型延时系统

$$\begin{aligned}
 & [x(t) - \sum_{i=1}^m C_i x(t - \tau_i)] = \\
 & Ax(t) + \sum_{j=1}^n B_j x(t - \tau_j). \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中: $A, B_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 和 $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是具有相应维数的常数矩阵; $\tau_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $\tau_j > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ 是常数延时.

对于系统(1),其特征方程为

$$P(s) = \det[s(I - C(s)) - A - B(s)] = 0. \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned}
 B(s) &= \sum_{j=1}^n B_j \exp(-s \tau_j), \\
 C(s) &= \sum_{i=1}^m C_i \exp(-s \tau_i).
 \end{aligned}$$

可以看出,该特征方程是超越方程,具有无穷个根,因此给研究带来一定的难度.但是当条件

$$\sum_{i=1}^m C_i < 1 \quad (3)$$

成立时,系统具有有限个不稳定特征根,并且一定包含在一个有界闭区域内(复平面).

3 中立型延时系统的谱分解理论

引理 1^[9] 假设中立型延时系统的不稳定特征根 $\lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \}, \text{Re}(\lambda_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, s)$ 所对应的广义特征子空间为 C_+ , 那么存在子空间 C_+ 的补子空间 C_- , 使得整个特征空间被分解为

$$C_n = C_+ \oplus C_-, \quad (4)$$

其中 $C([- \infty, 0], R^n)$ 表示将区间 $[- \infty, 0]$ 映入 R^n 中的连续函数所组成的 Banach 空间, 简记为 C_n .

根据中立型延时系统的谱理论, 将其分解为稳定特征根和不稳定特征根, 进而通过传统方法来控制系统的稳定解, 这样使用一个有限维的方法实现了无限维的控制问题. 因此, 不稳定特征根的计算是谱分解理论在中立型延时系统中应用的研究基础.

4 确定不稳定特征根的数值方法

4.1 不稳定特征根范围的确定

当式(3)成立时, 系统的有限个不稳定特征根包含在有界闭区域 $D = [0, E] \times [-F, F]$ 内^[10], 其中

$$E = \mu[A] + \sum_{j=1}^n B_j + X, \quad (5)$$

$$F = \mu[-iA] + \sum_{j=1}^n B_j + X, \quad (6)$$

$$X = \frac{\sum_{i=1}^m C_i A + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n C_i B_j \right)}{1 - \sum_{i=1}^m C_i}, \quad (7)$$

$$\mu[A] = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \theta A\| - 1}{\theta}. \quad (8)$$

这里 $i^2 = -1, \mu[\cdot]$ 代表矩阵的测度, $\|\cdot\|$ 代表矩阵的范数.

考虑到系统特征根关于实轴的对称性, 将特征根的求取范围减少至复平面第一象限有界闭区域 $\bar{D} = [0, E] \times [0, F]$ 上的运算, 进而缩小计算范围, 提高运算速度. 不稳定特征根所在的有界闭区域如图 1 所示.

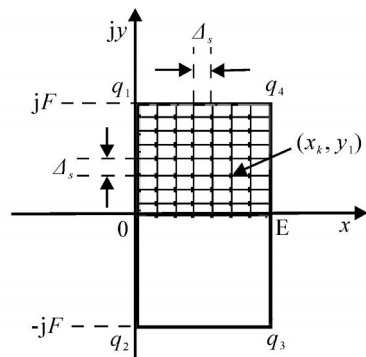


图 1 不稳定特征根所在的有界闭区域

4.2 函数局部极值原理结合几何搜索计算特征根

4.2.1 特征函数模值局部极值原理

算法从特征方程的角度出发, 当特征方程具有实根时, 计算相对容易, 但在很大程度上, 即便矩阵是实矩阵, 也有可能具有复特征根, 因此会给计算带来较大难度. 如从复平面的角度考虑, 特征多项式 $P(s)$ 看作是复变量 $s = x + iy$ 的函数, 该函数分解为实部和虚部, 如下:

$$P(s) = P(x + iy) = \text{Re}(x, y) + i \text{Im}(x, y). \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \text{Re}(x, y) = \text{Re}\{P(x + iy)\}, \\ \text{Im}(x, y) = -\text{Im}\{P(x + iy)\}. \end{cases}$$

进而可得到特征多项式的模值 M 为

$$M(x, y) = \sqrt{\text{Re}(x, y)^2 + \text{Im}(x, y)^2}, \quad (10)$$

当且仅当

$$M(x, y) = 0 \quad (11)$$

成立时, 式(2)成立. 因此本文以特征多项式的模值作为出发点, 研究特征根的数值计算方法.

首先用网格线法将有界闭区域 $\bar{D} = [0, E] \times [0, F]$ 划分, 其中步长 δ 的选取决定了特征根的准

精度,所以 s 应足够小以保证等高面的平滑.但步长太小会导致求根过程的大滞后产生, s 很大又会遗漏一些特征根的信息.为了解决两者之间的矛盾,并根据多次试验得出步长的计算公式如下:

$$s = (10^{-4} \sim 10^{-2}) \min(E, F),$$

并计算各个网格点上的特征函数值的模值

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M(x_1, y_1) & M(x_2, y_1) & \dots & M(x_n, y_1) \\ M(x_1, y_2) & M(x_2, y_2) & \dots & M(x_n, y_2) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ M(x_1, y_m) & M(x_2, y_m) & \dots & M(x_n, y_m) \end{bmatrix}$$

其中:网格步长为 s (如图1所示),划分后的各个点坐标分别为 $(x_k, y_l), k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, m; n = \text{int}(\lceil E/s \rceil + 1), m = \text{int}(\lceil F/s \rceil + 1);$

$$\begin{cases} x_k = k s, \\ y_l = l s. \end{cases}$$

则可得出函数 $M(x, y)$ 所确定的曲面,如图2所示.

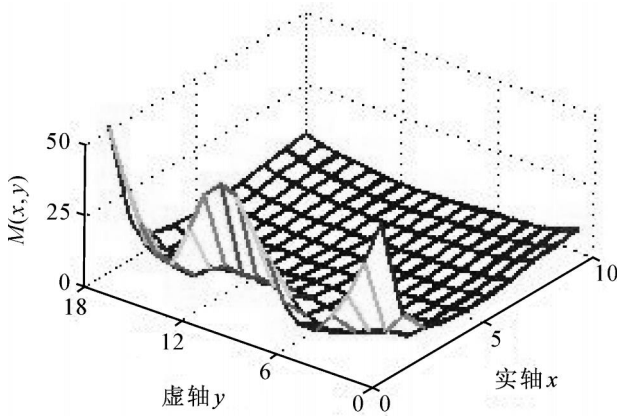


图2 模值曲面

因为首先是在划分网格上的运算,即用所有网格点的集合来近似模拟整个有界闭区域的信息,但是步长的选取会导致网格点的稀疏程度不同,从而影响近似程度.在网格点上的运算不能严格保证式(11)的成立,因此将式(11)的求解转化成求模函数极小值的问题.但由于系统不稳定特征根的多根性,可得出此问题是函数局部极小值问题,即求解满足下述条件的点 (x, y) :

$$\exists \delta > 0, \epsilon > 0, \text{使得 } 0 < M(x, y) < \epsilon \text{ 成立.}$$

4.2.2 特征函数模值局部极值点的几何搜索

根据多变量函数求极值理论,同时为了避免求解复杂函数导数,这里采用了简单实用的变量轮换法进行求解.在迭代求解过程中,沿着不同的坐标方向轮流进行搜索,即先改变一个变量而保持其他变量为常数,得到一系列最优点,然后换成另一变量,再次得到一系列最优点,直到变量轮换结束.根据所限定的 ϵ 值和所得到的最优点系列确定初值范围,如图3所示.从几何角度考虑,特征函数模值的局部极小值即为网格点上满足以下条件的点:网格点

的特征函数模值是所在的行和列的局部极小值.

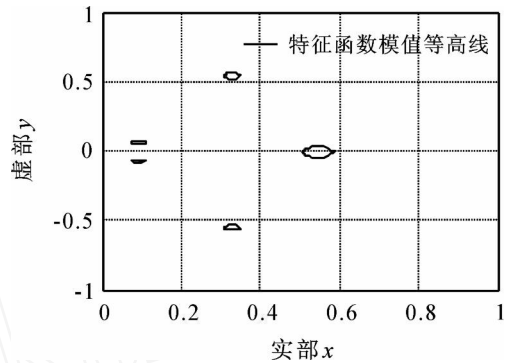


图3 模值曲面局部极小值分布

4.3 优化方法求解非线性特征方程的精确值

因为网格步长的选取影响近似不稳定特征根的计算精度,所以通过几何搜索得到的近似不稳定特征根必须要作进一步处理,以提高计算精度.

首先将问题转化为非线性无约束优化形式,即

$$\min f(x, y), \quad x \in [0, E], y \in [0, F]. \quad (12)$$

目标函数取 $f(x, y) = \sum_{i=1}^k M^2(x, y)$, 其中 k 为非线性方程的个数,在这里 $k = 1$.显然 $f(x, y) = 0$, 当 (x^*, y^*) 是非线性特征方程(2)的解时,目标函数 $f(x^*, y^*)$ 达到极小值.

4.4 不稳定特征根数值计算步骤

总结以上提出的不稳定特征根数值计算步骤如下:

- 1) 通过式(5)和(6)计算不稳定特征根所在的有界闭区域 $D = [0, E] \times [-F, F]$.进而根据系统特征根关于实轴的对称性,将计算范围减小至复平面第一象限有界闭区域 $\bar{D} = [0, E] \times [0, F]$ 上.
- 2) 步长 s 的选取,将有界闭区域 \bar{D} 用网格线进行划分.
- 3) 对每个网格点进行特征函数模值运算,即 $M(x, y)$.
- 4) 计算特征函数模值的局部极小值,进而确定不稳定特征根的近似值.
- 5) 为了更形象直观,得出特征函数模值的等高线,验证不稳定特征根在复平面的分布图.
- 6) 上一步得到的近似不稳定特征根作为非线性无约束优化方法的初值进行寻优,达到误差要求时寻优停止,进而得到修正后的不稳定特征根.

5 计算实例

考虑具有多延时的中立型系统

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^2 C_i x(t - \tau_i) = 0$$

$$Ax(t) + \sum_{j=1}^3 B_j x(t - \tau_j),$$

其中系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & -1.5 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.09 & 0 \\ -0.02 & 0 & 0 & 0.26 \\ -0.06 & 0.07 & 0 & 0.11 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.19 & 0.07 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.05 & 0.12 & 0.5 \\ 0 & 0.22 & 0 & 0.08 \\ 0.2 & 0.15 & 0 & 0.1 \\ 0.07 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.19 & 0 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.16 & 0.55 & 0 \\ 0.8 & 0.5 & 0.06 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.18 & 0.1 \\ 0 & 0.05 & 0.11 & -0.3 \\ 0.2 & -0.02 & 0.03 & -0.17 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.26 \\ 0 & 0.21 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.14 \end{bmatrix}.$$

延时 $\tau_1 = 1.6, \tau_2 = 1.2, \tau_3 = 1, \tau_4 = 2.8, \tau_5 =$

6.6, 通过式(8) 可得出

$$\rho(C_i) = 0.75611684108337 < 1,$$

$$\mu[A] = 0.92838689901100,$$

$$\mu[-iA] = 0.76073461460825.$$

将以上结果代入式(7), 得

$$X = 10.26228034329486,$$

进而根据式(5) 和(6) 得出

$$E = 14.59951270556664,$$

$$F = 14.43186042116389,$$

因此不稳定特征根所在的有界闭区域为

$$D = [0, 14.59951270556664] \times [-14.43186042116389, 14.43186042116389].$$

根据本文提出的函数局部极小值并结合几何搜索的方法, 得到复平面第一象限有界闭区域 $\bar{D} = [0, E] \times [0, F]$ 内不稳定特征根的近似值如下:

$$\begin{cases} \lambda_{10} = 0.59000000000000, \\ \lambda_{20} = 0.13000000000000 + 0.07000000000000i \\ \lambda_{40} = 0.36000000000000 + 0.55000000000000i. \end{cases}$$

以上近似值分别作为非线性无约束优化 fsolve 方法的初值, 经计算得到精确的不稳定特征根, 并结合特征根的对称性可得知该中立型延时系统是不稳定的, 因为该系统在有界闭区域 D 内具有一个实特征根和两对复共轭特征根, 即

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.54803981182201, \\ \lambda_{2,3} = 0.08669777715674 \pm 0.06900790821802i, \\ \lambda_{4,5} = 0.32433065816238 \pm 0.54711383831013i. \end{cases}$$

不稳定特征根的计算结果如图 4 所示.

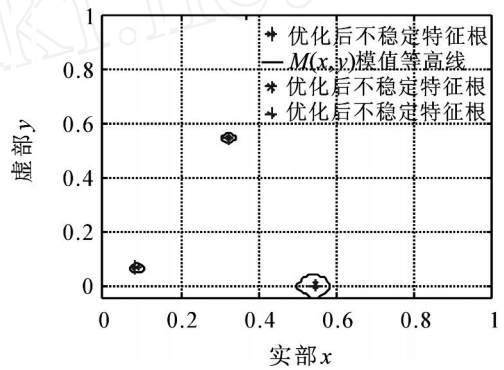


图 4 多延时中立型系统不稳定特征根分布图

当初始值为 $x_0 = 0.36 + 0.55i$ 时的寻优过程如表 1 所示.

表 1 非线性无约束优化过程

k	目标函数值 $P(s)$
1	- 0.01813936317951 - 0.02140718647113i
2	- 0.01813937209838 - 0.02140719401421i
3	- 0.00199864456425 + 0.00131300977517i
4	- 0.00199865206236 + 0.00131300088859i
5	1.220057292732431e ⁻⁵ - 1.072255315748470e ⁻⁵ i
6	1.219295749815822e ⁻⁵ - 1.073154512801831e ⁻⁵ i
7(最优值)	3.974155133126302e ⁻¹⁰ - 6.064717086175068e ⁻¹⁰ i
8	- 7.217144758213970e ⁻⁹ - 9.597848997512277e ⁻⁹ i

通过表 1 可以看出, 非线性无约束优化 fsolve 方法在 $k = 7$ 时寻到满足误差要求的最优解为

$$\lambda_4 = 0.32433065816238 + 0.54711383831013i,$$

此时目标函数值为

$$p(s) = e^{-10} (3.974155133126302 - 6.064717086175068i) \quad 0.$$

6 结 论

本文利用函数局部极值原理、几何搜索以及非线性无约束优化方法, 为中立型延时系统不稳定特征根的求取提供了一种有效的途径, 理论分析和计算实例表明了该数值计算方法的有效性和实用性.

参考文献(References)

[1] Vladimir B. Kolmanovskii, Jear-Pichard. Stability of some linear system with delay [J]. IEEE Trans on

- Automatic Control, 1999, 44(4): 984-989.
- [2] Su Juing-Huei, Fong F Kong, Tseng Chwan-Lu. Stability analysis of linear system with time delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(6): 1341-1343.
- [3] Hu GuangDa, Hu GuangDi, Zou Xingfu. Stability of linear neutral systems with multiple delays: Boundary criteria[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 148(3): 707-715.
- [4] Hale J K. Strong stabilization of neutral functional differential equations[J]. IMA J of Mathematical Control and Information, 2002, 19(1): 5-23.
- [5] Wim Michiels, Tomas Vyhlidal. An eigenvalue based approach for the stabilization of linear time-delay systems of neutral type[J]. Automatica, 2005, 41(6): 991-998.
- [6] Liu Y K. Numerical solution of implicit neutral functional differential equations[J]. SIAM J of Numerical Analysis, 1999, 36(2): 516-528.
- [7] Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with MATLAB[M]. New York: Cambridge University Press, 2005.
- [8] Quarteroni A, Sacco R, Saleri F. Numerical mathematics[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [9] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [10] Hu GuangDa, Liu Mingzhu. Stability criteria of linear neutral systems with multiple delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(4): 720-724.

(上接第 243 页)

参考文献(References)

- [1] 丁赤飏, 毛士艺. 基于雷达和成像传感器的融合跟踪[J]. 电子学报, 1998, 26(9): 134-138.
(Ding C B, Mao S Y. High precision tracking based on radar and imaging sensor fusion[J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 26(9): 134-138.)
- [2] 崔智社, 曾涛, 龙腾. 基于数据融合提高红外/毫米波复合导引头跟踪精度的新算法[J]. 兵工学报, 2003, 24(2): 199-203.
(Cui Z S, Zeng T, Long T. Novel algorithms to improve the precision of tracking for IR/MMW combined seeker based on data fusion[J]. Acta Armamentarii, 2003, 24(2): 199-203.)
- [3] 崔智社, 曾涛, 龙腾. 采用信息融合技术的 IR/MMW 复合导引头的目标跟踪[J]. 红外与毫米波学报, 2002, 21(6): 460-464.
(Cui Z S, Zeng T, Long T. Target tracking for IR/MMW combined seeker based on data fusion[J]. J of Infrared Millim Waves, 2002, 21(6): 460-464.)
- [4] 胡士强, 张天桥. 基于雷达和光电传感器的融合跟踪[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(8): 31-33.
(Hu S Q, Zhang T Q. Integrated tracking based on radar and photoelectric sensor[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(8): 31-33.)
- [5] 王青, 毕靖. 基于雷达/红外神经网络融合目标跟踪算法[J]. 系统仿真学报, 2003, 15(4): 486-491.
(Wang Q, Bi J. A maneuvering target tracking algorithm based on radar/infrared sensor neural network fusion[J]. J of System Simulation, 2003, 15(4): 486-491.)
- [6] 谢希权, 谢邦荣, 李伟仁. 机载雷达与红外搜索跟踪装置的航迹融合研究[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(4): 20-25.
(Xie X Q, Xie B R, Li W R. Study on track fusion for airborne radar and infrared searching and track system[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(4): 20-25.)
- [7] 方洋旺, 潘进. 随机系统分析及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.
(Fang Y W, Pan J. Analysis and application of stochastic system[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2006.)
- [8] 方洋旺. 随机系统最优控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(Fang Y W. Optimal control for stochastic systems[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.)
- [9] Mazor E, Averbuch A, Bar-Shalom Y, et al. Interacting multiple model methods in target tracking: A survey[J]. IEEE Trans on AES, 1998, 34(1): 103-123.
- [10] Blom H A P, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 33(8): 780-783.