

文章编号: 1001-0920(2009)02-0293-04

Delta 算子不确定系统扩展参数依赖 H 控制

姚 郁¹, 张 瑞^{1,2}

(1. 哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150001; 2. 深圳先进技术研究院, 广东 深圳 518054)

摘 要: 研究了含有多面体参数摄动 Delta 算子系统的参数依赖 H 控制问题. 基于 Delta 算子系统有界实引理, 提出了扩展参数依赖 H 性能准则. 利用该准则, 以参数化的线性矩阵不等式形式给出了参数依赖 H 控制器存在的充分条件, 并通过求解优化问题设计控制器. 研究表明该方法保守性较低, 且物理概念清晰. 数值示例验证了所提方法的有效性.

关键词: H 控制; 线性矩阵不等式; 有界实引理

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Extended parameter-dependent H control for polytopic Delta operator systems

YAO Yu¹, ZHANG Rui^{1,2}

(1. Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. Shenzhen Institute of Advanced Technology, Shenzhen 518054, China. Correspondent: ZHANG Rui, E-mail: zhangruie@mail@yaho.com.cn)

Abstract: The problem of parameter-dependent H control for polytopic Delta operator systems is investigated. Based on bounded real lemma, extended H performance criterion by means of parameter-dependent Lyapunov function is presented. A sufficient condition for H controller is derived in terms of parameterized linear matrix inequalities. The designed controller can be obtained from the solution of an optimization problem. The proposed controller design procedure is less conservative, and has clear physical meanings. A numerical example shows the effectiveness of the proposed approach.

Key words: H control; Linear matrix inequality; Bounded real lemma

1 引 言

最优控制理论一直是控制科学研究中非常活跃的课题, 在航空、航天等重要领域获得了广泛的应用, 它的一个显著特点是对于数学模型存在严格要求. 然而在实际应用中, 由于对象存在不确定性, 基于该方法设计的控制系统往往不能获得令人满意的效果. 为此, 国内外学者针对这个问题进行了大量研究, 使得鲁棒 H 控制理论有了深入的发展^[1-3]. 鲁棒 H 控制是一种综合考虑了系统模型不确定性和外部扰动的控制器设计方法, 其设计控制器的主要依据是使得闭环系统从扰动输入到输出信号传递函数的 H 范数小于给定值.

Delta 算子或变换作为一种新离散化方法^[4], 在控制领域取得了许多研究成果^[5]. 基于 Delta 算子的结果, 理论上可将连续和离散系统的许多结果纳入

到一个统一框架中, 工程实现时也具有好的数值特性. Delta 算子系统鲁棒 H 控制理论所取得的成果, 仅是保证控制器存在的充分性, 即解法不成功并不能说明该系统不存在满足要求的控制器. 因此寻找保守性更弱的充分解法仍是控制理论界研究的热门课题. 许多学者进行了参数依赖 Lyapunov 函数的研究, 试图寻找和系统不确定性相关联的 Lyapunov 函数, 以减小设计的保守性^[6-10].

本文针对含有多面体不确定性的 Delta 算子描述的系统, 讨论了参数依赖 H 控制问题. 设计方法是基于 Delta 算子有界实引理推导扩展 H 性能准则, 在此基础上, 利用参数依赖型 Lyapunov 函数思想, 以参数化线性矩阵不等式形式给出此类不确定系统的参数依赖 H 控制器存在的充分条件, 通过求解优化问题设计控制器. 最后通过数值示例验证

收稿日期: 2007-12-24; 修回日期: 2008-03-31.

作者简介: 姚郁(1963—), 男, 黑龙江北安人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统及计算机控制等研究; 张瑞(1977—), 男, 山东胶南人, 博士生, 从事线性系统鲁棒控制和滤波的研究.

了该控制器设计方案的有效性.

2 问题描述

考虑如下的 Delta 算子描述的线性系统:

$$\begin{cases} x(k) = A(\cdot)x(k) + B_1(\cdot)u(k) + B_2(\cdot)w(k), \\ z(k) = C(\cdot)x(k) + D(\cdot)u(k). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ 为外部扰动, $z(k) \in \mathbb{R}^r$ 为被调输出.

$A(\cdot), B_1(\cdot), B_2(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)$ 均为不确定性矩阵, 属于多面体集合

$$M(\cdot) = (A(\cdot), B_1(\cdot), B_2(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)) \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

$$\mathbf{R} = \{M(\cdot) \mid M(\cdot) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i; \alpha_i \geq 0; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1\}.$$

式中 $M_i \triangleq (A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_i)$ 称为此多面体系统的顶点矩阵.

考虑如下状态反馈控制器:

$$u(k) = K(\cdot)x(k), \quad (3)$$

式中 $K(\cdot)$ 为待求反馈增益矩阵. 由系统(1)和控制器(3)构成如下闭环系统:

$$\begin{cases} x(k) = \overline{A}(\cdot)x(k) + B_2(\cdot)w(k), \\ z(k) = \overline{C}(\cdot)x(k). \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} \overline{A}(\cdot) &= A(\cdot) + B_1(\cdot)K(\cdot), \\ \overline{C}(\cdot) &= C(\cdot) + D(\cdot)K(\cdot). \end{aligned} \quad (5)$$

将系统(4)中扰动信号 $w(k)$ 到输出信号 $z(k)$ 的传递函数表示为

$$T(\cdot, \cdot) = \overline{C}(\cdot)[I - \overline{A}(\cdot)]^{-1}B_2(\cdot). \quad (6)$$

为叙述方便, 给出如下定义:

定义 1 式(6)中传递函数 $T(\cdot, \cdot)$ 的 H 范数定义为

$$\|T(\cdot, \cdot)\|_{L_2} = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}}. \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} \|z\|_{L_2} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k)h \right]^{1/2}, \\ \|w\|_{L_2} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)h \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

h 为采样周期.

有了上述准备工作, 本文所要研究的问题可归纳为: 对于系统(1), 设计形如式(3)的控制器, 使得闭环系统(4)稳定, 并使扰动信号 $w(k)$ 到输出信号 $z(k)$ 的传递函数满足 $\|T(\cdot, \cdot)\|_{L_2} < \gamma, \gamma > 0$.

3 主要结果

3.1 扩展 H 性能

在给出本文主要结果前引入如下引理:

引理 1^[11] 多面体系统(4)稳定且 $\|T(\cdot, \cdot)\|_{L_2} < \gamma$ 的充要条件为存在矩阵函数 $P(\cdot) > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} \overline{A}^T(\cdot)P(\cdot) + P(\cdot)\overline{A}(\cdot) & * & * & * \\ B_2^T(\cdot)P(\cdot) & -I & * & * \\ \overline{C}(\cdot) & 0 & -I & * \\ \sqrt{h}P(\cdot)\overline{A}(\cdot) & \sqrt{h}P(\cdot)B_2(\cdot) & 0 & -P(\cdot) \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

式中 * 号为对应块的转置.

定理 1 多面体系统(4)稳定且 $\|T(\cdot, \cdot)\|_{L_2} < \gamma$ 的充分条件为存在矩阵 $P_i > 0, F_i, G_i$ 和 α_{ij} 满足

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \alpha_{ij} - \alpha_{ji}^T \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & * & * & * \\ 21 & 22 & * & * \\ \dots & \dots & \ddots & * \\ N1 & N2 & \dots & NN \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

式中

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{A}_i^T F_j + F_j^T \overline{A}_i & * \\ P_j - F_j + G_j^T \overline{A}_i & -G_j^T - G_j \\ B_{2i}^T F_j & B_{2i}^T G_j \\ \overline{C}_i & 0 \\ \sqrt{h}F_j^T \overline{A}_i & 0 \\ * & * \\ * & * \\ -I & * \\ 0 & -I \\ \sqrt{h}F_j^T B_{2i} & 0 \quad P_j - F_j^T - F_j \end{bmatrix}.$$

证明 首先, 选取 $\alpha = [1I, 2I, \dots, NI]^T$, 考

虑到 $\alpha_{ii} \geq 0$ 和 $\alpha_{ii} = 1$ 得 $\alpha_{ii} \geq 0$. 若式(10)成立, 则有 $\alpha^T < 0$, 进一步可写为

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ii}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_{ij}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}^T) < 0. \quad (11)$$

另一方面, 由式(9)有

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \alpha_{ij} - \alpha_{ji}^T \geq 0, \quad (12)$$

则由式(11)和(12)得

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ii}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_{ij}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) < 0. \quad (13)$$

式(13)可写为

$$\begin{bmatrix} \overline{A}^T(\cdot)F(\cdot) + F^T(\cdot)\overline{A}(\cdot) & * \\ P(\cdot) - F(\cdot) + G^T(\cdot)\overline{A}(\cdot) & -G^T(\cdot) - G(\cdot) \\ B_2^T(\cdot)F(\cdot) & B_2^T(\cdot)G(\cdot) \\ \overline{C}(\cdot) & 0 \\ \sqrt{h}F^T(\cdot)\overline{A}(\cdot) & 0 \\ * & * \\ * & * \\ -I & * \\ 0 & -I \\ \sqrt{h}F^T(\cdot)B_2(\cdot) & 0 \quad P(\cdot) - F^T(\cdot) - F(\cdot) \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

其次,若式(14)成立,则有 $P(\cdot) - F^T(\cdot) - F(\cdot) < 0$, 考虑到 $P(\cdot) > 0$, 可知 $F(\cdot)$ 可逆. 进而由 $[F(\cdot) - P(\cdot)]^T P^{-1}(\cdot) [F(\cdot) - P(\cdot)] = 0$, 可得

$$- F^T(\cdot) P^{-1}(\cdot) F(\cdot) = P(\cdot) - F^T(\cdot) - F(\cdot).$$

则由式(14)可推出

$$\begin{bmatrix} \overline{A}^T(\cdot) F(\cdot) + F^T(\cdot) \overline{A}(\cdot) & * & * & * \\ P(\cdot) - F(\cdot) + G^T(\cdot) \overline{A}(\cdot) & - G^T(\cdot) - G(\cdot) & * & * \\ B_2^T(\cdot) F(\cdot) & B_2^T(\cdot) G(\cdot) & * & * \\ \overline{C}(\cdot) & 0 & * & * \\ \sqrt{h} F^T(\cdot) \overline{A}(\cdot) & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ - I & * & * & * \\ 0 & - I & * & * \\ \sqrt{h} F^T(\cdot) B_2(\cdot) & 0 & - F^T(\cdot) P^{-1}(\cdot) F(\cdot) & * \end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

最后,使用

$$J_1(\cdot) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \overline{A}(\cdot) & B_2(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1}(\cdot) P(\cdot) \end{bmatrix}$$

对式(15)进行变换,可得式(8),说明由式(9)和(10)可推出式(8). 定理得证.

值得注意的是,从定理1的证明过程可以看出,整个多面体中的 Lyapunov 矩阵函数 $P(\cdot)$ ($P(\cdot) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$) 随 α_i 的不同而变化,而二次稳定方法为所有顶点共用一个固定 Lyapunov 矩阵. 另一方面,当采样周期减小时,定理1描述的离散系统 H 性能准则,趋近于连续系统 H 性能准则,具有明显的物理意义.

3.2 参数依赖 H 控制

定理1中同时存在 \overline{A}_i 和 F_j 与 \overline{A}_i 和 G_j 的乘积项,不能直接用于控制器设计. 为此令 $G_j = F_j$, 为实标量. 这样定理1的条件可写为

$$\alpha_j + \beta_j + \gamma_j + \frac{\tau}{ij} = 0, 1 \quad i < j \leq N, \tag{16}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & * & * & * \\ 21 & 22 & * & * \\ \dots & \dots & \ddots & * \\ N1 & N2 & \dots & NN \end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

式中

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{A}_i^T F_j + F_j^T \overline{A}_i & * \\ P_j - F_j + F_j^T \overline{A}_i & - F_j^T - F_j \\ B_{2i}^T F_j & B_{2i}^T F_j \\ \overline{C}_i & 0 \\ \sqrt{h} F_j^T \overline{A}_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ - I & * & * \\ 0 & - I & * \\ \sqrt{h} F_j^T B_{2i} & 0 & P_j - F_j^T - F_j \end{bmatrix}$$

以下给出参数依赖 H 控制器设计方法.

定理2 对于多面体系统(1),存在如式(3)的参数依赖 H 控制器的充分条件为存在矩阵 $P_i > 0, R_i, \overline{K}_i, \gamma_{ij}$ 和实标量 α_{ij} 满足

$$\alpha_{ij} + \beta_j - \gamma_{ij} - \frac{\tau}{ij} = 0, 1 \quad i < j \leq N, \tag{18}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & * & * & * \\ 21 & 22 & * & * \\ \dots & \dots & \ddots & * \\ N1 & N2 & \dots & NN \end{bmatrix} < 0. \tag{19}$$

式中

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} A_i R_j + R_j^T A_i^T + * & * \\ B_{1i} \overline{K}_j + \overline{K}_j^T B_{1i}^T & * \\ P_j - R_j^T + * & - R_j^T - R_j \\ A_i R_j + B_{1i} \overline{K}_j & * \\ B_{2i} & B_{2i}^T \\ C_i R_j + D_i \overline{K}_j & 0 \\ \sqrt{h} A_i R_j + \sqrt{h} B_{1i} \overline{K}_j & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ - I & * & * \\ 0 & - I & * \\ \sqrt{h} B_{2i} & 0 & P_j - R_j^T - R_j \end{bmatrix},$$

且所设计的控制器(3)的参数矩阵可由下式构造:

$$K(\cdot) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \overline{K}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i R_i \right)^{-1}. \tag{20}$$

证明 定义

$$\overline{K}(\cdot) = K(\cdot) R(\cdot), \tag{21}$$

采用与定理1类似的证明思路,可得定理成立.

定理2将系统(1)的参数依赖 H 控制器存在的充分条件,转化为一个矩阵不等式组的可行性问题,可通过求解如下的优化问题来设计系统(1)的参数依赖 H 控制器:

$$\min \quad \text{s. t. 式(18), (19),} \tag{22}$$

满足要求的控制器(3)的参数矩阵可由式(20)构造.

对于给定参数,不等式(18)和(19)是关于矩阵变量的线性矩阵不等式,可通过标准数值软件优化参数.

4 数值示例

考虑如下 Delta 算子不确定系统:

$$x(k) = \begin{bmatrix} -1.9980 & 0.9995 \\ 0 & 1.0005 + \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.9985 \\ 1.0005 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.9990 \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = [-5.500 \quad -0.400]x(k) + [1.000]u(k),$$

式中 为不确定参数且满足 $-1 \leq \leq 1$.

若给定参数 $= 0.0005$ 时,通过求解式(22)所示的优化问题设计该系统的参数依赖 H 控制器,可得 H 性能指标 1.1127,设计控制器所需矩阵为

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= [11.4163 \quad -6.1387], \\ \bar{K}_2 &= [15.6942 \quad -8.4700] \\ R_1 &= \begin{bmatrix} 3.5684 & -1.7435 \\ -1.7289 & -0.8457 \end{bmatrix}, \\ R_2 &= \begin{bmatrix} 5.2451 & -2.6459 \\ -2.6545 & 1.3392 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由式(20)求得参数依赖 H 控制器为

$$K(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i \bar{K}_i \right) \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i R_i \right)^{-1},$$

式中

$$\alpha_1 = (1 + \alpha)/2, \quad \alpha_2 = (1 - \alpha)/2.$$

进一步对所得 H 控制器进行验证.图1给出了由参数依赖 H 控制器构成的闭环系统在区间 $[-1, 1]$ 上的 H 性能指标.由图可见,所得控制器可保证闭环系统的 H 范数小于所设计的指标.

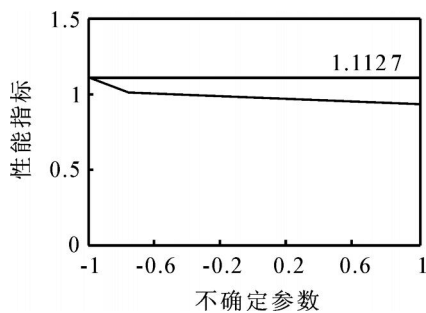


图1 闭环系统 H 性能指标

另一方面,若采用基于引理1的二次稳定方法进行控制器设计,可得 H 性能指标 1.1439,以及相应的控制器为

$$K = [-1477.4698 \quad -2990.3639].$$

由此可见,本文所提方法具有较低的保守性.

5 结论

本文在扩展参数依赖 Delta 算子系统 H 性能准则基础上,成功地给出了参数依赖 H 控制器存在的充分条件.利用参数依赖 Lyapunov 函数思想,

使得该条件具有较低的保守性.采用 Delta 算子描述,所得结果能够揭示连续系统与离散系统结果的内在联系,具有明显的物理意义.数值示例说明了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(8): 831-847.
- [2] Collins E G, Song T. A Delta operator approach to discrete-time H_∞ control[J]. Int J of Control, 1999, 72(4): 315-320.
- [3] Mark M K. Robust H_∞ suboptimal and guaranteed cost state feedbacks as solutions to linear-quadratic dynamic games under uncertainty control [J]. Int J of Control, 2000, 73(3): 219-224.
- [4] Goodwin G C, Middleton R H, Poor H V. High-speed digital signal processing and control [J]. Proc of IEEE, 1992, 80(2): 240-259.
- [5] 张端金,王忠勇,吴捷.系统控制和信号处理中的 Delta 算子方法[J].控制与决策,2003,18(4):385-391. (Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Survey on system control and signal processing using the Delta operator [J]. Control and Decision, 2003, 18(4): 385-391.)
- [6] DeOliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition [J]. System and Control Letters, 1999, 37(3): 261-265.
- [7] Xie L H, Lu L L, Zhang D, et al. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems [J]. Automatica, 2004, 40(5): 873-880.
- [8] Shaked U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(4): 652-656.
- [9] Gao H J, Lam J, Xie L H, et al. New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 53(8): 3183-3192.
- [10] Oliveira P J, Oliveira R C L F, Leite V J S, et al. H_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions [J]. Automatica, 2004, 40(5): 1053-1061.
- [11] Lennartson B, Middleton R H, Christiansson A-K, et al. Low order sampled data H_∞ control using the Delta operator and LMIs [C]. 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Bahamas, 2004: 4479-4484.