文章编号: 1001-0920 (2011) 02-0213-08

考虑缺货的模糊随机缺陷生产系统

胡劲松, 季雅萍, 郭彩云, 徐如乾

(青岛大学 管理科学与工程系，山东 青岛 266071)

摘　要: 针对不可靠的生产过程, 研究了生产故障时间为模糊随机变量且允许缺货的缺陷生产系统. 建立含缺货费和模糊随机重修费的经济生产批量模型. 基于可信性理论, 建立其期望费用模型, 揭示了费用函数的性质, 并证明了使费用最小的最优生产时间的存在性和唯一性, 从而确定了最优生产时间的上下界. 基于此, 设计了最优生产时间的二分法求解过程. 最后通过算例验证了所提出模型的有效性, 并分析了缺货费用、重修费用和缺陷产品比例对最优生产策略的影响.

关键词: 模糊随机变量；缺陷生产；允许缺货；经济生产批量；可信性理论

中图分类号: F274　　　　**文献标识码:** A

Fuzzy random imperfect production system with shortages

HU Jin-song, *JI Ya-ping*, *GUO Cai-yun*, *XU Ru-qian*

(Department of Management Science and Engineering，Qingdao University，Qingdao 266071，China. Correspondent：HU Jin-song，E-mail：hujinsong@qdu.edu.cn)

Abstract: To settle the imperfect production process, an imperfect production system with fuzzy random deteriorating process under allowable shortage is investigated. The economic production quantity(EPQ) model including shortage cost and fuzzy random rework cost is established. Based on the credibility theory, the expected average cost per unit time is derived, and then the properties of the cost function are revealed. The optimal production length which can minimize the expected average cost is proved to exist and be unique, and the upper and lower bounds of the optimal production time are determined. Bisection method for the optimal production length is designed. Finally, a numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed model and illustrate the effects of the shortage cost, rework cost and the defective item ratio on the optimal production policy.

Key words: fuzzy random variable；imperfect production；allowable shortages；economic production quantity；credibility theory

1 引　言

传统的经济生产批量 (EPQ) 模型默认生产过程一直完好, 然而实际情况并非如此. 由于生产系统不完善和机器故障等原因, 生产过程可能由在控状态转为失控状态, 因而生产出一定比例的缺陷产品. 为了描述更切合实际的生产库存情况, 众学者研究了不同类型的缺陷生产系统. 文献[1]研究了生产故障时间服从指数分布的EPQ 问题; [2-3]考虑了对缺陷生产系统的检修, 给出了最优生产时间和检修策略, 并扩展了 Rosenblatt 和 Lee 的模型; [4]考虑了售后保单费用和售前重修费用的差异, 研究了缺陷生产系统的最优生产时间和检查策略的联合决策问题; [5]研究了生产故障时间服从几何分布的缺陷生产系统; [6]通过考虑检查错误的存在性, 修正了 Lee 和 Rosenblatt 的模型; [7]在[2-3]的基础上研究了生产故障时间服从任意分布的缺陷生产系统; [8]进一步研究了允许缺货的缺陷生产系统; [9]研究了学习型曲线对缺陷生产系统的影响.

上述文献均假设生产故障时间为随机变量. 然而由于缺乏历史数据或数据不可靠, 生产故障时间往往要依靠管理者的经验判断或主观估计. 例如: 管理者预测故障时间约为 10 天, 此时生产故障时间符合文献[10]提出的模糊集的定义. 最近, [11] 研究了模糊生产故障时间的 EPQ 模型, 并基于可信性理论[12]设

收稿日期: 2009-11-20；**修回日期:** 2010-06-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071082)；山东省自然科学基金项目(Y2008H07).

作者简介: 胡劲松(1966−), 男, 教授, 博士, 从事决策分析、物流与供应链管理等研究；季雅萍(1985−), 女, 硕士生, 从事决策分析、物流与供应链管理等研究.

计了最优生产策略的算法. 在现实问题中, 往往知道生产故障时间服从某一分布, 但因缺乏足够的统计样本信息而无法确定其分布的参数, 比如: 故障时间服从参数值约为 0.4 的指数分布. 此时, 故障时间表现为模糊和随机共存的随机模糊不确定性, 并符合随机模糊变量定义[13]. [14]研究了随机模糊生产故障时间的EPQ模型, 并基于随机模糊模拟技术, 设计了一种基于最优生产策略的随机扰动近似(SPSA)算法.

综上可见, 近年来对有关缺陷生产系统的模糊以及模糊和随机共存的多重不确定性问题的研究逐步引起人们的关注. 然而, 对于模糊和随机共存的多重不确定性问题的研究, 仅涉及到随机模糊的多重不确定性, 在生产库存系统中, 另一种随机和模糊共存现象为模糊随机现象[15-16], 且针对此种多重不确定性问题, 文献[17-18]分别开展了提前期需求为模糊随机变量的周期和连续盘点库存策略的研究. 目前, 有关模糊和随机共存的模糊随机生产故障时间的缺陷生产系统的研究尚未见报道. 由于现实生产过程中, 生产故障时间的取值一般由多个专家根据其经验给出, 而且来自不同专家给出的故障时间主观估计值往往是不同的, 此时生产故障时间符合模糊随机变量的定义[15-16]. 另外, 现已开展的对模糊和随机模糊缺陷生产系统的研究均未考虑允许缺货的情形.

鉴于此, 本文研究了允许缺货且含模糊随机生产故障时间的EPQ模型, 利用可信性测度理论[19], 给出其最优生产策略的二分法求解过程, 并探讨当模糊随机生产故障时间退化为随机生产故障时间[8]和模糊生产故障时间[11]时的结论.

2 模糊变量和模糊随机变量

自从文献 [10] 通过隶属函数给出模糊集概念以及 [20] 提出的模糊事件的可能性测度以来, [21-23] 对可能性理论作了进一步研究. 最近, [12] 给出了模糊事件的可信性测度定义, 说明了在模糊现象中与随机事件概率测度并行的是可信性测度, 而非可能性测度. 模糊变量的期望值在模糊最优问题中起着重要作用, 为此 [12] 基于模糊事件的可信性测度给出了模糊变量的标量期望值算子, 本文则给出了所需的可能性测度、可信性测度、模糊变量、模糊随机变量及其期望值的有关理论.

2.1 模糊变量

定义 1[21] 设 Θ 为非空集合, $P(\Theta)$ 为 Θ 的幂集. 如果可能性测度 Pos 满足以下 3 条公理:

公理 1 $\mathrm{Pos}\{\Theta\}=1$;

公理 2 $\mathrm{Pos}\{\varnothing\}=0$, 其中 $\varnothing$ 为空集;

公理 3 对于 $\mathrm{Pos}\{\Theta\}$ 中任意集合 $\{A_i\}$, 有

$$\mathrm{Pos}\Big\{\bigcup_i A_i\Big\}=\sup_i\mathrm{Pos}\{A_i\}.$$

则称三元组 $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Pos})$ 为可能性空间.

定义 2[21] 设 ξ 为从可能性空间 $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Pos})$ 到实直线 $\Re$ 上的函数, 则称 ξ 为模糊变量.

定义 3[12] 设 $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Pos})$ 为一个可能性空间, A 为幂集 $P(\Theta)$ 中的一个元素, A^c 表示 A 的补集, 则事件 A 的可信性测度定义为

$$\mathrm{Cr}\{A\}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{Pos}\{A\}-\mathrm{Pos}\{A^c\}).$$

定义 4[13] 设 ξ 为模糊变量, 则 ξ 的可信性分布函数为

$$\varPhi(x)=\mathrm{Cr}\{\theta\in\Theta\mid\xi(\theta)\leqslant x\},\ x\in\Re.$$

定义 5[12] 设 ξ 为模糊变量, 则其期望值定义为

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_0^{+\infty}\mathrm{Cr}\{x\in\Theta|\xi(x)\geqslant r\}\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^0\mathrm{Cr}\{x\in\Theta|\xi(x)\leqslant r\}\mathrm{d}r.$$

性质 1[13] 设 $f:\Re^n\to\Re$ 为一个实值函数, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为可能性空间 $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Pos})$ 上的模糊向量, 则 $f(\xi)$ 为一个模糊变量, 其期望值为

$$\mathrm{E}[f(\xi)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{Cr}\{x\in\Theta|f(\xi(x))\geqslant r\}\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^0\mathrm{Cr}\{x\in\Theta|f(\xi(x))\leqslant r\}\mathrm{d}r.$$

定义 6[13] 设 ξ 为模糊变量, 则模糊变量 ξ 的可信性密度函数为

$$\varPhi(x)=\int_{-\infty}^x\phi(y)\mathrm{d}y,\ \forall x\in\Re,$$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\mathrm{d}y=1$.

注 1 若模糊变量 ξ 的隶属函数

$$\mu_\xi(x)=\int_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{L(x)}{x}+\int_{b<x\leqslant c}\frac{R(x)}{x}.$$

其中: $L(x)$ 为 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的增函数, $R(x)$ 为 $b\leqslant x\leqslant c$ 上的减函数, 则有

$$\varPhi(x)=\begin{cases}0,\ x<a;\\ L(x)/2,\ a\leqslant x\leqslant b;\\ 1-R(x)/2,\ b<x\leqslant c;\\ 1,\ c\leqslant x.\end{cases}$$

注 2 若 $\xi=(a,b,c)$ 为三角形模糊变量, 则有

$$\varPhi(x)=\begin{cases}0,\ x<a;\\ \dfrac{x-a}{2(b-a)},\ a\leqslant x\leqslant b;\\ \dfrac{x-2b+c}{2(c-b)},\ b<x\leqslant c;\\ 1,\ c\leqslant x.\end{cases}$$

2.2 模糊随机变量

定义 7[19] 设 $\tilde{\xi}$ 为从概率空间 $(\Omega, P(\Omega), \mathrm{Pr})$ 到模糊变量集合的函数. 如果对于 $\Re$ 上的任何 Borel 集 B, $\mathrm{Pos}\{\tilde{\xi}(x)\in B\}$ 为 x 的可测函数, 则称 $\tilde{\xi}$ 为模糊随机变量.

性质 2[19]　设 $\tilde{\xi}$ 为概率空间 $(\Omega, P(\Omega), \mathrm{Pr})$ 上的模糊随机变量. 如果对于每个 $x \in \Omega$, 模糊变量 $\tilde{\xi}(x)$ 的期望值 $\mathrm{E}[\tilde{\xi}(x)]$ 为有限的, 则 $\mathrm{E}[\tilde{\xi}(x)]$ 为一个随机变量.

定义 8[19]　设 $\tilde{\xi}$ 为模糊随机变量, 则其期望值定义为

$$\mathrm{E}[\tilde{\xi}] = \int_0^{\infty} \mathrm{Pr}\{x \in \Omega | \mathrm{E}[\tilde{\xi}(x)] \geqslant r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Pr}\{x \in \Omega | \mathrm{E}[\tilde{\xi}(x)] \leqslant r\}\mathrm{d}r.$$

性质 3　设 $\tilde{\xi}$ 为模糊随机变量, $f(x)$ 为 $\tilde{\xi}$ 的概率密度函数, 则有

$$\mathrm{E}[\tilde{\xi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}[\tilde{\xi}(x)] f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　由性质 2 可知, $\mathrm{E}[\tilde{\xi}(x)]$ 为一随机变量, 则根据随机变量的期望定义可得证. □

为了获得模糊随机变量函数的期望值, 下面给出模糊随机变量函数的有关理论.

引理 1[19]　假设 $\tilde{\xi}$ 为 n 维模糊随机向量, 如果函数 $g: R^n \to R$ 为可测的, 则 $g(\tilde{\xi})$ 为模糊随机变量.

性质 4　设 $\tilde{\xi}$ 为模糊随机变量, $f(x)$ 为概率空间 $(\Omega, P(\Omega), \mathrm{Pr})$ 上对应于 $x \in \Omega$ 的概率密度函数, 函数 $g: R^n \to R$ 为可测的, 则 $g(\tilde{\xi})$ 的期望值为

$$\mathrm{E}[g(\tilde{\xi})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}[g(\tilde{\xi}(x))] f(x)\mathrm{d}x.$$

其中

$$\mathrm{E}[g(\tilde{\xi}(x))] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{g(\tilde{\xi}(x)) \geqslant r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}\{g(\tilde{\xi}(x)) \leqslant r\}\mathrm{d}r.$$

证明　对于模糊随机变量 $\tilde{\xi}$, $g(\tilde{\xi})$ 为模糊随机变量. 因此, 对于任意 $x \in \Omega$, $\tilde{\xi}(x)$ 和 $g(\tilde{\xi}(x))$ 都是模糊变量. 根据性质 2, 模糊变量 $g(\tilde{\xi}(x))$ 的期望值 $\mathrm{E}[g(\tilde{\xi}(x))]$ 是具有概率密度函数为 $f(x)$ 的随机变量. 根据随机变量函数期望值的定义可得证. □

3　模型建立

首先作如下模型假设: 1) 在生产周期内, 生产过程可能从可控状态转移到失控状态. 2) 在每一生产周期的开始阶段, 生产过程总是可控的, 生产的产品全部为完好产品; 一旦生产过程转移为失控状态, 将生产一定比例的缺陷产品. 3) 生产故障时间为模糊随机变量. 4) 生产结束后所有的产品被检测, 并考虑缺陷产品的重修费用. 5) 允许缺货且完全延期交货.

模型符号如下: d 为需求率; p 为生产率 $(p > d)$; K 为每生产周期的生产准备费用; h 为单位时间单位产品的存储费用; π 为单位时间单位产品的缺货费用; s 为单位缺陷产品的重修费用; τ 为失控状态时缺陷产品的比例; T 为生产周期; T_1 为缺货补充完成的生产时间; T_2 为最大库存时的生产时间; T_3 为从最大库存到库存为零的时间; T_4 为库存为零到最大缺货的时间; t 为周期的生产时间; $\tilde{\xi}$ 为模糊随机故障时间; $f(x)$ 为概率空间 $(\Omega, P(\Omega), \mathrm{Pr})$ 上对应于 $x \in \Omega$ 的概率密度函数; $\tilde{\xi}(x)$ 为对应 $x \in \Omega$ 的 $\tilde{\xi}$ 的模糊实现; $\Phi(y; x)$ 为 $\tilde{\xi}(x)$ 的可信性分布函数.

基于以上假设, 周期 T 内的库存状态如图 1 所示.

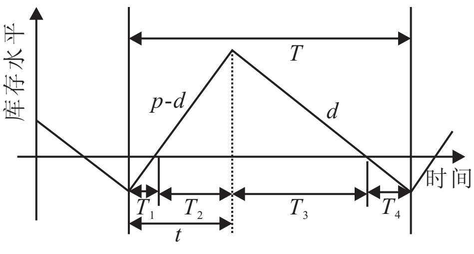

图 1　允许缺货的缺陷生产库存状态图

由图 1 可得出如下结论:

1) 考虑关系 $pt = dT$, 则单位时间生产准备费用为 $K/T = Kd/(pt)$.

2) 考虑关系 $(p-d)T_2 = dT_3$ 和 $T_2 = t - T_1$, 则单位时间存储费用为

$$h(p-d)(T_2+T_3)T_2/(2T) = h(p-d)t/2 - h(p-d)T_1 + h(p-d)T_1^2/(2t).$$

3) 考虑关系 $dT_4 = (p-d)T_1$, 则单位时间延期交货费用为

$$\pi[(p-d)T_1^2 + dT_4^2]/(2T) = \pi[(p-d)T_1^2/(2T) + (p-d)^2 T_1^2/(2dT)] = \pi(p-d)T_1^2/(2t).$$

4) 每一周期的不合格产品数为

$$N(t) = \begin{cases} 0, \ \tilde{\xi} \geqslant t; \\ \tau p(t - \tilde{\xi}), \ \tilde{\xi} < t. \end{cases}$$

则单位时间重修费用为 $sdN(t)/(pt)$. 由于 $\tilde{\xi}$ 为模糊随机变量, $N(t)$ 也为模糊随机变量.

单位时间模糊随机总费用为单位时间生产准备、存储、延期交货和重修费用之和, 即

$$C(t, T_1) = \frac{Kd}{pt} + (h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2t} + \frac{h(p-d)t}{2} - h(p-d)T_1 + \frac{sdN(t)}{pt}.$$

其单位时间期望总费用为

$$\mathrm{E}[C(t, T_1)] = \frac{Kd}{pt} + (h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2t} + \frac{h(p-d)t}{2} - h(p-d)T_1 + \frac{sd\mathrm{E}[N(t)]}{pt},$$

其中 $\mathrm{E}[N(t)]$ 为周期期望不合格产品数.

定理 1　周期期望不合格产品数为

$$\mathrm{E}[N(t)] = \tau p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \Phi(y; x)\mathrm{d}y f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\Phi(y; x)$ 为模糊实现 $\tilde{\xi}(x)$ 的可信性分布函数.

证明 因为 $N(t)$ 为模糊随机变量, 所以对于 $\forall x \in \Omega$, $N(t)(x)$ 为模糊变量, 即

$$N(t)(x) = \max(\tau p(t-\tilde{\xi}(x)), 0) = \begin{cases} 0, \ \tilde{\xi}(x) \geqslant t; \\ \tau p(t-\tilde{\xi}(x)), \ \tilde{\xi}(x) < t. \end{cases}$$

根据定义 5, 可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[N(t)(x)] = \\ &\int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{N(t)(x) \geqslant r\}\mathrm{d}r - \\ &\int_{-\infty}^0 \mathrm{Cr}\{N(t)(x) \leqslant r\}\mathrm{d}r = \\ &\int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{N(t)(x) \geqslant r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^0 0 \times \mathrm{d}r = \\ &\int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\max(\tau p(t-\tilde{\xi}(x)), 0) \geqslant r\}\mathrm{d}r = \\ &\int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\tau p(t-\tilde{\xi}(x)) \geqslant r\}\mathrm{d}r = \\ &\int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\Big\{\tilde{\xi}(x) \leqslant t - \frac{r}{\tau p}\Big\}\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

令 $y = t - r/(\tau p)$, 即 $r = g(y) = \tau p(t-y)$. 当 $r = 0$ 和 $r = +\infty$ 时, 有 $y = t$ 和 $y = -\infty$. 那么有

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[N(t)(x)] = \int_t^{-\infty} \mathrm{Cr}\{\tilde{\xi}(x) \leqslant y\}\mathrm{d}g(y) = \\ &-\int_{-\infty}^t \mathrm{Cr}\{\tilde{\xi}(x) \leqslant y\}\mathrm{d}g(y) = \\ &-\int_{-\infty}^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}g(y) = \\ &-\int_{-\infty}^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}\tau p(t-y) = \\ &\tau p\int_{-\infty}^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}y = \\ &\tau p\int_{-\infty}^0 \varPhi(y;x)\mathrm{d}y + \tau p\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}y = \\ &\tau p\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

由性质 4, 可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[N(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}[N(t)(x)]f(x)\mathrm{d}x = \\ &\tau p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$ □

根据定理 1, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 可表示为

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[C(t,T_1)] = \\ &\frac{Kd}{pt} + (h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2t} + \frac{h(p-d)t}{2} - \\ &h(p-d)T_1 + \frac{s\tau d}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1}$$

为获得 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 最小的生产时间 t^*, 下面讨论函数 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 及 t^* 的性质.

定理 2 1) 对于给定的 $t > 0$, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为 T_1 的凸函数; 2) 对于给定的 T_1, 当 $t > 0$ 时, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为 t 的单峰函数. 即存在唯一的 $t^* > 0$ 使得: 当 $t \geqslant t^*$ 时, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为严格增函数, 当 $0 < t \leqslant t^*$ 时, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为严格减函数.

证明 1) 对于给定的 $t > 0$, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 关于 T_1 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathrm{E}[C(t,T_1)]}{\partial T_1} = (h+\pi)(p-d)\frac{T_1}{t} - h(p-d),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}[C(t,T_1)]}{\partial T_1^2} = \frac{(h+\pi)(p-d)}{t}.$$

因为 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 关于 T_1 的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}[C(t,T_1)]}{\partial T_1^2} = (h+\pi)(p-d)/t > 0,$$

所以 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为 T_1 的凸函数.

2) 对于给定的 T_1, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 关于 t 一阶偏导数为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{E}[C(t,T_1)]}{\partial t} = \\ &\frac{-Kd}{pt^2} - (h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2t^2} + \frac{h(p-d)}{2} + \\ &\frac{s\tau d}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} \varPhi(t;x)f(x)\mathrm{d}x - \\ &\frac{s\tau d}{t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

为了判断函数 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 关于 t 的性质, 设

$$q(t) = t^2\frac{\partial \mathrm{E}[C(t,T_1)]}{\partial t},$$

即

$$\begin{aligned} q(t) = &-\frac{Kd}{p} - (h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2} + \frac{h(p-d)}{2}t^2 + \\ &s\tau dt\int_{-\infty}^{+\infty} \varPhi(t;x)f(x)\mathrm{d}x - \\ &s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

另外有

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = h(p-d)t + s\tau dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varPhi(t;x)}{\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x.$$

因为可信性分布 $\varPhi$ 是增函数, 并且 $f(x) > 0$, 所以 $\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t > 0$. 因此, 对于 $t > 0$, $q(t)$ 为 t 的严格单调递增函数.

考虑到

$$\lim_{t\to 0^+} q(t) = \frac{-Kd}{p} - (h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2} < 0,$$

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} q(t) = \\ &\lim_{t\to\infty}\Big[\frac{-Kd}{p} - \frac{(h+\pi)(p-d)T_1^2}{2} + \frac{h(p-d)t^2}{2} + \\ &s\tau dt\int_{-\infty}^{+\infty} \varPhi(t;x)f(x)\mathrm{d}x\Big] - \\ &s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x = \\ &-\frac{Kd}{p} - \frac{(h+\pi)(p-d)T_1^2}{2} + \frac{h(p-d)}{2}\lim_{t\to\infty} t^2 + \\ &s\tau d\lim_{t\to+\infty} t\int_{-\infty}^{+\infty} \varPhi(t;x)f(x)\mathrm{d}x - \\ &s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x = \\ &-\frac{Kd}{p} - \frac{(h+\pi)(p-d)T_1^2}{2} + \frac{h(p-d)}{2}\lim_{t\to\infty} t^2 + \end{aligned}$$

$$s\tau d(\lim_{t\to+\infty} t-1)>0.$$

那么 $q(t)$ 存在唯一零点 $q(t^*)=0$, 且对于给定的 T_1 有: 1) 当 $0<t<t^*$ 时, 有 $\partial \mathrm{E}[C(t,T_1)]/\partial t<0$, 即 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为 t 的严格减函数; 2) 当 $t>t^*$ 时, 有 $\partial \mathrm{E}[C(t,T_1)]/\partial t>0$, 即 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为 t 的严格增函数. 这意味着对于给定的 T_1, 当 $t>0$ 时, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 为 t 的单峰函数. □

令

$$\partial \mathrm{E}[C(t,T_1)]/\partial T_1 = (h+\pi)(p-d)T_1/t-h(p-d)=0,$$

即 $T_1=ht/(h+\pi)$. 将其代入式 (1) 可得

$$\mathrm{E}[C(t)] = \frac{Kd}{pt}+\frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}t+ \frac{s\tau d}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

定理 3　函数 $\mathrm{E}[C(t)]$ 存在唯一的极小值 t^*.

证明　因为

$$\frac{\mathrm{dE}[N(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\tau p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x\Big] = \tau p\int_{-\infty}^{+\infty}\varPhi(t;x)f(x)\mathrm{d}x,$$

所以有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}[C(t)]}{\mathrm{d}t} =& -\frac{Kd}{pt^2}+\frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}+ \frac{sd}{pt^2}\Big(t\frac{\mathrm{dE}[N(t)]}{\mathrm{d}t}-\mathrm{E}[N(t)]\Big)=\\ & -\frac{Kd}{t^2p}+\frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}+ \frac{s\tau d}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\varPhi(t;x)f(x)\mathrm{d}x- \frac{s\tau d}{t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x=\\ & -\frac{Kd}{t^2p}+\frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}+ \frac{s\tau d}{t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(t\varPhi(t;x)- \int_0^t\varPhi(y;x)\mathrm{d}y\Big)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设 $q(t)=t^2\dfrac{\mathrm{dE}[C(t)]}{\mathrm{d}t}$. 由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} =& h(p-d)\frac{\pi}{h+\pi}t+s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varPhi(t;x)+ t\frac{\mathrm{d}\varPhi(t;x)}{\mathrm{d}t}-\varPhi(t;x)\Big)f(x)\mathrm{d}x=\\ & h(p-d)\frac{\pi}{h+\pi}t+s\tau dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varPhi(t;x)}{\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

可知当 $t>0$ 时, $q(t)$ 为 t 的严格单调递增函数.

考虑到

$$\lim_{t\to 0^+} q(t)=-Kd/p<0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} q(t) =& -\frac{Kd}{p}+\lim_{t\to+\infty}\frac{h(p-d)}{2}\Big(\frac{\pi}{h+\pi}\Big)t^2+ s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\lim_{t\to+\infty}t\varPhi(t;x)- \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\varPhi(y;x)\mathrm{d}y\Big)f(x)\mathrm{d}x=\\ & -\frac{Kd}{p}+\frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}\lim_{t\to+\infty}t^2+ s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\lim_{t\to+\infty}t-1\Big)f(x)\mathrm{d}x=\\ & \frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}\lim_{t\to+\infty}t^2+ s\tau d\Big(\lim_{t\to+\infty}t-1\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-\frac{Kd}{p}=\\ & \frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}\lim_{t\to+\infty}t^2+ s\tau d\Big(\lim_{t\to+\infty}t-1\Big)-\frac{Kd}{p}>0.\end{aligned}$$

那么 $q(t)$ 存在唯一零点 $q(t^*)=0$, 且有: 当 $0<t<t^*$ 时, $\mathrm{dE}[C(t)]/\mathrm{d}t<0$, 即 $\mathrm{E}[C(t)]$ 为 t 的严格减函数; 当 $t>t^*$ 时, $\mathrm{dE}[C(t)]/\mathrm{d}t>0$, 即 $\mathrm{E}[C(t)]$ 为 t 的严格增函数. 这说明 $\mathrm{E}[C(t)]$ 为 t 的单峰函数且存在唯一使 $\mathrm{E}[C(t)]$ 最小的最优解 t^*. □

由定理 3 可得, 最优生产时间 t^* 为如下方程的解:

$$q(t)=-\frac{Kd}{p}+\frac{h(p-d)}{2}\frac{\pi}{h+\pi}t^2+ s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(t\varPhi(t;x)-\int_0^t\varPhi(y;x)\mathrm{d}y\Big)f(x)\mathrm{d}x=0. \tag{3}$$

遗憾地是, 因为式 (3) 为积分方程, 所以难以依据该方程通过解析求解出 t^*. 经过进一步分析可得 t^* 的取值区间.

定理 4　最优生产时间 $t^*\in[0,t_U]$, 其中

$$t_U=\sqrt{2Kd(h+\pi)/\pi ph(p-d)}.$$

证明　将 t_U 代入式 (3), 经整理可得

$$\begin{aligned}q(t_U) =& s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(t_U\varPhi(t_U;x)-\int_0^{t_U}\varPhi(y;x)\mathrm{d}y\Big)f(x)\mathrm{d}x=\\ & s\tau d\int_{-\infty}^{+\infty}(t_U\varPhi(t_U;x)-t_U\varPhi(t';x)|_{t'\in(0,t_U)})f(x)\mathrm{d}x=\\ & s\tau dt_U\int_{-\infty}^{+\infty}(\varPhi(t_U;x)-\varPhi(t';x)|_{t'\in(0,t_U)})f(x)\mathrm{d}x>0.\end{aligned}$$

根据 $q(t)$ 的单调性有 $t^*\in[0,t_U]$. □

t_U 为经典无故障且允许缺货的 EPQ 模型的最优生产时间, 因此定理 4 说明, 故障系统的最优生产时间总是较无故障系统短.

4　最优生产时间算法

基于定理 3 和定理 4, 设计如下获得 t^* 的二分算法:

Step 1: 令 $t_1=0, t_2=\sqrt{2Kd(h+\pi)/\pi ph(p-d)}$.

Step 2: 令 $t_0=(t_1+t_2)/2$, 并计算 $q(t_0)$.

Step 3: 若 $|q(t_0)|<\varepsilon$, 其中 ε 为一充分小的正数, 则转至 Step 5.

Step 4: 若 $q(t_0)>\varepsilon$, 则令 $t_2=t_0$; 若 $q(t_0)<-\varepsilon$, 则令 $t_1=t_0$, 转至 Step 2.

Step 5: 返回 t_0 的值作为最优解.

Step 6: 将 t_0 代入式 (2), 可得最小期望总费用.

5 模型分析

文献 [8,11] 分别探讨了随机生产故障时间且允许缺货以及模糊生产故障时间且不允许缺货的情形. 下面的两个推论将说明文献[8,11]中的模型仅为本文模型的特例.

推论 1 若模糊随机 $\tilde{\xi}$ 退化为随机情形, 则本文模型退化为文献[8]中的模型.

证明 $\tilde{\xi}$ 退化为随机变量, 意味着对于 $\forall x\in\Omega$, 其对应的模糊变量 $\tilde{\xi}(x)$ 退化为确定数 x. 此时有

$$\Phi(y;x)=\mathrm{Cr}(\tilde{\xi}(x)\leqslant y)=\begin{cases}0,\ y<x;\\ 1,\ y\geqslant x.\end{cases}\tag{4}$$

其函数图形如图 2 所示.

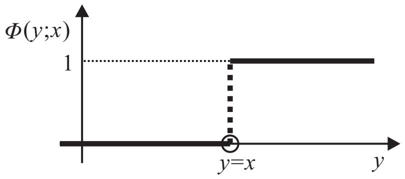

图 2 $\tilde{\xi}(x)$ 的可信性分布函数 $\Phi(y;x)$

事实上,

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[N(t)]=\tau p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\Phi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x=\\&\tau p\int_{-\infty}^{t}\Big[\int_0^x\Phi(y;x)\mathrm{d}y+\int_x^t\Phi(y;x)\mathrm{d}y\Big]f(x)\mathrm{d}x+\\&\tau p\int_{t}^{+\infty}\int_0^t 0\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x=\\&\tau p\int_{-\infty}^{t}\Big[\int_0^x 0\mathrm{d}y+\int_x^t\mathrm{d}y\Big]f(x)\mathrm{d}x=\\&\tau p\int_{-\infty}^{t}(t-x)f(x)\mathrm{d}x=\\&\tau p\int_{-\infty}^{0}(t-x)f(x)\mathrm{d}x+\tau p\int_0^t(t-x)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 x 不小于零, 所以 $\int_{-\infty}^{0}(t-x)f(x)\mathrm{d}x=0$, 因此有

$$\mathrm{E}[N(t)]=\tau p\int_0^t(t-x)f(x)\mathrm{d}x.$$

此时, $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 退化为文献[8]中模型的形式, 即

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[C(t,T_1)]=&\frac{Kd}{pt}+(h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2t}+\frac{h(p-d)t}{2}-\\&h(p-d)T_1+\frac{sd\tau}{t}\int_0^t(t-x)f(x)\mathrm{d}x.\ \square\end{aligned}$$

推论 2 若 $\tilde{\xi}$ 退化为模糊变量, 且不允许缺货, 则本文模型退化为文献[11]的模型.

证明 $\tilde{\xi}$ 退化为模糊变量, 意味着 $\forall x\in\Omega$, $\tilde{\xi}(x)$ 为同一模糊变量, 即 $\Phi(y;x)=\Phi(y)$. 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[N(t)]=&\tau p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\Phi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x=\\&\tau p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x=\\&\tau p\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\tau p\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为不允许缺货意味着 $dT_4=(p-d)T_1=0$, 此时有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[C(t,T_1)]=&\frac{Kd}{pt}+(h+\pi)(p-d)\frac{T_1^2}{2t}+\\&\frac{h(p-d)t}{2}-h(p-d)T_1+\frac{sd\mathrm{E}[N(t)]}{pt}=\\&\frac{Kd}{pt}+(h+\pi)\frac{T_1}{2t}\times 0+\frac{h(p-d)t}{2}-\\&h\times 0+\frac{sd\tau}{t}\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y=\\&\frac{Kd}{pt}+\frac{h(p-d)t}{2}+\frac{sd\tau}{t}\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为 $\Phi(y)$ 为 y 的单调有界增函数, 所以 $\int_0^t(t-y)\mathrm{d}\Phi(y)$ 为 Riemann-Stieltjes 可积并且 $\Phi(0)=0$, 于是有

$$\begin{aligned}&\int_0^t(t-y)\mathrm{d}\Phi(y)=(t-y)\Phi(y)|_0^t+\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y=\\&(t-t)\Phi(t)-(t-0)\Phi(0)+\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y=\int_0^t\Phi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{E}[C(t,T_1)]$ 就退化为文献 [11] 模型中的形式, 即

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[C(t,T_1)]=\\&\frac{Kd}{pt}+\frac{h(p-d)t}{2}+\frac{sd\tau}{t}\int_0^t(t-y)\mathrm{d}\Phi(y).\quad\square\end{aligned}$$

模糊随机故障时间的常见形式为三角形模糊随机变量 $\tilde{\xi}=(\xi-\varDelta_1,\xi,\xi+\varDelta_2)$, 其中 ξ 为服从概率密度函数 $f(x)$ 的随机变量. 于是 $\mathrm{E}[N(t)]$ 有以下形式:

推论 3 若 $\tilde{\xi}=(\xi-\varDelta_1,\xi,\xi+\varDelta_2)$, 则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[N(t)]=\\&\tau p\Big[\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}(t-x)f(x)\mathrm{d}x+\frac{(\varDelta_1-\varDelta_2)}{4}\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}f(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{\varDelta_1}{4}\int_{t-\varDelta_2}^{t}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varDelta_2}\int_{t-\varDelta_2}^{t}(t-x)(t-x+\\&2\varDelta_2)f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varDelta_1}\int_t^{t+\varDelta_1}(t-x+\varDelta_1)^2f(x)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}$$

证明 根据注 2, 对于 $\forall x\in\Omega$, $\tilde{\xi}(x)=(x-\varDelta_1,x,x+\varDelta_2)$ 的可信性分布函数为

$$\Phi(y;x)=\begin{cases}0,\ y<x-\varDelta_1;\\ \dfrac{y-(x-\varDelta_1)}{2\varDelta_1},\ x-\varDelta_1\leqslant y\leqslant x;\\ 1-\dfrac{(x+\varDelta_2)-y}{2\varDelta_2},\ x\leqslant y\leqslant x+\varDelta_2;\\ 1,\ x+\varDelta_2\leqslant y.\end{cases}\tag{5}$$

为了求解 $\mathrm{E}[N(t)]$, 将 x 的积分区间划分为 $(-\infty,$

$t-\varDelta_2], (t-\varDelta_2,t], (t,t+\varDelta_1]$ 和 $(t+\varDelta_1,+\infty)$. 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[N(t)]=&\tau p\Big[\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t}^{t+\varDelta_1}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t+\varDelta_1}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}$$

对于式 (6) 括弧中的第 1 项, 由于 $x\in(-\infty,t-\varDelta_2]$ 意味着 $x+\varDelta_2\leqslant t$, 将变量 y 的积分区间 $(0,t]$ 分为 $(0,x-\varDelta_1], (x-\varDelta_1,x], (x,x+\varDelta_2]$ 和 $(x+\varDelta_2,t]$ 4 个区间, 其余各项类似可得, 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[N(t)]=&\tau p\Big[\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_0^{x-\varDelta_1} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_{x-\varDelta_1}^{x} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_{x}^{x+\varDelta_2} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_{x+\varDelta_2}^{t} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_0^{x-\varDelta_1} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_{x-\varDelta_1}^{x} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_{x}^{t} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t}^{t+\varDelta_1}\int_0^{x-\varDelta_1} \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t}^{t+\varDelta_1}\int_{x-\varDelta_1}^{t} \varPhi(y;x)\mathrm{d}\varPhi yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t+\varDelta_1}^{+\infty}\int_0^t \varPhi(y;x)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}$$

根据 $\tilde{\xi}(x)$ 的可信性分布 $\varPhi(y;x)$, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[N(t)]=\\&\tau p\Big[\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_0^{x-\varDelta_1}0\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_{x-\varDelta_1}^{x}\frac{y-(x-\varDelta_1)}{2\varDelta_1}\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_{x}^{x+\varDelta_2}\Big[1-\frac{(x+\varDelta_2)-y}{2\varDelta_2}\Big]\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}\int_{x+\varDelta_2}^{t}1\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_0^{x-\varDelta_1}0\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_{x-\varDelta_1}^{x}\frac{y-(x-\varDelta_1)}{2\varDelta_1}\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\int_{x}^{t}\Big[1-\frac{(x+\varDelta_2)-y}{2\varDelta_2}\Big]\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t}^{t+\varDelta_1}\int_0^{x-\varDelta_1}0\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t}^{t+\varDelta_1}\int_{x-\varDelta_1}^{t}\frac{y-(x-\varDelta_1)}{2\varDelta_1}\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t+\varDelta_1}^{+\infty}\int_0^{t}0\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}$$

求解第 1 重积分可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[N(t)]=\\&\tau p\Big[\int_{-\infty}^{t-\varDelta_2}(\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{4}+t-x)f(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t-\varDelta_2}^{t}\Big[\frac{\varDelta_1}{4}+t-x+\frac{(t-x)(t-x-2\varDelta_2)}{4\varDelta_2}\Big]f(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{t}^{t+\varDelta_1}\frac{(t-x+\varDelta_1)^2}{4\varDelta_1}f(x)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}$$

通过进一步整理可证明推论 3. □

6　计算示例

为了说明本文算法, 考虑如下参数的生产系统: $d=30$, $p=40$, $K=50$, $h=0.08$, $\pi=0.05$, $s=10$, $\tau=0.02$, $\tilde{\xi}=(\xi-\varDelta_1,\xi,\xi+\varDelta_2)$, 且 $\xi\sim\exp(\lambda)$. 其中: $\lambda=6$, $\varDelta_1=0.5$, $\varDelta_2=1$.

设 $\varepsilon=0.001$. 利用第 4 节中的二分法求解过程, 并利用推论 3 的 $\mathrm{E}[N(t)]$ 函数形式, 可得最优生产时间 $t=10.6497$, 最优生产周期 $T=14.1996$, 最低成本值 $C=7.0432$. 当模型退化为随机情形时, 即 $\varDelta_1=0$, $\varDelta_2=0$ 时, 利用推论 1 的 $\mathrm{E}[N(t)]$ 函数形式, 得最优生产时间 $t=10.9623$, 最优生产周期 $T=14.6164$, 最低成本值 $C=6.8413$; 当模型退化为模糊情形时, 即 $\xi=6$ 时, 得最优生产时间 $t=6.7004$, 最优生产周期 $T=8.9339$, 最低成本值 $C=11.1934$.

在现实生产环境中缺货费用 π, 重修费用 s 和缺陷比例 τ 对最优生产策略至关重要, 故本文对缺货费用、重修费用和缺陷比例对最优生产策略的影响进行了灵敏度分析, 如表1 和表 2 所示.

由表 1 可知, 当缺货费用增大时, 最优生产时间缩短, 最优成本增大; 当失控状态的缺陷产品比例增大时, 最优生产时间缩短, 最优成本增大. 由表 2 可知, 当重修费用增大时, 最优生产时间缩短, 最优成本增大. 由此可知: 生产型企业应加强设备的维护和保养, 从而可延长最优生产时间, 同时可降低其成本. 这与现实中的生产系统是一致的, 这也进一步表明了本文模型的现实有效性及对生产管理者行为的指导意义.

表 1　缺货费用以及缺陷比例对最优生产策略和费用的影响

π	$\tau=0.01$			$\tau=0.02$			$\tau=0.03$		
	t	T	C	t	T	C	t	T	C
0.02	16.9727	22.6303	4.4185	13.2251	17.6334	5.6709	10.4500	13.9334	7.1762
0.05	12.9062	17.2083	5.8106	10.6497	14.1996	7.0432	9.1441	12.1922	8.2017
0.08	11.5335	15.3780	6.5031	9.8835	13.2518	7.5462	8.5916	11.4555	8.7302
1	8.9273	11.9031	8.4008	7.9226	10.5635	9.4669	7.1660	9.5546	10.4670

表 2 重修费用以及缺陷比例对最优生产策略和费用的影响

s	$\tau=0.01$			$\tau=0.02$			$\tau=0.03$		
	t	T	C	t	T	C	t	T	C
10	12.9062	17.2083	5.8106	10.6497	14.1996	7.0432	9.1441	12.1922	8.2017
20	10.6002	14.1336	7.0752	8.0540	10.7387	9.3129	6.4931	8.6575	11.5513
30	9.1518	12.2023	8.1957	6.3921	8.5228	11.7321	5.0514	6.7352	14.8473
40	8.0616	10.7488	9.3042	5.4545	7.2726	13.7495	4.3815	5.8420	17.1197

7 结 论

本文考虑了模糊随机环境下允许缺货的缺陷生产系统, 假设生产故障转移时间为一模糊随机变量, 建立了含有缺货费和模糊随机重修费的EPQ模型. 基于可信性理论, 建立了含模糊随机生产故障时间的期望费用模型, 揭示了费用函数的性质, 证明了使费用最小的最优生产时间的存在性和唯一性, 并确定了最优生产时间的上下界. 由此本文设计了最优生产策略的二分法求解过程. 最后, 计算示例说明了本文算法的有效性, 并分析了缺货费用、重修费用和缺陷产品比例对最优生产策略的影响. 分析结果表明: 随着缺货费用、重修费用和缺陷比例的增大, 最优生产时间缩短, 最优成本增大.

参考文献(References)

[1] Rosenblatt M, Lee H. Economic production cycles with imperfect production processes[J]. IIE Trans, 1986, 18(1), 48-55.

[2] Lee H, Rosenblatt M. Simultaneous determination of production cycle and inspection schedules in a production system[J]. Management Science, 1987, 33(9): 1125-1136.

[3] Lee H, Rosenblatt M. A production and maintenance planning model with restoration cost dependent on detection delay[J]. IIE Trans, 1989, 21(4): 368-375.

[4] Lee J, Park K. Joint determination of production cycle and inspection intervals in a deteriorating production system[J]. J of the Operational Research Society, 1991, 42(9): 775-783.

[5] Porteus E. Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction[J]. Operations Research, 1986, 34(1): 137-144.

[6] Liou M, Tseng S, Lin T. The effects of inspection errors to the imperfect EMQ model[J]. IIE Trans, 1994, 26(2): 42-51.

[7] Kim C, Hong Y. An optimal production run length in deteriorating production processes[J]. Int J of Production Economics, 1999, 58(2): 183-189.

[8] Chung K, Hou K. An optimal production run time with imperfect production processes and allowable shortages[J]. Computers and Operations Research, 2003, 30(4): 483-490.

[9] Chen C, Lo C, Liao Y. Optimal lot size with learning consideration on an imperfect production system with allowable shortages[J]. Int J of Production Economics, 2008, 113(1): 459-469.

[10] Zadeh L. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[11] Wang X, Tang W. Optimal production run length in deteriorating production processes with fuzzy elapsed time[J]. Computers and Industrial Engineering, 2009, 56 (4): 1627-1632.

[12] Liu B, Liu Y. Excepted value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 445-450.

[13] Liu B. Theory and practice of uncertain programming[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.

[14] Zhang C, Zhao R, Tang W. Optimal run lengths in deteriorating production processes in random fuzzy environments[J]. Computers and Industrial Engineering, 2009, 57(3): 941-948.

[15] Kwakernaak H. Fuzzy random variables – Definitions and theorems[J]. Information Sciences, 1978, 15(1): 1-29.

[16] Kwakernaak H. Fuzzy random variables – Algorithms and examples for the discrete case[J]. Information Sciences, 1979, 17(13): 253-278.

[17] Dey O, Chakraborty D. Fuzzy periodic review system with fuzzy random variable demand[J]. European J of Operational Research, 2009, 198(1): 113-120.

[18] 杨飞雪, 胡劲松. 模糊随机提前期的连续盘点存储策略研究[J]. 计算机集成制造系统, 2009, 15(3): 566-575.
(Yang F X, Hu J S. Continuous review inventory policy with fuzzy random lead-time[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2009, 15(3): 566-575.)

[19] Liu Y, Liu B. Fuzzy random variables: A scalar expected value operator[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2003, 2(2): 143-160.

[20] Zadeh L. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3-28.

[21] Nahmias S. Fuzzy variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(2): 97-110.

[22] Kaufmann A, Gupta M. Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985.

[22] Dubois D, Prade H. Possibility theory: An approach to computerized processing of uncertainty[M]. New York: Plenum, 1988.