

文章编号: 1001-0920(2009)03-0393-05

直觉模糊集隶属度与非隶属度函数的确定方法

邢清华, 刘付显

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要: 基于证据理论研究直觉模糊集隶属度和非隶属度函数的确定问题是一种新的思路. 首先分析信任函数、似然函数与隶属度函数、非隶属度函数的互通性; 然后给出广义基本概率分配(BPA)函数、广义信任函数和广义似然函数的定义; 最后在这 3 个改进定义的基础上建立直觉模糊集隶属度函数、非隶属度函数模型, 通过证明和实例验证了模型的正确性和有效性.

关键词: 直觉模糊集; 证据理论; 广义 BPA 函数; 广义信任函数; 广义似然函数

中图分类号: TP182 **文献标识码:** A

Method of determining membership and nonmembership function in intuitionistic fuzzy sets

XING Qing-hua, LIU Fu-xian

(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China. Correspondent: XING Qing-hua, E-mail: liuxqh@126.com)

Abstract: The method of determining membership and nonmembership function in intuitionistic fuzzy sets (IFS) is one of the important problems of IFS application. A new evidence theory based method of determining membership and nonmembership function are proposed in this paper. Firstly, the difference and similarity between belief function (plausibility function) and membership function (nonmembership function) is analyzed. Then three new definitions of wide basic probability assignment (BPA) function, wide belief function and wide plausibility function are given. Finally, the models of membership and nonmembership function are built based on new definitions. And simulation experiments show the correctness and effectiveness of the method.

Key words: Intuitionistic fuzzy sets; Evidence theory; Wide BPA function; Wide belief function; Wide plausibility function

1 引言

Atanassov^[1] 系统地提出并定义了直觉模糊集及其一系列运算和定理, 研究了直觉模糊集与 L -模糊集、区间值模糊集相结合, 从而形成 L -直觉模糊集、区间值直觉模糊集等, 提出了直觉模糊逻辑命题及与、或算子等概念, 发展了直觉模糊逻辑. 何颖瑜证明了直觉模糊集是一种特殊的 L -模糊集, 为用 L -模糊集来研究直觉模糊逻辑问题提供了理论依据. 雷英杰等^[2-5] 研究了直觉模糊逻辑语义算子、时态逻辑算子及扩展运算的若干性质, 介绍了直觉模糊在防空作战威胁判断和战场态势评估中的应用. 李登峰等^[6] 研究用直觉模糊集理论来解决多目标多

属性决策问题. 除此之外, 还有其他很多的研究. 然而, 所有这些研究一部分集中于将模糊集、模糊逻辑等一些关键内容扩展到直觉模糊集, 另一部分集中于直觉模糊集的具体应用. 关于直觉模糊集中隶属度函数和非隶属度函数如何确定的问题, 几乎还没有文献进行研究.

隶属度函数和非隶属度函数的确定将直接影响到直觉模糊集的推广应用. 本文基于证据理论研究直觉模糊集隶属度和非隶属度函数的确定问题. 首先分析信任函数、似然函数与隶属度函数、非隶属度函数的互通性; 然后给出广义基本概率分配(BPA)函数、广义信任函数和广义似然函数的定义; 最后在

收稿日期: 2008-01-09; 修回日期: 2008-03-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60773209); 陕西省自然科学基金项目(2006F18).

作者简介: 邢清华(1966—), 女, 山西文水人, 教授, 博士, 从事防空作战智能决策、建模仿真的研究; 刘付显(1962—), 男, 山东曹县人, 教授, 博士, 从事防空作战建模仿真、决策分析的研究.

这3个改进定义的基础上建立直觉模糊集隶属度函数、非隶属度函数模型,并证明了模型的正确性.

2 直觉模糊集的定义

集合论只能描述非此即彼的分明概念,模糊集理论可以描述亦此亦彼的模糊概念.直觉模糊集增加了一个新的属性参数——非隶属度,进而还可描述非此非彼的中立状态,它是对模糊集理论的一种扩充和发展.

定义1(直觉模糊集^[1]) 设 X 是一个给定论域,则 X 上的一个直觉模糊集 A 为

$$A = \{ x, \mu_A(x), \nu_A(x) \mid x \in X \}, \quad (1)$$

其中 $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 和 $\nu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 分别代表 A 的隶属度函数 $\mu_A(x)$ 和非隶属度函数 $\nu_A(x)$, 且对于 A 上的所有 $x \in X, 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ 成立.

直觉模糊集 A 有时可简记为

$$A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle \text{ 或 } A = \langle \mu_A, \nu_A \rangle / x. \quad (2)$$

对于 X 中的每个直觉模糊子集,称 $\mu_A(x) - \nu_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数,它是 x 对 A 的犹豫程度的一种测度.显然,对于每个 $x \in X, 0 \leq \mu_A(x) - \nu_A(x) \leq 1$. 对于 X 中的每个一般模糊子集 A , 有

$$\mu_A(x) - \nu_A(x) = 1 - [\mu_A(x) + \nu_A(x)] = 0, \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

从该定义可以看出,直觉模糊集中的隶属度函数、非隶属度函数及直觉指数,分别表示某对象属于直觉模糊集 A 的支持、反对和中立3种证据,这便有效地扩展了模糊集的代表能力.

3 信任(似然)函数与直觉模糊集隶属度(非隶属度)函数的关系

3.1 基本概率分配(BPA)函数

假设 $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ 为一个不变的两两互斥的完备元素集合,称为环境或称为辨识框架,记 Ω 的幂集为 $P(\Omega)$. 设 $m(x)$ 为定义在 $P(\Omega)$ 上并在 $[0, 1]$ 中取值的实函数,即 $m : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$. 若满足下列条件:1) $m(\Omega) = 1, A \in P(\Omega)$; 2) $m(\emptyset) = 0$; 3) $\sum_{x \in P(\Omega)} m(x) = 1$. 则称 $m(x)$ 为一个基本概率分配函数^[8], 它表示证据支持命题 x 发生的程度. 其中 $m(A)$ 表示对 A 的确认程度或对假设集 A 的信任程度.

3.2 信任函数和似然函数与直觉模糊隶属度函数和非隶属度函数的互通性

为了研究BPA函数与直觉模糊隶属度函数、非隶属度函数之间的关系,先看下列两个概念——信任函数和似然函数.

设 Ω 为辨识框架, 2^Ω 为 Ω 的所有子集表示的命题的集合, x 是 2^Ω 中的一个命题. 如果定义函数 $\text{Bel}(x)$ 为将集合 2^Ω 映射到区间 $[0, 1]$ 上的一个函数,并且满足条件

$$\text{Bel}(x) = \sum_{y \subseteq x} m(y), \quad (4)$$

则称 $\text{Bel}(x)$ 为信任函数,表示证据给予命题 x 的全部支持程度.

如果定义函数 $\text{Pls}(x)$ 是从集合 2^Ω 到区间 $[0, 1]$ 的映射函数,且

$$\text{Pls}(x) = \sum_{y \supseteq x} m(y), \quad (5)$$

则称 $\text{Pls}(x)$ 为似然函数,表示对命题非假的信任程度成立的不确定性度量.

$\text{Bel}(x)$ 表示对 x 为真的信任度, $\text{Bel}(\bar{x})$ 表示对 \bar{x} 的信任度(即 x 为假的信任度), $\text{Pls}(x)$ 表示对 x 为非假的信任度. 因此,似然函数与信任函数有下列关系:

$$\text{Pls}(x) = 1 - \text{Bel}(\bar{x}), \quad (6)$$

表示证据不否认命题 x 的程度.

从上面的定义看出, $\text{Bel}(x)$ 表示证据给予命题 x 的全部支持程度, $\text{Bel}(\bar{x})$ 表示对 \bar{x} 的信任度(即 x 为假的信任度), 而隶属度函数 $\mu_A(x)$ 和非隶属度函数 $\nu_A(x)$ 分别表示某对象 x 属于直觉模糊集 A 的支持、反对这两种证据. 由此可以看出,直觉模糊集的隶属度函数和非隶属度函数与信任函数和似然函数之间存在一定的关系. 为此,本文考虑基于BPA函数、信任函数、似然函数建立直觉模糊集的隶属度函数和非隶属度函数.

4 基于改进D-S函数的直觉模糊集隶属度与非隶属度函数的建立方法

这里,D-S函数指BPA函数、信任函数和似然函数,改进D-S函数实际上是指下面提出的广义BPA函数、广义信任函数和广义似然函数.

4.1 BPA函数、信任函数和似然函数的改进

从前面的分析可以看出,信任函数和似然函数与直觉模糊集隶属度函数和非隶属度函数之间存在一定的关系,但要基于BPA函数来建立隶属度函数和非隶属度函数的模型,还需要对BPA函数进行改进.

例如对于有限集 $\Omega = \{ \text{轰炸机}, \text{侦察机}, \text{战斗机} \}$, 可定义 Ω 上的一个基本概率函数 m , 如表1所示.

从该定义可以看出,BPA函数并没有表示出论域中每个个体对象的概率分配情况,例如目标1,目标2, .. 的具体概率分配情况. 为此,本文对BPA函

表 1 2 上的概率分配函数

x	$m(x)$
	0
{轰炸机}	0.2
{侦察机}	0
{战斗机}	0.1
{轰炸机, 侦察机}	0.3
{轰炸机, 战斗机}	0.2
{侦察机, 战斗机}	0.1
{轰炸机, 侦察机, 战斗机}	0.1

数进行改进, 给出如下广义 BPA 函数的定义:

定义 2(广义 BPA 函数) 设 X 是一个给定的论域, 对于 X 中的每个元素, 其辨识框架为 Ω , Ω 为 Ω 的所有子集表示的命题的集合. 对于 Ω 中的任意一个集合 A , X 上都有一个直觉模糊集 A 与之相对应, 即 $A = \{x, \mu_A(x), \nu_A(x) \mid x \in X\}$, (9) 其中 $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 和 $\nu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 分别代表 A 的隶属度函数 $\mu_A(x)$ 和非隶属度函数 $\nu_A(x)$.

- 1) $x \in X, \forall y \in \Omega, m(x, y) \geq 0$;
- 2) $\forall x \in X, m(x, \emptyset) = 0$;
- 3) $\forall x \in X, \sum_{y \in \Omega} m(x, y) = 1$.

则称 $m(x, y)$ 为一个广义概率分配函数, 它表示对于个体 x , 证据支持命题 y 发生的程度. 其中 $m(x, A)$ 表示对于个体 x , 证据对 A 的确认程度或对假设集 A 的信任程度.

有了改进 BPA 函数的定义, 便可给出改进的信任函数和似然函数的定义.

定义 3(广义信任函数) 设 X 是一个给定论域, 对于 X 中的每个元素, 其辨识框架为 Ω , Ω 为 Ω 的所有子集表示的命题的集合, A 是 Ω 中的一个命题. 如果函数 $BEL(x, A)$ 为定义在 $X \times P(\Omega)$ 上并在 $[0, 1]$ 中取值的实函数, 并且满足条件

$$BEL(x, A) = \sum_{y \in A} m(x, y), \quad (7)$$

则称 $BEL(x, A)$ 为广义信任函数, 它表示对于个体 x , 证据给予命题 A 的全部支持程度.

定义 4(广义似然函数) 设 X 是一个给定论域, 对于 X 中的每个元素, 其辨识框架为 Ω , Ω 为 Ω 的所有子集表示的命题的集合, A 是 Ω 中的一个命题. 如果函数 $PLS(x, A)$ 为定义在 $X \times P(\Omega)$ 上并在 $[0, 1]$ 中取值的实函数, 并且满足条件

$$PLS(x, A) = \sum_{y \in A^c} m(x, y), \quad (8)$$

则称 $PLS(x, A)$ 为广义似然函数, 它表示对于个体 x , 证据给予命题 A 非假的信任程度成立的不确定性度量.

对于个体 x , $BEL(x, y)$ 表示对 y 为真的信任

度, $BEL(x, \bar{y})$ 表示对 \bar{y} 的信任度 (即 y 为假的信任度), $PLS(x, y)$ 表示对 y 为非假的信任度. 因此有下列关系:

$$PLS(x, y) = 1 - BEL(x, \bar{y}),$$

表示证据不否认命题 y 的程度.

4.2 基于改进 D-S 函数建立隶属度函数和非隶属度函数的数学模型

基于改进的 BPA 函数、改进的信任函数、改进的似然函数建立隶属度函数和非隶属度函数模型, 具体方法如下:

设 X 是一个给定的论域, 对于 X 中的每个元素 x , 其辨识框架为 Ω , Ω 为 Ω 的所有子集表示的命题的集合. 对于 Ω 中的任意一个集合 A , X 上都有一个直觉模糊集 A 与之相对应, 即

$$A = \{x, \mu_A(x), \nu_A(x) \mid x \in X\}, \quad (9)$$

其中 $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 和 $\nu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 分别代表 A 的隶属度函数 $\mu_A(x)$ 和非隶属度函数 $\nu_A(x)$.

定义

$$\mu_A(x) = BEL(x, A), \quad (10)$$

$$\nu_A(x) = BEL(x, \bar{A}). \quad (11)$$

其中

$$BEL(x, A) = \sum_{y \in A} m(x, y),$$

$$BEL(x, \bar{A}) = 1 - PLS(x, A) =$$

$$1 - \sum_{y \in A^c} m(x, y). \quad (12)$$

于是, 本文基于广义 BPA 函数、广义信任函数和广义似然函数建立了隶属度函数和非隶属度函数模型. 问题是对于 A 上的所有 $x \in X$, 用这种方法定义的隶属度函数和非隶属度函数是否满足下列条件:

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1. \quad (13)$$

下面证明由式 (10) 和 (11) 定义的隶属度函数和非隶属度函数满足式 (13) 的约束.

证明

$$\mu_A(x) + \nu_A(x) =$$

$$BEL(x, A) + BEL(x, \bar{A}) =$$

$$BEL(x, A) + 1 - PLS(x, A) =$$

$$\sum_{y \in A} m(x, y) + 1 - \sum_{y \in A^c} m(x, y) =$$

$$\sum_{y \in A} m(x, y) + 1 - \left[\sum_{y \in A} m(x, y) + \sum_{A^c} m(x, y) \right] =$$

$$1 - \sum_{A^c} m(x, y).$$

显然有 $0 \leq 1 - \sum_{A^c} m(x, y) \leq 1$, 因此命题得证.

上述证明表明了基于改进 D-S 函数建立的隶属

度函数和非隶属度函数模型的正确性.

5 实验分析

在目标识别中,传感器一般根据其获取的目标参数值综合判断出目标的类型,类型的辨识框架 = { TBM,大型机,小型机,武装直升机,诱饵},判断的依据一般包括目标速度、航线特征、高度等.本文取文献[9]中的9批目标作为实验的输入数据,其参数如表 2 所示.

表 2 空中目标参数

	高度	速度	航线特征	电磁辐射
1	28000	1300	950	0
2	17000	350	325	1
3	23500	500	0	1
4	155	101	0	1
5	24000	250	230	0
6	19600	335	310	1
7	22500	600	0	1
8	29000	1500	850	0
9	130	105	0	1

本文的目的是利用直觉模糊集方法进行目标类型的识别和判决.其步骤如下:

Step1 确定广义概率分配函数.在具体识别中,有的类别与其他类别有明显的不同,有些类别之间又相差较小.在确定概率分配函数时,需要考虑非基元焦元的情况. 的幂集 $P(U)$ 有 32 个元素,这里以基元元素和部分非基元元素组成的集合 \mathcal{A} 作为 $P(U)$ 的子集,建立 \mathcal{A} 上的概率分配函数.假设 $\mathcal{A} = \{ \{TBM\}, \{大型机\}, \{小型机\}, \{直升机\}, \{诱饵\}, \{大型机,小型机\}, \{大型机,诱饵\}, \{小型机,诱饵\}, \{大型机,小型机,诱饵\} \}$.

利用文献[9]给出的模糊聚类方法计算每批目标相对每类的广义概率分配函数值,结果如表 3 所示,表中的 I ~ IX 分别表示 \mathcal{A} 中的 9 类类型.第 VI 类

~ 第 IX 类的基准值参见文献[7].

Step2 确定直觉模糊集隶属函数和非隶属函数.由这些广义概率分配函数值确定各目标相对于各类的直觉模糊集合为

$$A_I = \{ 1, 0.465, 0.535, 2, 0.034, 0.966, 3, 0.031, 0.969, 4, 0.036, 0.964, 5, 0.038, 0.962, 6, 0.030, 0.970, 7, 0.036, 0.964, 8, 0.641, 0.359, 9, 0.036, 0.964 \},$$

$$A_{II} = \{ 1, 0.065, 0.727, 2, 0.165, 0.465, 3, 0.092, 0.530, 4, 0.084, 0.667, 5, 0.067, 0.610, 6, 0.176, 0.445, 7, 0.093, 0.524, 8, 0.043, 0.817, 9, 0.084, 0.667 \},$$

$$A_{III} = \{ 1, 0.067, 0.726, 2, 0.159, 0.480, 3, 0.241, 0.362, 4, 0.087, 0.664, 5, 0.066, 0.616, 6, 0.169, 0.462, 7, 0.225, 0.374, 8, 0.046, 0.814, 9, 0.087, 0.664 \},$$

$$A_{IV} = \{ 1, 0.052, 0.948, 2, 0.098, 0.902, 3, 0.065, 0.935, 4, 0.392, 0.608, 5, 0.053, 0.947, 6, 0.080, 0.920, 7, 0.070, 0.930, 8, 0.035, 0.965, 9, 0.392, 0.608 \},$$

$$A_V = \{ 1, 0.076, 0.719, 2, 0.063, 0.631, 3, 0.055, 0.601, 4, 0.064, 0.684, 5, 0.346, 0.290, 6, 0.058, 0.645, 7, 0.059, 0.598, 8, 0.049, 0.812, 9, 0.064, 0.684 \}.$$

Step3 依据直觉模糊集作出目标类型的判决.为了验证该方法的正确性,利用该隶属函数和非隶属函数进行最后判决.利用常用的记分函数

表 3 广义概率分配函数值

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	0.465	0.065	0.067	0.052	0.076	0.070	0.068	0.067	0.069
2	0.034	0.165	0.159	0.098	0.063	0.175	0.120	0.111	0.076
3	0.031	0.092	0.241	0.065	0.055	0.171	0.118	0.137	0.090
4	0.036	0.084	0.087	0.392	0.064	0.085	0.088	0.088	0.076
5	0.038	0.067	0.066	0.053	0.346	0.066	0.113	0.107	0.143
6	0.030	0.176	0.169	0.080	0.058	0.190	0.119	0.108	0.070
7	0.036	0.093	0.225	0.070	0.059	0.173	0.115	0.133	0.095
8	0.641	0.043	0.046	0.035	0.049	0.047	0.046	0.046	0.047
9	0.036	0.084	0.087	0.392	0.064	0.085	0.088	0.088	0.076

$$s(x) = \mu_A(x) + \frac{1 + \mu_A(x) - \nu_A(x)}{2} \nu_A(x),$$

得到每个目标相对于每类的判决值如表 4 所示.

表 4 目标类型的判决值

	I	II	III	IV	V
1	0.465	0.100	0.102	0.052	0.112
2	0.034	0.294	0.282	0.098	0.129
3	0.031	0.198	0.416	0.065	0.133
4	0.036	0.136	0.140	0.392	0.112
5	0.038	0.140	0.138	0.053	0.538
6	0.030	0.315	0.299	0.080	0.119
7	0.036	0.202	0.396	0.070	0.138
8	0.641	0.059	0.062	0.035	0.066
9	0.036	0.136	0.140	0.392	0.112

由直觉模糊集得出目标的最终识别结果为: TBM,大型机,小型机,武装直升机,诱饵,大型机,小型机,TBM,武装直升机.该结果与用其他方法的识别结果一致.

6 结 论

证据理论的 BPA 函数、信任函数、似然函数与隶属度函数、非隶属度函数的含义之间存在某种相似性.本文对这 3 个概念进行改进,给出了广义基本概率分配(BPA)函数、广义信任函数和广义似然函数的定义;进而在这 3 个改进定义的基础上,建立了直觉模糊集隶属度函数和非隶属度函数模型,并证明了模型的正确性.这样,通过某些方法(如文献[7]给出的 BPA 函数确定方法)获得广义 BPA 函数之后,便可求得广义信任函数和广义似然函数,进而建立直觉模糊集隶属度函数和非隶属度函数模型.这一研究是直觉模糊集能得到广泛应用的必由之路,它将为直觉模糊集的研究带来新的机遇.

参考文献(References)

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1) : 87-96.
 [2] 雷英杰, 王宝树. 直觉模糊逻辑的语义算子研究[J]. 计算机科学, 2004, 31 (11) : 4-6.

(Lei Y J, Wang B S. On the semantic operators for intuitionistic fuzzy logic [J]. Computer Science, 2004, 31(11) : 4-6.)
 [3] 雷英杰, 王宝树, 苗启广. 直觉模糊关系及其合成运算 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(2) : 113-118.
 (Lei Y J, Wang B S, Miao Q G. On the intuitionistic fuzzy relations with compositional operations [J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2005, 25 (2) : 113-118.)
 [4] Lei Y J, Wang B S. Study on the control course of ANFIS based aircraft auto-landing [J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2005, 16(3) : 583-587.
 [5] 雷英杰. 基于直觉模糊推理的态势与威胁评估研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2005.
 (Lei Y J. Research on situation and threat assessment based on intuitionistic fuzzy reasoning [D]. Xi 'an: Xidian University, 2005.)
 [6] Li Deng-Feng. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets [J]. J of Computer and System Sciences, 2005, 70(1) : 73-85.
 [7] 邢清华. 多传感器信息智能融合方法研究 [D]. 西安: 空军工程大学, 2007.
 (Xing Q H. Study on itelligent fusion method of multi sensor information [D]. Xi 'an: Air Force Engineering University, 2007.)
 [8] 邢清华, 雷英杰, 刘付显. 一种新的按比例分配冲突度的证据推理组合规则 [J]. 控制与决策, 2004, 19(12) : 1387-1390.
 (Xing Q H, Lei J, Liu X. One combination rule of evidence theory based on distributing conflict in proportion [J]. Control and Decision, 2004, 19 (12) : 1387-1390.)
 [9] 邢清华, 刘付显. 空袭目标类型的模糊识别与聚类研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(6) : 139-143.
 (Xing Q H, Liu F X. Study on the fuzzy recognition and cluster of air attack target character [J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2004, 24 (6) : 139-143.)