

文章编号: 1001-0920(2009)03-0413-04

离散时间系统的多智能体的一致性

杨洪勇¹, 张嗣瀛²

(1. 鲁东大学 计算机科学与技术学院, 山东 烟台 264025; 2. 青岛大学 复杂性科学研究所, 山东 青岛 266071)

摘要: 动态多智能体系统的一致性是复杂动力学系统中很有现实意义的问题. 假设智能体连接网络拓扑是无向、固定和连通的, 而且个体之间信息传递存在通信时延, 分析了一个动态移动多智能体离散时间系统. 应用广义 Nyquist 判据研究具有通信时延的多智能体离散时间系统, 得到了保证系统达到一致的充分条件. 最后应用计算机仿真验证了该结论的有效性.

关键词: 多智能体系统; 一致性; 离散时间; 通信时延

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A

Consensus of multi-agent system with discrete-time

YANG Hong-yong¹, ZHANG Si-yin²

(1. School of Computer Science and Technology, Ludong University, Yantai 264025, China; 2. Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071, China. Correspondent: YANG Hong-yong, E-mail: hyyang@yeah.net)

Abstract: Consensus of mobile multi-agent system is a problem with practical significance in the complex dynamics system. Under the hypothesis for the connected network topology with fixed and undirected links, a dynamical mobile-agent discrete-time system with the communication delays is analyzed. By applying generalized Nyquist criterion, the multi-agent delayed system with discrete-time is studied. And a sufficient condition is obtained to ensure the consensus of the multi-agent system. Finally, computer simulations show the effectiveness of the conclusion.

Key words: Multi-agent system; Consensus; Discrete-time; Communication delay

1 引言

近几年来, 随着计算机技术、网络技术和通信技术的迅速发展, 人们对基于网络的多智能体系统交互和协调控制的研究越来越多. 多智能体系统在无人驾驶飞行器的编队控制、分布式传感器网络、卫星的姿态控制、通讯网络的拥塞控制等领域的广泛应用, 推动着多智能体系统建模与分析的研究逐步深入.

移动多智能体系统的一致性问题是在复杂动力学系统中很有理论价值和现实意义的问题. 近年来, 由于多智能体系统的广泛应用以及协调合作控制问题的深入研究, 一致性问题的研究发展迅速, 无论在理论上还是应用上都取得了丰硕的成果. 基于 Reynolds 等提出的模仿动物集结的计算机模型^[1], Vicsek 等^[2]从统计力学的角度提出一个非平衡多

智能体系统模型, 仿真发现系统所有个体在一定条件下可按相同方向飞行. Jadbabaie 等^[3]对 Vicsek 模型线性化, 从理论上研究了该模型的角度一致性问题. Savkin^[4]考虑了相同的线性化模型, 采用最近邻规则, 指出邻居图的无穷次连通可保证系统的同步. 刘志新等^[5]研究了原始 Vicsek 模型, 给出一个根据系统参数保证 Vicsek 模型同步的充分条件. Moreau^[6]和 Ren 等^[7]将文献[3]的结果推广到有向网络, 得到了类似的收敛性结果. Lin 等^[8]采用循环追逐策略, 使多智能体收敛到其质心. Xiao 等^[9]提出一种分布式快速线性迭代算法, 解决多智能体平均一致性问题, 用内点算法解决快速分布式线性迭代问题. Olfati 等^[10]研究了具有切换拓扑的有向网络及具有固定拓扑的无向时滞网络的平均一致性问题. Fax 等^[11]基于合作构架, 应用图论和矩阵理论

收稿日期: 2008-01-21; 修回日期: 2008-04-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60774016, 60875039); 山东省教育厅科研基金项目(J08LJ01).

作者简介: 杨洪勇(1967—), 男, 山东庆云人, 教授, 博士后, 从事网络拥塞控制、复杂网络控制等研究; 张嗣瀛(1925—), 男, 山东章丘人, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士, 从事复杂系统的相似结构、微分对策等研究.

解决了基于位置协调控制的一致性问题。目前,一致性问题已广泛应用于传感器网络、飞行器高度调整、编队控制、个体汇聚等领域^[12-18]。

本文基于 Olfati 等提出的离散时间多智能体协作系统^[17],在个体之间存在通信时延的情况下,研究系统达到一致的条件。Olfati 等的研究表明^[10],对于无向固定网络拓扑结构的多智能体系统,如果所有时延均相等并且存在一个与系统 Laplacian 矩阵的最大特征根有关的上界,则所有智能体最终能达到一致。与文献[10]不同,本文应用多变量广义频率 Nyquist 判据,研究具有通信时延的离散时间移动多智能体系统的一致性问题,推出一个保证系统稳定的时延上界。最后应用计算机仿真验证了该结论的有效性。

2 问题描述

令 $G = \{V, E, A\}$ 表示一个有向加权图。其中: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示具有 n 个节点的集合,它的边集合 $E \subseteq V \times V$ 。节点的下标集合 $I = \{1, 2, \dots, n\}$,邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$,其中矩阵元素 $a_{ij} \geq 0$ 表示节点 i 到节点 j 的连接权重。如果节点 i 可得到节点 j 的信息,则 $a_{ij} > 0$;否则, $a_{ij} = 0$ 。

定义节点 i 的邻居集合 $N_i = \{j \mid a_{ij} > 0\}$,矩阵 $D = \text{diag}\{d_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 为矩阵 A 的第 i 行元素的和(称为节点 i 的出度),则矩阵 $L = D - A$ 为图 G 的 Laplace 矩阵。对于任意的两个节点 i 和 j ,当 $a_{ij} = a_{ji}$ 时,称图 G 为无向图。对于两个节点 i 和 j ,若存在下标集合 $\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$,满足 $a_{ik_1} > 0, a_{k_1 k_2} > 0, \dots, a_{k_l j} > 0$,则称节点 i 到节点 j 之间存在一条有向连接路径。对于图中任意两个节点 i 和 j ,若存在至少一条有向连接路径,则称图 G 是强连通的。在强连通图中,若 G 的各个节点的入度等于出度,则称图 G 是平衡的。

文献[17]讨论了移动多智能体系统的离散时间一致算法

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]. \quad (1)$$

假设图 G 是强连通平衡的,且 $(0, 1/\lambda)$ 为网络节点的最大连接度,则该算法可取得平均渐近一致。即对于所有的 $i, x_i(t) \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$ 。

在实际通信系统中,由于通信线路和通信设备等原因,移动多智能体之间信息交换存在通信时延。本文讨论在离散时间一致算法(1)中加入通信时延后,如下时延系统的一致性问题:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t - \tau_{ij})]. \quad (2)$$

其中 τ_{ij} 为信息从节点 i 传到节点 j 所需的时间,这里假设 $\tau_{ij} = \tau$,即所有传输信道的时延相同。则系统变为

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)]. \quad (3)$$

系统达到一致,即系统达到平衡时,有 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$,满足

$$x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^*. \quad (4)$$

3 移动多智能体时延系统的一致性

本节讨论移动多智能体时延系统(3)的一致性。假设网络拓扑结构为无向连通图,令

$$u_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)],$$

可得 $\sum_{i=1}^n u_i(t) = 0$ 。令

$$\bar{x}(t) = \text{Ave}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

计算可得

$$\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i(t) = 0.$$

所以 $\bar{x}(t)$ 是一个不变量。这样便得到系统(3)全局一致渐近收敛于 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$,其中 $x_i^* = \bar{x}(0)$ 。

根据前面推导的一致性结论,下面计算保证时延系统(3)稳定的条件。令 $\hat{x}_i(t) = x_i(t) - x_i^*$,代入式(3),得

$$\hat{x}_i(t+1) = \hat{x}_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [\hat{x}_j(t - \tau) - \hat{x}_i(t - \tau)].$$

对上式作 Z 变换,令 $X_i(z) = Z\{\hat{x}_i(t)\}$,假设 $X_i(0) = 0$,可得

$$zX_i(z) = X_i(z) + z^{-\tau} \sum_{j \in N_i} a_{ij} [X_j(z) - X_i(z)]. \quad (5)$$

整理得

$$X_i(z) = \frac{z^{-\tau}}{z - 1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} [X_j(z) - X_i(z)]. \quad (6)$$

令 $X(z) = (X_1(z), X_2(z), \dots, X_n(z))^T$,则闭环系统(6)的特征方程为

$$\det[I + \text{diag}\left(\frac{z^{-\tau}}{z - 1}\right) L] = 0. \quad (7)$$

离散系统(3)渐近稳定的充要条件是特征方程(7)的特征根的模都小于1。令 $z = e^s$,则特征方程变为

$$\det(I + G(s)) = 0, \quad (8)$$

其中

$$G(s) = \text{diag}\left(\frac{e^{-s}}{e^s - 1}\right) L. \quad (9)$$

于是,特征方程(7)的特征根的模都小于1,等价于方程(8)的特征根都有负实部.

定理 1 考虑具有相同通信时延的移动多智能体一致系统(3),假设网络拓扑 G 是固定无向的连通图, $(0, 1/\lambda_2)$, 如果

$$(L) < 2\sin \frac{\pi}{2(2 + \lambda_2)},$$

则系统全局一致.

证明 由式(9)得到系统的开环传递函数在复平面的右半开平面没有极点. 令 $s = j\omega$, 代入式(9), 得到

$$G(j\omega) = \text{diag}\left(\frac{e^{-j\omega}}{e^{j\omega} - 1}\right) L. \quad (10)$$

特征方程(8)的所有特征根都有负实部, 当且仅当对于所有的 $\omega \in [0, +\infty)$, $G(j\omega)$ 的特征值 $(G(j\omega))$ 的轨迹不包含复平面的 $-1 + j0$ 点.

$$\text{令 } E(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{e^{j\omega} - 1}, \text{ 整理得到}$$

$$E(j\omega) = e^{-j\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi + \omega}{2}\right)} / (2\sin(\omega/2)). \quad (11)$$

可知函数 $E(j\omega)$ 的 Nyquist 曲线首次与复平面的负实轴相交于 $-1/M + j0$ 点, 其中

$$M = 2\sin \frac{\pi}{2(2 + \lambda_2)}.$$

$G(j\omega)$ 可变为

$$G(j\omega) = ME(j\omega) M^{-1/2} L M^{-1/2}. \quad (12)$$

由于

$$(M^{-1/2} L M^{-1/2}) = \frac{1}{M} (L) < 1, \quad (13)$$

设 λ 为矩阵 $G(j\omega)$ 的特征值, 则存在 v , 满足 $\|v\|_2 = 1$, 使得 $G(j\omega)v = \lambda v$. 因此

$$\begin{aligned} &= v^H G(j\omega) v = \\ &= v^H (ME(j\omega) M^{-1/2} L M^{-1/2}) v = \\ &= ME(j\omega) v^H M^{-1/2} L M^{-1/2} v. \end{aligned} \quad (14)$$

令 $u = L^{-1/2} M^{-1/2} v$, 显然 $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, 满足 $\|u\|_2 = 1$. 代入式(14), 得到

$$\begin{aligned} &= u^H \text{diag}(ME(j\omega)) u = \\ &= \sum_{i=1}^n |u_i|^2 ME(j\omega). \end{aligned}$$

所以

$$\text{Co}(0 \in \{ME(j\omega)\}). \quad (15)$$

函数 $ME(j\omega)$ 的 Nyquist 曲线交复平面的负实轴于 $-1 + j0$ 点, 并由式(13)可得谱半径 < 1 , 因此函数 $ME(j\omega)$ 的 Nyquist 曲线交复平面的负实轴于 $-1 + j0$ 点的右边, 即函数 $ME(j\omega)$ 的 Nyquist 曲线

不包含 $-1 + j0$ 点. 根据广义 Nyquist 判据, 可知系统是渐近稳定的. 因为系统所有节点的状态变化矩阵 $ME(j\omega)$ 是一致的, 所以系统是稳定的.

4 计算机仿真

本文采用的网络拓扑如图 1 所示, 该网络是一个无向图. 假设个体之间连接权值为 1, 互连个体之间通信时延为 τ , 令 $\lambda_2 = \frac{1}{\max(l_{ii}) + 1}$. 计算得到 $(L) = 5.9$, 根据定理 1 可得 $\lambda_2 = 5.9565$.

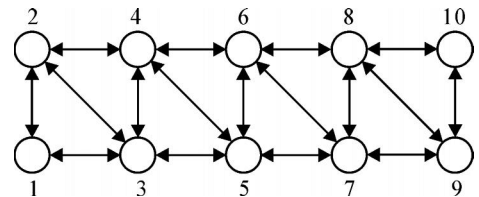


图 1 网络拓扑结构

假设各个智能体状态是一维的, 分别取值为 1, 2, ..., 10, 个体之间没有通信时延 ($\tau = 0$). 仿真结果如图 2 所示, 可见系统状态快速达到一致.

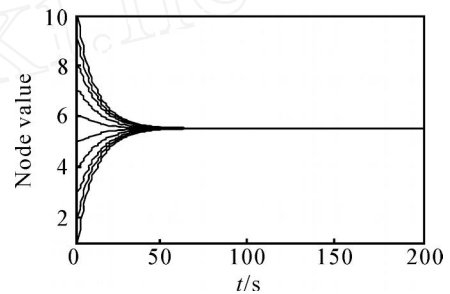


图 2 通信时延 $\tau = 0$ 时系统状态时刻图

假设系统中考虑通信时延的影响, 当通信时延 $\tau = 8$ 时, 系统状态时刻图如图 3 所示, 显然系统没

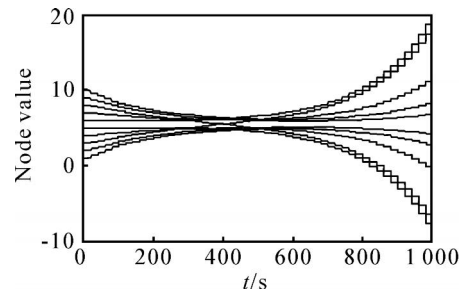


图 3 通信时延 $\tau = 8$ 时系统状态时刻图

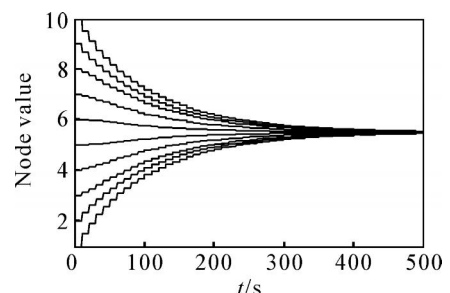


图 4 通信时延 $\tau = 4$ 时系统状态时刻图

有达到一致.

为了验证本文定理的正确性,令时延 $\tau = 4 < \tau_{\max}$, 满足定理 1 的条件. 仿真结果时刻图如图 4 所示,可见系统状态能够达到一致.

5 结 论

本文研究移动多智能体系统的一致性行为. 假设系统拓扑是不变、无向和连通的,系统个体之间信息传输具有通信时延. 应用广义 Nyquist 判据研究具有通信时延的离散时间多智能体系统达到一致的充分条件. 该条件给出了保证系统状态一致的通信时延和网络拓扑 Laplace 矩阵的谱半径之间的约束关系. 最后应用计算机仿真验证了该结论的有效性.

参考文献(References)

- [1] Reynolds C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model [J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 25-34.
- [2] Vicsek T, Czirok A, Ben Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [3] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [4] Savkin A V. Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: Analysis of Vicsek's model [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 981-983.
- [5] 刘志新, 郭雷. Vicsek 模型的连通与同步[J]. 中国科学 (E 辑), 2007, 37(8): 979-988.
(Liu Z X, Guo L. Connection and synchronization of Vicsek model[J]. Science in China (Series E), 2007, 37(8): 979-988.)
- [6] Moreau L. Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(2): 169-182.
- [7] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [8] Lin Z, Broucke M, Francis B. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(4): 622-629.
- [9] Xiao L, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging[J]. Systems and Control Letters, 2004, 53(1): 65-78.
- [10] Olfati Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [11] Fax J A, Murray R. Information flow and cooperative control of vehicle formation [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [12] Lawton J R, Beard R W. Synchronized multiple spacecraft rotations [J]. Automatica, 2002, 38(8): 1359-1364.
- [13] Lin Z, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(1): 121-127.
- [14] Caughman J S, Lafferriere G, Veerman J, et al. Decentralized control of vehicle formations[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(9): 899-910.
- [15] Ren W, Randal W Beard, Ella Atkins. Information consensus in multi-vehicle cooperative control: Collective group behavior through local interaction[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [16] Dimarogonas D V, Loizou S G, Kyriakopoulos K J, et al. A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents[J]. Automatica, 2006, 42(2): 229-243.
- [17] Olfati Saber R, Fax J A, Murray R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [18] 俞辉, 蹇继贵, 王永骥. 多智能体时滞网络的加权平均一致性[J]. 控制与决策, 2007, 22(5): 558-561.
(Yu H, Jian J G, Wang Y J. Weighted average-consensus for networks of multi-agent with time delays [J]. Control and Decision, 2007, 22(5): 558-561.)