

文章编号: 1001-0920(2011)02-0285-04

## 基于幂次函数的离散滑模控制算法

孙彪, 孙秀霞, 陈琳, 薛建平

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

**摘要:** 利用幂次函数构造一种新的趋近律离散滑模控制算法, 并给出了无抖振的理论证明. 对于标称系统, 该算法可使切换函数无抖振、无正负交替地快速趋近于零; 对于满足匹配条件的不确定性系统, 可使切换函数无抖振、单调地收敛于与外干扰相关的某一数值. 利用倒立摆模型进行了数值仿真, 结果表明, 控制器的输出、切换函数、被控系统的输出均不存在抖振现象, 而且被控系统表现出了良好的动态品质.

**关键词:** 幂次函数; 趋近律; 抖振; 离散滑模控制

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

### Algorithm of discrete-time sliding mode control based on power-function

SUN Biao, SUN Xiu-xia, CHEN Lin, XUE Jian-ping

(College of Engineering, Air Force University of Engineering, Xi'an 710038, China. Correspondent: SUN Biao, E-mail: sunbiao2001@sina.com)

**Abstract:** A new algorithm of reaching law discrete-time sliding mode control is designed by using power-function. Theory analysis about non-chattering is also given. As to nominal system, this algorithm can make the value of switch function reach zero speedily without chattering. As to uncertain system accorded with matching condition, this algorithm can make the value of switch function monotonously reach a certain value which is related with external disturbance. Numerical value simulation is given by using inverted pendulum model. Simulation results show that there is no chattering hundred-percent in the output of controller, the value of switch function, and the output of the controlled system. This algorithm also makes the controlled system achieve excellent dynamic performance.

**Key words:** power-function; reaching law; chattering; discrete-time sliding mode control

## 1 引言

滑模变结构控制通过控制量的切换, 使系统状态沿滑模面运动, 从而使系统在受到参数摄动和外干扰时具有不变性<sup>[1]</sup>. 由于计算机技术的飞速发展, 目前实际控制中使用的绝大多数都是离散系统, 要将离散滑模变结构控制应用到实际的系统中, 真正发挥它的强鲁棒性, 必须对传统的滑模变结构控制进行改进, 将有害的抖振减小到一定的程度<sup>[2-3]</sup>.

常见的高氏离散趋近律为<sup>[4]</sup>

$$s(k+1) = (1-qT)s(k) - \varepsilon T \text{sign}(s(k)). \quad (1)$$

即使对于标称系统, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 切换函数  $s(k)$  也会存在幅值为  $\varepsilon T / (2 - qT)$  的抖振<sup>[5]</sup>. 本文利用自抗扰控制技术中的幂次函数  $\text{fal}(s, \alpha, \delta)$ <sup>[6-8]</sup> 代替式(1)中的符号函数, 设计了一种新的趋近律离散滑模控制算法, 并给出了无抖振的理论证明. 对于标称系统, 该算法

可使切换函数无抖振、无正负交替地快速趋近于零; 对于满足匹配条件的不确定系统, 可以使切换函数无抖振、单调地收敛于与外干扰相关的某一数值. 本文利用倒立摆模型对所提算法进行了数值仿真, 结果表明, 该算法在保证传统滑模固有强鲁棒性的同时, 控制器的输出、切换函数的值和系统输出均不存在抖振现象, 而且使被控系统表现出了良好的动态品质.

## 2 算法设计

幂次函数是一种非线性函数, 利用它可以产生许多智能性的功能, 其表达式为

$$\text{fal}(s, \alpha, \delta) = \begin{cases} |s|^\alpha \text{sign}(s), & |s| \geq \delta; \\ \frac{s}{\delta^{1-\alpha}}, & |s| < \delta. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \delta < 1$ . 当  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.1$  时, 幂次函数  $\text{fal}(s, \alpha, \delta)$  与符号函数  $\text{sign}(s)$  和饱和函数  $\text{sat}(s)$  的比较如图 1 所示.

收稿日期: 2009-11-18; 修回日期: 2010-01-15.

基金项目: 中国博士后科学基金项目(20070421137).

作者简介: 孙彪(1981-), 男, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 孙秀霞(1962-), 女, 教授, 博士生导师, 从事飞行控制等研究.

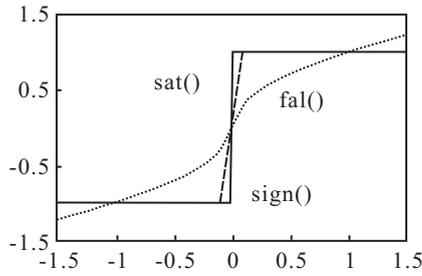


图 1 3种函数的比较

利用幂次函数设计的新型趋近律算法为

$$\begin{cases} s(k+1) = (1-qT)s(k) - \varepsilon T \text{fal}(s(k), \alpha, \delta), \\ \delta > \left(\frac{\varepsilon T}{1-qT}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0 < \frac{\varepsilon T}{1-qT} < 1. \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $0 < qT < 1, 0 < \varepsilon T < 1$ . 虽然式(3)与(1)仅相差一个符号函数,但由于函数  $\text{fal}(s, \alpha, \delta)$  的非线性,这种趋近律算法可完全消除系统的抖振.

### 3 稳定性分析

不失一般性,针对存在干扰的线性不确定离散系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + Dw(k). \quad (4)$$

其中:  $\Delta A, \Delta B$  分别为矩阵  $A, B$  的摄动矩阵,假设系统(4)满足匹配条件,即

$$\Delta A = B\tilde{A}, \Delta B = B\tilde{B}, D = B\tilde{D}. \quad (5)$$

系统(4)可改写为

$$x(k+1) = Ax(k) + B[u(k) + d(k)]. \quad (6)$$

其中  $d(k) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + \tilde{D}w(k)$ , 视为系统受到的总干扰. 设  $d(k)$  满足

$$|d(k)| \leq d_{\max}. \quad (7)$$

离散线性滑模面设计为

$$s(k) = Cx(k). \quad (8)$$

假设可控条件  $CB \neq 0$  成立,利用系统(6)的标称系统得到控制律为<sup>[2]</sup>

$$u(k) = -(CB)^{-1}[CAx(k) - (1-qT)s(k) + \varepsilon T \text{fal}(s(k), \alpha, \delta)]. \quad (9)$$

将控制律  $u(k)$  施加于实际的被控对象系统(6)时,有

$$\begin{aligned} s(k+1) &= Cx(k+1) = \\ &CAx(k) + CBu(k) + CBd(k) = \\ &(1-qT)s(k) - \varepsilon T \text{fal}(s(k), \alpha, \delta) + CBd(k). \end{aligned} \quad (10)$$

设  $D_{\max} = CBd_{\max}$ , 则  $|CBd(k)| \leq D_{\max}$ , 将式(10)中的  $CBd(k)$  用  $D_{\max}$  替换,可得

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \\ &(1-qT)s(k) - \varepsilon T \text{fal}(s(k), \alpha, \delta) + D_{\max}. \end{aligned} \quad (11)$$

下面针对式(11),分两种情况分析切换函数  $s(k)$  的收敛域.

1) 当  $D_{\max} \leq qT\delta + \varepsilon T\delta^\alpha$  时

① 当  $s(k) \geq \delta$  时,式(11)变为

$$s(k+1) = [(1-qT) - \varepsilon Ts(k)^{\alpha-1}]s(k) + D_{\max}. \quad (12)$$

设  $\Delta s(k) = s(k+1) - s(k)$ , 则有

$$\Delta s(k) = -qTs(k) - \varepsilon Ts(k)^\alpha + D_{\max}. \quad (13)$$

$\Delta s(k)$  关于  $s(k)$  的导数为

$$\frac{\partial \Delta s(k)}{\partial s(k)} = -qT - \varepsilon T\alpha s(k)^{\alpha-1}. \quad (14)$$

由此可知  $\frac{\partial \Delta s(k)}{\partial s(k)} < 0$ , 即  $\Delta s(k)$  是关于  $s(k)$  的减函数,当  $s(k) \geq \delta$  时,有

$$\Delta s(k) \leq -qT\delta - \varepsilon Ts^\alpha + D_{\max} \leq 0.$$

针对式(12),由  $\Delta s(k) \leq 0$  可知  $s(k)$  递减,即:当  $s(0) \geq \delta$  时,  $s(k)$  递减,直到进入  $0 \leq s(k) < \delta$  的范围.

②  $0 \leq s(k) < \delta$  时,式(11)变为

$$s(k+1) = (1-qT - \varepsilon T\delta^{\alpha-1})s(k) + D_{\max}. \quad (15)$$

针对式(15),有

$$\Delta s(k) = (-qT - \varepsilon T\delta^{\alpha-1})s(k) + D_{\max}. \quad (16)$$

对于式(16),有

当  $s(k) > \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T\delta^{\alpha-1}}$  时,  $\Delta s(k) < 0$ ,  $s(k)$  递减;

当  $s(k) < \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T\delta^{\alpha-1}}$  时,  $\Delta s(k) > 0$ ,  $s(k)$  递增;

当  $s(k) = \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T\delta^{\alpha-1}}$  时,  $\Delta s(k) = 0$ ,  $s(k)$  不变.

**结论 1** 当  $D_{\max} \leq qT\delta + \varepsilon T\delta^\alpha$ , 切换函数的初始值  $s(0) \geq 0$  时,  $s$  收敛于  $h = \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T\delta^{\alpha-1}}$ ;  $s$  单调趋近于  $h$ ,且不会出现穿越  $s = h$  的现象.

③ 当  $s(k) \leq -\delta$  时,式(11)变为

$$s(k+1) = (1-qT)s(k) + \varepsilon T(-s(k))^\alpha + D_{\max}. \quad (17)$$

针对式(17),有

$$\Delta s(k) = -qTs(k) + \varepsilon T(-s(k))^\alpha + D_{\max}. \quad (18)$$

$\Delta s(k)$  关于  $s(k)$  的导数为

$$\frac{\partial \Delta s(k)}{\partial s(k)} = -qT - \varepsilon T\alpha(-s(k))^{\alpha-1}. \quad (19)$$

由此可知  $\frac{\partial \Delta s(k)}{\partial s(k)} < 0$ , 即  $\Delta s(k)$  是关于  $s(k)$  的减函数,当  $s(k) \leq -\delta$  时,有

$$\Delta s(k) \geq qT\delta + \varepsilon Ts^\alpha + D_{\max} > 0. \quad (20)$$

对于式(17),由  $\Delta s(k) > 0$  可知,  $s(k)$  递增,即:当  $s(0) \leq -\delta$  时,  $s(k)$  递增,直到进入  $-\delta < s(k) < 0$  的范围.

④ 当  $-\delta < s(k) < 0$  时, 式(11)变为(15), 进而得到(16), 由此可知:

当  $s(k) < \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T \delta^{\alpha-1}}$  时,  $\Delta s(k) > 0$ ,  $s(k)$  递增. 故当  $-\delta < s(k) < 0$  时,  $s(k)$  递增, 直到进入  $s(k) \geq 0$  的范围. 而根据结论1可知, 一旦  $s(k)$  进入  $s(k) \geq 0$  的范围, 切换函数将收敛于  $h = \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T \delta^{\alpha-1}}$ . 结合  $s(k) < 0$  时的分析并没有用到对  $D_{\max}$  的限制条件  $D_{\max} \leq qT\delta + \varepsilon T \delta^\alpha$ , 故得出如下结论:

**结论 2** 当  $D_{\max} \leq qT\delta + \varepsilon T \delta^\alpha$  时, 切换函数  $s$  收敛于  $h = \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T \delta^{\alpha-1}}$ ;  $s$  单调趋近于  $h$ , 且不会出现穿越  $s = h$  的现象.

2) 当  $D_{\max} > qT\delta + \varepsilon T \delta^\alpha$  时

① 当  $s(k) < 0$  时,  $s(k)$  递增, 直至进入  $s(k) > 0$  的范围.

② 当  $0 \leq s(k) < \delta$  时, 式(11)变为(15), 进而得到(16). 由  $D_{\max} > qT\delta + \varepsilon T \delta^\alpha$  可知:  $0 \leq s(k) < \delta < \frac{D_{\max}}{qT + \varepsilon T \delta^{\alpha-1}}$ , 此时  $s(k)$  递增, 直至进入  $s(k) \geq \delta$  的范围.

③ 当  $s(k) \geq \delta$  时, 式(11)变为(12), 由此易知此时  $\frac{\partial \Delta s(k)}{s(k)} < 0$ , 即  $\Delta s(k)$  是关于  $s(k)$  的减函数. 令  $\Delta s(k) = 0$ , 即

$$qTs(k) + \varepsilon Ts(k)^\alpha = D_{\max}. \quad (21)$$

假设  $s(k) = h'$  使式(21)成立, 根据减函数的性质, 则有: 当  $s(k) > h'$  时,  $\Delta s(k) < 0$ ,  $s(k)$  递减; 当  $s(k) < h'$  时,  $\Delta s(k) > 0$ ,  $s(k)$  递增; 当  $s(k) = h'$  时,  $\Delta s(k) = 0$ ,  $s(k)$  不变. 故  $h'$  是切换函数  $s(k)$  的收敛值, 且  $h' > \delta$ , 由此可得如下结论:

**结论 3** 当  $D_{\max} > qT\delta + \varepsilon T \delta^\alpha$  时, 切换函数  $s$  收敛于  $h'$ ,  $h' > \delta$  且使式(21)成立;  $s$  单调趋近于  $h'$ , 且不会出现穿越  $s = h'$  的现象.

在基于幂次函数的趋近律中, 首先需要确定系统的采样时间  $T$  和趋近律的两个参数  $q$  和  $\varepsilon$ , 使其满足  $0 < qT < 1, 0 < \varepsilon T < 1$ ; 对于幂次函数, 一般取  $\alpha = 0.5$ , 然后根据  $\delta > \left(\frac{\varepsilon T}{1 - qT}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , 确定  $\delta$  的值. 当这5个参数确定后, 由结论2和结论3可知, 切换函数的最终收敛值  $s(\infty)$  仅与系统受到的总干扰  $D_{\max}$  有关. 在切换函数的收敛过程中,  $s$  单调趋近于  $h(h')$ , 不会出现穿越  $s = h(s = h')$  的现象, 这就从根本上避免了高频抖振现象的发生.

### 4 数值仿真

本文选用典型一阶倒立摆为对象进行仿真. 设倒立摆的摆角为  $x_1$ , 小车的推力为  $u$ , 重力加速度  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , 摆的质量为  $3 \text{ kg}$ , 摆长为  $0.5 \text{ m}$ , 小车质量

为  $8 \text{ kg}$ , 系统离散化方程如下<sup>[9]</sup>:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + Tx_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + T[f(x_1(k), x_2(k)) + g(x_1(k), x_2(k))u(k)]. \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} f &= (107.9 \sin(x_1(k)) - \\ & 1.5(x_2(k))^2 \cos(x_1(k)) \sin(x_1(k))) / \\ & (7.3 - 1.5(\cos(x_1(k)))^2), \\ g &= \cos(x_1(k)) / (7.3 - 1.5(\cos(x_1(k)))^2). \end{aligned}$$

系统的初值  $x_1(0) = \pi/6, x_2(0) = 0$ . 仿真时, 视  $f$  为干扰项, 根据式(9)可得到如下控制律:

$$u(k) = \frac{-\varepsilon \text{fal}(s(k), \alpha, \delta) - qs(k) - cx_2(k)}{g(x_1(k), x_2(k))}. \quad (23)$$

取线性滑模面参数  $C = [15 \ 1]$ , 系统采样时间  $T = 0.01 \text{ s}$ , 取  $\alpha = 0.5, \varepsilon = 5, q = 30$ , 且  $\delta = T$ , 使其满足  $\delta > \left(\frac{\varepsilon T}{1 - qT}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

利用本文设计算法与式(1)所代表的高氏离散趋近律滑模算法作对比. 图2为两种趋近律控制器输出  $u$  的对比; 图3(a), 4(a)分别为两种算法切换函数

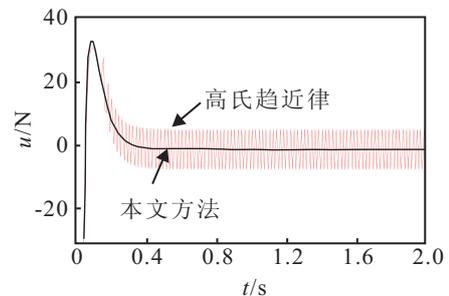
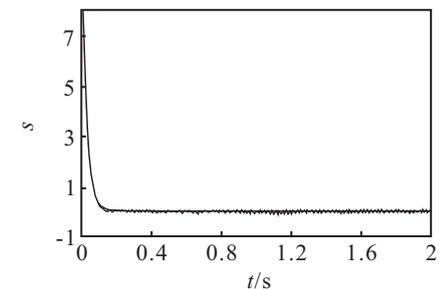
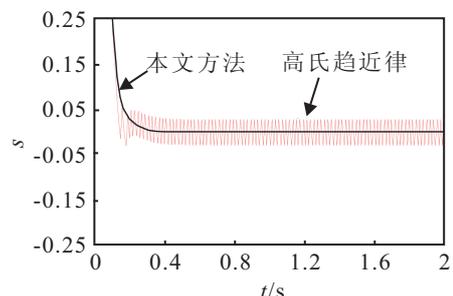


图2 控制器输出的对比



(a) 两种切换函数的时间历程



(b) 局部放大后的对比

图3 两种切换函数的时间历程

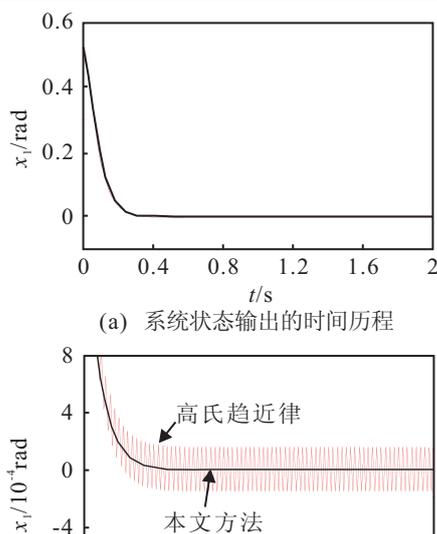


图4 系统状态输出的时间历程

$s$  和系统状态  $x_1$  的时间历程. 由这3个图可以看出两条曲线貌似重合, 但通过放大却可以明显看出二者的区别.

从仿真结果可看出, 高氏趋近律滑模算法在控制倒立摆的过程中, 不管是控制器的输出  $u$ , 切换函数  $s$  还是系统的输出  $x_1$ , 最终都只能稳定于某个抖振. 而采用幂次函数的新型趋近律离散滑模算法完全消除了系统的抖振, 使  $u$ ,  $s$  和  $x_1$  无正负交替的快速趋近稳态值, 与本文的理论分析完全吻合.

## 5 结论

传统离散滑模变结构控制时产生的高频抖振, 容易激发系统的未建模动态, 影响系统的控制性能. 本文利用幂次函数构造了一种新型的趋近律离散滑模控制算法, 并且给出了无抖振的理性分析. 这种算法可以在不损失传统滑模控制强鲁棒性的前提下, 使切换函数无抖振、无正负交替的趋近于稳态, 并且可保证被控系统在整个状态空间内具有良好的动态品质.

## 参考文献(References)

[1] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与

进展[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407-417.

(Liu J K, Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control[J]. Control Theory and Application, 2007, 24(3): 407-417.)

[2] 刘金琨. 滑模变结构控制Matlab仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

(Liu J K. Matlab simulation for sliding mode control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.)

[3] Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode control[J]. IEEE Trans on Control Systems, 1999, 7(3): 328-342.

[4] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control system[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.

[5] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计[J]. 自动化学报. 2000, 26(2): 184-191.

(Zhai C L, Wu Z M. Variable structure control design for uncertain discrete-time systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(2): 184-191.)

[6] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用[J]. 控制与决策, 1998, 13(1): 19-23.

(Han J Q. Active disturbance rejection controller and it's applications[J]. Control and Decision, 1998, 13(1): 19-23.)

[7] 黄一, 张文革. 自抗扰控制器的发展[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 485-492.

(Huang Y, Zhang W G. Development of active disturbance rejection controller[J]. Control Theory and Application, 2002, 19(4): 485-492.)

[8] 韩京清. 自抗扰控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.

(Han J Q. Active disturbance rejection control technique[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2008.)

[9] 金鸿章, 罗延明, 肖真, 等. 抑制滑模抖振的新型饱和函数法研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2007, 28(3): 288-291.

(Jin H Z, Luo Y M, Xiao Z, et al. Investigation of a novel method of saturation function for chattering reduction of sliding model control[J]. J of Harbin Engineering University, 2007, 28(3): 288-291.)