

文章编号: 1001-0920(2009)02-0301-04

基于反馈线性化的 MIMO 非最小相位系统指数镇定

张绍杰, 胡寿松

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘要: 针对仿射多输入多输出非线性非最小相位系统, 提出了一种新的镇定方案. 用反馈线性化解耦系统输入输出关系, 通过高增益状态反馈镇定系统外部动态, 用模型预测控制镇定内部动态, 所设计控制器能保证闭环系统的指数稳定性. 仿真结果表明了所提出方法的有效性和优越性.

关键词: MIMO 非线性非最小相位系统; 奇异摄动; 反馈线性化; 模型预测控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Exponential stabilization for MIMO non-minimum phase systems based on feedback linearization

ZHANG Shaorjie, HU Shousong

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.

Correspondent: ZHANG Shao-jie, E-mail: zhangsj@nuaa.edu.cn)

Abstract: A novel stabilization scheme is presented for affine multi-input multi-output (MIMO) nonlinear non-minimum phase systems. The inputs-outputs of the system are decoupled by feedback linearization, and system external dynamics are stabilized by high-gain state feedback. Then model predictive control is used to stabilize internal dynamics. The proposed controller can guarantee that the closed-loop system is exponential stable. Simulation results demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed method.

Key words: MIMO nonlinear non-minimum phase systems; Singular perturbation; Feedback linearization; Model predictive control

1 引言

非线性非最小相位系统因其零动态不稳定, 成为控制理论和应用研究具有挑战性的问题, 而反馈线性化作为研究非线性控制系统最常用和有效的方法之一, 在非最小相位系统的研究中得到了广泛的应用^[1-4]. 文献[2]通过近似反馈线性化解决了一类非最小相位系统的全局渐近稳定问题, 但只适用于弱非最小相位系统. 文献[3]通过反馈线性化和稳定系统内部动态, 实现了一类单输入单输出(SISO)系统的镇定, 但由于非线性系统的输入、输出耦合, 大部分基于 SISO 系统的控制方法不能或不能直接应用于多输入多输出(MIMO)系统. 文献[4]利用输出重定义解决了一类非最小相位系统的渐近稳定问题, 但同现有的大多数非最小相位系统控制器的设计一样, 是基于系统精确的数学模型的, 如果系统存

在扰动或数学模型不准确, 控制效果会变差, 甚至导致系统不稳定.

针对上述研究成果的不足, 本文结合反馈线性化和模型预测控制, 研究了一类仿射 MIMO 非线性非最小相位系统的指数镇定问题. 本文提出的方法适用于最小相位和非最小相位系统, 而且因为指数稳定性^[5]使系统参数即使在一定范围内变化时, 仍能保持稳定, 提高了系统的鲁棒性.

2 问题描述

考虑如下仿射 MIMO 非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i, \\ y_i = h_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 为系统状态向量, $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ 为系统输入, $y = [y_1, \dots, y_m]^T$ 为系统输出; $f(x)$

收稿日期: 2007-12-13; 修回日期: 2008-04-27.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60234010); 航空科学基金项目(05E52031).

作者简介: 张绍杰(1978—), 男, 河南宝丰人, 博士生, 从事非线性系统控制、容错控制的研究; 胡寿松(1937—), 男, 南京人, 教授, 博士生导师, 从事故障诊断、自修复控制等研究.

$R^n, g_i(x) \in R^n, h_i(x) \in R^r (i = 1, 2, \dots, m)$ 为关于系统状态 x 的充分光滑的非线性函数. 记 $g = [g_1, \dots, g_m]^T, h = [h_1, \dots, h_m]^T$, 不失一般性, 设 $x = 0, u = 0$ 是系统(1)的平衡点, 且 $h(0) = 0$. 假设系统相对阶^[6] $r = r_1 + \dots + r_m < n$, 且矩阵

$$L(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \dots & \ddots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

在原点的某一邻域非奇异.

选取微分同胚映射 $T(x) = [z^T, y^T]^T$, 其中 $z = [z_1^T, \dots, z_m^T]^T \in R^r, y = [y_1, \dots, y_r]^T = [h_1(x), \dots, L_f^{r_1-1} h_1(x)]^T, i = 1, 2, \dots, m, n = [n_1, \dots, n_r]^T$, 则系统(1)可变换为

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \lambda_i z_i, \\ \dots \\ \dot{z}_i = L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x) u_j, \\ \dot{y} = (n, \cdot), \\ y_i = z_i, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2)$$

假设系统(2)零动态 $\dot{z} = (\lambda, 0)$ 不稳定, 则原系统(1)为非最小相位系统.

3 控制器设计

取控制律

$$u = T^{-1}(x) \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{r_1} h_1(x) \\ \dots \\ v_m - L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

则系统(2)可记为

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B v, \\ \dot{y} = (n, \cdot), \\ y = C z. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $v = [v_1, \dots, v_m]^T, A = \text{diag}[A_1, \dots, A_m], B = \text{diag}[B_1, \dots, B_m], C = \text{diag}[C_1, \dots, C_m], A_i, B_i, C_i$ 为 r_i 阶积分器链的标准形式^[5], $i = 1, 2, \dots, m$. 引入高增益反馈

$$v_i = \frac{K_{ii}}{r_i} (y_{n_i} - y_i) - \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{K_{ii+j}}{r_i-j} y_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

其中 $y_r = [y_{r_1}, \dots, y_{r_m}]^T \in R^m$ 是系统输出 y 的参考信号, 由模型预测控制器(下文详述)产生. 由于 y_r 由离散信号经过零阶保持器获得, 所以控制律(5)中不包含 y_r 的导数; ϵ 是一个小的正参数, 并选择反馈矩阵 $K = \text{diag}[K_1, \dots, K_m], K_i = [K_{i1}, \dots, K_{ir_i}]$, $i = 1, 2, \dots, m. A - BK$ 为 Hurwitz 矩阵.

定义 $z = [z_1^T, \dots, z_m^T]^T, z_i = [z_{i1}, \dots, z_{ir_i}]^T, z_{ij}$

$= \epsilon^{j-1} y_i^{(j-1)}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r_i$. 则系统(4)的状态方程可表示为如下奇异摄动形式:

$$\dot{z} = A_c z + B K Y_r, \quad (6)$$

$$\dot{y} = (n, \cdot). \quad (7)$$

其中: $A_c = A - BK, Y_r = [Y_{r_1}^T, \dots, Y_{r_m}^T]^T, Y_{r_i} = [y_{r_i}, 0, \dots, 0]^T \in R^{r_i}$. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 状态 z 的变化速度会趋于无穷, 这导致了时间尺度的分离, z 和 y 分别代表了系统的快变和慢变状态. 此时, 解方程 $A_c z + B K Y_r = 0$ 可得到 z 的准稳态解^[5] $\bar{z} = [\bar{z}_1^T, \dots, \bar{z}_m^T]^T, \bar{z}_i = Y_{r_i}, i = 1, 2, \dots, m$. 于是, 系统的降阶模型可表示为

$$\dot{y} = (n, \cdot), y_r = 0. \quad (8)$$

取 $\tilde{z} = z - \bar{z}$ 将准稳态移至原点, 并记 $t' = t/\epsilon$, 则快变状态(6)可表示为

$$d\tilde{z}/dt' = A_c \tilde{z} + B K Y_r - \dot{\bar{z}}. \quad (9)$$

注意到 $\dot{\bar{z}} = 0, B K Y_r = -A_c \bar{z}$, 则边界层模型为

$$d\tilde{z}/dt' = A_c \tilde{z}. \quad (10)$$

系统(1)的降阶子系统(8)由模型预测控制器产生的控制信号 y_r 镇定, 同时 y_r 作为边界层子系统(10)的参考输出. 对于降阶子系统(8), 设其模型预测控制^[7]的预测时域为 $T, (\cdot) \in N, y_r(\cdot) \in Y, (t+T) \in N_f$, 其中紧集 $N_f \subset N$ 且包含原点. 在 t 时刻模型预测控制器产生的最优参考信号 y_r^* 由如下性能指标确定:

$$\begin{aligned} \min_{y_r(t, t+T)} J(t, \cdot, y_r) = & \frac{1}{2} (t+T)^T P (t+T) + \\ & \frac{1}{2} \int_t^{t+T} ((\cdot)^T Q (\cdot) + y_r(\cdot)^T R y_r(\cdot)) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 P, Q, R 为正定对称矩阵. 模型预测控制器(11)在预测时域 T 内产生最优控制序列 $y_r^*([t, t+T])$, 其中只有 $y_r^*([t, t+T])$ 的控制信号作用于控制系统中, 本文中 T 取为采样周期.

下面证明闭环控制系统的稳定性.

定理 1 对于系统(1)的边界层子系统(10), 如果选择反馈矩阵 K 使 A_c 为 Hurwitz 矩阵, 则系统(10)的原点指数稳定.

证明略.

定理 2 假设降阶子系统(8)满足如下条件:

- 1) 原点 $y = 0, y_r = 0$ 是降阶子系统的平衡点.
- 2) 函数 $\bar{y}(\cdot, y_r)$ 满足 $\bar{y}(\cdot, y_r) \in L^\infty, L$ 为一正数.
- 3) 在 $[t+T, \infty)$ 上, 记系统控制信号为 $y_r^k(\cdot), N_f$, 且对于任 $y_r^k(\cdot) \in N_f$ 为正不变集.

记 $F(\cdot) = \frac{1}{2} (\cdot)^T P, G(\cdot, y_r^k) = \frac{1}{2} (\cdot)^T Q + y_r^k{}^T R y_r^k$

满足

$$\dot{V}(t) + G(t, y_r^k) = P^{-1}(t, y_r) + \frac{1}{2} (Q + y_r^{kT} R y_r^k) = 0.$$

4) 选择合适的预测时域 T 以使 $V(t+T)$ N_f , 其中 $V(\cdot)$ 为模型预测控制器获得的状态.

则模型预测控制器(11)能指数镇定降阶子系统(8).

证明 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V(t, y_r) = \min_{y_r(t, t+T)} J(t, y_r).$$

因

$$y_r(t)^T R y_r(t) = 0, \frac{1}{2} (t+T)^T P (t+T) = 0,$$

故

$$V(t, y_r) = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (y_r(\tau))^T Q (\tau) d\tau.$$

由假设条件 2) 知 $V(t, y_r)$ 是 Lipschitz 的, 故 $V(t) - V(t-\theta) \leq L e^{-L\theta}$, 于是

$$V(t, y_r) = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (y_r(\tau))^2 Q e^{-2L(t-\tau)} d\tau = \frac{1 - e^{-2LT}}{4L} \int_t^{t+T} (y_r(\tau))^2 Q d\tau. \quad (12)$$

取 $y_r = 0$, 由 $V(t, y_r) = \min_{y_r(t, t+T)} J(t, y_r)$, 所以 $V(t, y_r) = J(t, 0)$; 又由假设条件 2) 知 $V(t, 0) \leq L e^{-L(t-\theta)}$, 于是 $V(t) - V(t-\theta) \leq L e^{-L\theta}$, 则 $V(t, y_r)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (t+T)^T P (t+T) + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (y_r(\tau))^T Q (\tau) d\tau \\ & \frac{1}{2} e^{2LT} P (t) + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} Q (y_r(\tau))^2 e^{2L(t-\tau)} d\tau = \\ & \frac{1}{2} (e^{2LT} P + \frac{e^{2LT} - 1}{2L} Q) (t) . \quad (13) \end{aligned}$$

在 $[t, t+T]$ 上, 设 $\tilde{y}_r(\cdot)$ 表示系统(8)的控制信号, 则在区间 $[t, t+T]$, $\tilde{y}_r(\cdot)$ 为 $y_r^*(\cdot)$; 在区间 $[t+T, t+\theta]$, $\tilde{y}_r(\cdot)$ 为 $y_r^k(\cdot)$. 在时间 t 后很短的时刻 $t + \theta$ 开始的性能指标函数可表示为

$$J(t + \theta, (t + \theta), \tilde{y}_r) = F(t + \theta, t + T) + \int_{t+\theta}^{t+T} G(t, \tilde{y}_r) d\tau.$$

由于

$$V(t + \theta, (t + \theta), \tilde{y}_r) = J(t + \theta, (t + \theta), \tilde{y}_r),$$

则有

$$\dot{V} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{V(t + \theta, (t + \theta), \tilde{y}_r) - V(t, (t), y_r^k)}{\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J(t + \theta, (t + \theta), \tilde{y}_r) - V(t, (t), y_r^k)}{\theta}.$$

又由

$$\begin{aligned} & J(t + \theta, (t + \theta), \tilde{y}_r) - V(t, (t), y_r^k) = \\ & F(t + \theta, t + T) + \int_{t+\theta}^{t+T} G(t, y_r^k) d\tau - \\ & F(t + T) - \int_t^{t+T} G(t, y_r^k) d\tau, \end{aligned}$$

且 $\dot{V}(t) + G(t, y_r^k) = 0$, 则对 $\dot{V}(t) + G(t, y_r^k)$ 在区间 $(t + T, t + \theta + T)$ 积分有

$$F(t + \theta, t + T) - F(t + T) + \int_{t+\theta}^{t+T} G(t, y_r^k) d\tau = 0, \quad (14)$$

故有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} - \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} G(t, y_r^k) d\tau = \\ & - G(t, y_r^k) - \frac{1}{2} Q. \end{aligned}$$

由式(12) ~ (14) 知, 系统(8)指数稳定^[5], 定理得证.

由文献[5]知:组成奇异摄动系统的边界层和降阶子系统指数稳定, 则奇异摄动系统指数稳定. 故有:

定理 3 对于由控制器(3), (5) 和(11) 确定的闭环控制系统(4), 若系统满足定理 2 的假设条件, 且 $(z, z) - (z, z) \geq \epsilon_1 z$, 其中 ϵ_1 为一正数, 则存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于所有 $0 < \epsilon < \epsilon^*$, 系统(4)的原点指数稳定.

证明略.

4 仿真算例

考虑一个两输入两输出系统, 其中

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} \sin x_1 - x_1 + x_3 \\ x_1 - \sin^2 x_2 \\ 2x_3 + x_1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ h(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_g h(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

系统相对阶为 $r = n_1 + n_2 = 2$. 内部动态为 $\dot{x}_3 = 2x_3 + x_1 + u_1$, 令 $x_1 = 0, u_1 = 0$, 则系统零动态为 $\dot{x}_3 = 2x_3$, 不稳定, 系统为非最小相位系统.

取 $K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\epsilon = 0.1$, 则根据

前文的分析, 系统外部动态稳定. 系统模型预测控制

器参数取为 $Q = 1, R = 20, P = 40.5$, 预测时域 $T = 0.5$ s, 采样周期 $= 0.1$ s. 系统初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.5, x_3(0) = 0.8$, 假设系统存在模型失配, \dot{x}_1 变为 $\dot{x}_1 = \sin x_1 - x_1 + 3x_2 + x_3 + u_1$. 采用上述控制器参数, 状态 x_3 响应曲线如图 1 所示.

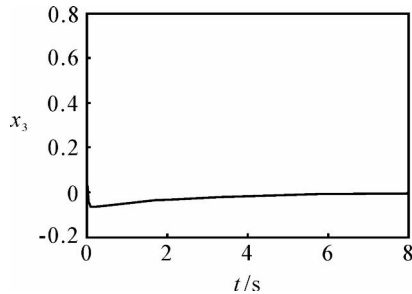


图 1 状态 x_3 的响应曲线

由仿真结果可看出, 系统数学模型虽然存在失配, 但控制器仍能保持系统内部动态的稳定.

5 结 论

本文针对仿射非线性 MIMO 非最小相位系统, 提出了一种输入输出反馈线性化和模型预测控制结合的控制方案. 首先通过反馈线性化将系统分解为外部动态和内部动态, 对外部动态用极点配置保证其稳定性, 针对零动态不稳定的非最小相位系统, 用模型预测控制镇定系统内部动态, 并将模型预测控

制信号作为系统的参考输出, 实现闭环控制系统的指数稳定. 能够很好地解决存在模型失配时非最小相位系统的镇定问题. 仿真算例说明了控制器的设计过程和性能.

参考文献(References)

- [1] Guardabassi G O, Savaresi S M. Approximate linearization via feedback — An overview [J]. Automatica, 2001, 31(1): 1-15.
- [2] Panjapornpon C, Soroush M, Seider W D. Model-based control of unstable, non-minimum-phase, nonlinear processes[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Hawaii: IEEE Press, 2003: 6151-6156.
- [3] Guemghar K, Srinivasan B, Mullhaupt Ph, et al. Analysis of cascade structure with predictive control and feedback linearization[J]. IEE Proc on Control Theory and Applications, 2005, 152(3): 317-324.
- [4] Michael P Niemioca, Costas Kravaris. Nonlinear model-state feedback control for nonminimum-phase processes [J]. Automatica, 2003, 39(7): 1295-1302.
- [5] Khalil H K. Nonlinear system [M]. New York: Prentice Hall, 2002.
- [6] Isidori A. Nonlinear control systems [M]. London: Springer-Verlag, 1995.
- [7] Camacho E F, Bordons C. Model predictive control [M]. Berlin: Springer, 1999.

(上接第 300 页)

- [3] 张文修, 吴伟志, 梁吉业. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
(Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y. The theory and method of rough set[M]. Beijing: Publishing House of Science, 2001.)
- [4] Ziarko W. Variable precision rough set model[J]. J of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59.
- [5] Wang G Y. Rough reduction in algebra view and information view[J]. Int J of Intelligent System, 2003, 18(6): 679-688.
- [6] Dunsch I, Gediga G. Uncertainty measures of rough set prediction[J]. Artificial Intelligence, 1998, 106(1): 109-137.
- [7] 苗夺谦, 王迁. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J]. 软件学报, 1999, 10(2): 113-116.
(Miao D Q, Wang Q. An information representation of the concepts and operations in rough set theory[J]. J of Software, 1999, 10(2): 113-116.)
- [8] 唐建国, 谭明术. 粗糙集理论中的求核与约简[J]. 控制与决策, 2003, 18(4): 449-452.
(Tang J G, Tan M S. On finding core and reduction in rough set theory [J]. Control and Decision, 2003, 18(4): 449-452.)
- [9] Newman D J, Hettich S, Blake C L. UCI Repository of machine learning databases [DB/OL]. (1998-03-20). <http://www.ics.uci.edu/~mllearn/MLRepository.html>. 1998.