

文章编号: 1001-0920(2009)03-0451-04

三能级原子系统中量子态相干保持的控制策略

李明, 陈宗海

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027)

摘要: 研究光与物质的相互作用并利用其性质设计新型的量子器件, 以实现光信息存储及其消相干抑制. 分析了以单色激光场为控制场的 Λ 型三能级原子系统的主方程模型, 借助于无消相干子空间的构造方法, 通过改变耦合激光场 Rabi 频率的方式, 设计了实现系统中量子态相干保持的控制策略.

关键词: 三能级原子系统; 量子调控; 相干保持; 相干控制; 无消相干子空间

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Coherence-preserving control strategy in three-level atom system

LI Ming, CHEN Zong-hai

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China. Correspondent: CHEN Zong-hai, E-mail: chenzh@ustc.edu.cn)

Abstract: The interpretation to the mechanism of interaction of light and matter is used in new quantum devices designing for the optical information storage. For reducing the unexpected decoherence effect in a Λ -typed three-level atom system, the master equation of an atomic system is investigated to find a set of states that have zero spontaneous decay rates. Two laser fields are introduced to prepare the decoherence-free state by using decoherence-free subspace (DFS) strategy to suppress spontaneous emission for the decoupling of the system's state and the environment. Theoretical analysis verifies its effectiveness to coherence-preserving.

Key words: Three-level atom system; Manipulation of quantum system; Coherence-preserving; Coherent control; Decoherence-free subspace

1 引言

光量子信息处理是目前国际上的前沿热点课题. 由于三能级原子系统在量子信息的产生、存储、传输和处理等方面的优越性, 使其越来越受到关注. 但在用其执行量子计算的过程中, 系统自发辐射及与环境相耦合而产生的消相干作用, 成为量子信息载体实用化和器件化的瓶颈问题. 因此, 研究光量子信息处理中的消相干效应并实现其相干保持, 具有潜在的科学价值和应用价值.

处理量子消相干问题的方案可分成两类: 一类是通过量子编码的方式纠正消相干引起的错误, 以正确执行量子计算. 这类方法主要有基于经典纠错编码思想的量子纠错码^[1], 基于系统动力学特性的量子避错码^[2], 基于量子 Zeno 效应的量子防错码^[3]等. 另一类是通过主动控制的方式实现消相干抑制, 主要有 BangBang 控制法^[4]、最优控制法^[5]、相干控

制法^[6]、量子反馈控制法^[7]等.

作为量子避错码中的一种, 无消相干子空间 (DFS) 能根据消相干效应的动力学特点, 在多个量子比特中寻找若干与环境解耦的量子比特, 满足这一条件的态不受消相干过程的影响, 其演化过程仍是么正的. 此时将量子信息编码到这些量子比特中, 便可实现容错的量子计算. 该方法由段路明等^[2]提出, 其后一些学者在 Zanardi 等给出的 DFS 的数学定义和存在性定理^[8]的基础上, 深入研究了 DFS 及基于 DFS 的编码特性^[9,10]. DFS 的适用范围不断推广, 使之不仅适用于量子存储器的状态保持, 而且可用于实施量子计算和量子通信^[11].

本文的主要工作是: 在探讨三能级原子系统的物理模型的基础上, 引入外界单色激光场, 通过分析该耦合系统的主方程模型, 利用无消相干子空间的方法, 通过改变外界激光场 Rabi 频率的方式, 推导

收稿日期: 2008-01-16; 修回日期: 2008-03-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60804020); 中国科学技术大学研究生创新基金项目(KD2006040).

作者简介: 李明(1980—), 男, 江西九江人, 博士生, 从事量子计算、量子调控的研究; 陈宗海(1963—), 男, 安徽桐城人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模、智能系统等研究.

出一种制备系统无消相干态的方法.

2 三能级原子系统的物理模型

考虑图 1 所示的型三能级原子系统,其最高能量激发态为 $|2\rangle$,两个低能量态分别为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, ω_0 , ω_1 和 ω_2 分别是原子在各能级上的本征频率,原子共振跃迁频率为 $\omega_{20} = \omega_2 - \omega_0$, $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$.

假设低能态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 与激发态 $|2\rangle$ 之间可以相互跃迁,偶极矩分别为 μ_{20} 和 μ_{21} . γ_1 和 γ_2 为激发态 $|2\rangle$ 向低能态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的自发辐射速率.能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间是禁跃迁的,即偶极禁戒.

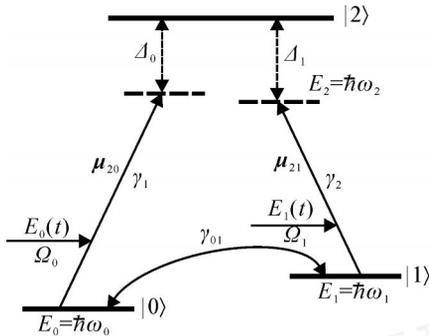


图 1 型三能级原子系统

设 γ_{ij} 是能级间的横向弛豫衰变速率,表征能级跃迁 $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ 和 $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 间的交叉耦合所导致的自发辐射相干.引入参数 θ ,表征 μ_{20} 与 μ_{21} 之间夹角 α 的余弦,有如下关系^[12]:

$$\cos \theta = \mu_{20} \mu_{21} / \sqrt{(\mu_{20}^2 + \mu_{21}^2) \mu_{20} \mu_{21}} = \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{\mu_{20} \mu_{21}}{3} \sqrt{\frac{3}{\mu_{20}^2 + \mu_{21}^2}} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}. \quad (2)$$

3 控制策略设计

考虑通过激光场的作用,分两步构造系统的无消相干态:(1)确定系统的主方程模型、控制场的作用方式和控制参数,得出系统的消相干表达;(2)通过无消相干子空间的判定条件,得出控制参数.

该方案的可行性主要体现在:三能级原子和光场的相干作用需要处理量子信息,在无外场作用时,系统由激发态到基态的自发辐射通道之间会形成交叉耦合,产生真空场感应相干效应,使寄存在三能级原子上的信息不断衰减,最终变成一个等概率分布的随机混态而失去应用价值.利用无消相干子空间的方法,可构造消相干效应的动力学方程,使系统两个基态能级的布居数随时间的演变规律不变.此时,两个基态能级的布居数只能存储驱动场强度的信息,可近似看作两个独立的二能级原子的自发发射,并稳定地用于量子的计算.因此又形象地称为系统 Hilbert 空间上一个“安静的角落”.结合主方程模型,在严格量化三能级原子系统同时存在辐射和吸收时消相干成分的基础上,可通过 Born-Markovian

近似和旋波近似,设计控制律用以相互作用的解耦,进而消除消相干效应,达到纠错的目的.

3.1 引入控制场后系统的主方程模型

考虑调节耦合激光场的 Rabi 频率,用于弱化交叉耦合所导致的系统消相干.在系统中引入频率为 ν_c 的光作用于能级 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 的共振跃迁线上,其 Rabi 频率为 Ω_0 ;引入频率为 ν_p 的光作用于能级 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 的共振跃迁线上,其 Rabi 频率为 Ω_1 .设 E_c 和 E_p 分别表示光场的场强,两个激光场的载波频率和相应的跃迁频率之间的单光子失谐量为 $\delta_i = \nu_p - \omega_{2i}$, $i = 0, 1$ (参见图 1)^[13].

耦合于三能级原子系统,外加光场的 Rabi 频率将随 δ_i 而变化,有

$$\Omega_i = \Omega_{i0} \sqrt{1 - \delta_i^2 / \Omega_{i0}^2} = \Omega_{i0} \sin \theta_i, \quad i = 0, 1. \quad (3)$$

其中 Ω_{i0} 和 Ω_{i1} 表示没有自发辐射相干效应时场的 Rabi 频率.光场 Rabi 频率与电偶极矩和场强的关系如下:

$$\Omega_{i0} = 2\mu_{02} E_c / \hbar, \quad \Omega_{i1} = 2\mu_{12} E_p / \hbar. \quad (4)$$

当引入相干激光场后,真空场感应相干效应将被微波场感应相干效应取代.假设偶极矩之间互相垂直,即 $\alpha = 90^\circ$,则由式(1)和(2)可得

$$\sin \theta = \cos \theta = 0. \quad (5)$$

决定系统演化的哈密顿量和约化密度算符 ρ 所遵从的主方程,在相互作用绘景中表示为^[14,15]

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[L, \rho] + \mathcal{L}(\rho), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}(\rho) = -\frac{i}{\hbar} [H_s, \rho] + L(\rho), \quad (7)$$

$$L(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij} (2S_j^{\dagger} \rho S_i - S_i^{\dagger} S_j \rho - \rho S_i^{\dagger} S_j). \quad (8)$$

其中: $A_{ij} = \langle i | j \rangle$; H.c. 表示前面表达式的厄米共轭; S_i^{\dagger} 为跃迁算符,下标 i 表示系统允许的跃迁, $S_i^{\dagger} = A_{mm}$, $S_i = A_{mm}^{\dagger}$.

3.2 无消相干子空间的描述

在外场作用下,三能级原子系统的主方程模型可用一般的 Lindblad 表述如下^[14]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_s, \rho] + L(\rho),$$

其中

$$L(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij} (2F_i(\rho) F_j^{\dagger} - F_j^{\dagger} F_i(\rho) - (\rho) F_j^{\dagger} F_i). \quad (9)$$

式(9)与式(8)类似, $L(\rho)$ 中包含了所有产生消相干的因素.其中: γ_{ij} 是非负的常数, F_j 为系统算符.

为了得到其无消相干子空间,引入由无消相干子空间的定义得到的 DFS 的一个充要条件:

引理 1^[16] 为 H_s 的非空线性子空间,当且仅当是所有 Kraus 算子 $\{F_j\}$ 的公共本征空间,即对于任意 $|\phi\rangle$, 均满足 $F_j|\phi\rangle = \lambda_j|\phi\rangle$, 其中 λ_j 与 $|\phi\rangle$ 无关. 则 \mathcal{K} 构成 H_s 上的无消相干子空间.

下面探讨如何利用该引理分析三能级原子的消相干项, 并实现系统的相干保持.

首先假设子空间 \mathcal{K} 有如下状态展开:

$$\{|\phi_j\rangle, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (10)$$

则定义在子空间 \mathcal{K} 中的约化密度算符可表示为

$$\rho = \sum_{j=1}^n p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \quad (11)$$

然后定义算符子空间 S 和该子空间中的算符基, 设子空间 S 中的任意元素由如下算符基展开:

$$\{L_j, j = 1, 2, \dots, n\}$$

由引理 1 易知, 若子空间 \mathcal{K} 满足下述两个条件:

$$H_s|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle, \quad (12)$$

$$L_j|\phi\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

则 \mathcal{K} 为一消相干子空间. 式(12) 可保证空间完备性, 式(13) 则保证在算符基的作用下系统演化为什么. 式(12) 和(13) 即为无消相干子空间的判定方法.

3.3 控制律的获得

通过无消相干子空间的两个判定条件的推导来获得控制律^[16,17]. 考虑满足式(10) 的子空间 \mathcal{K} , 假设子空间 \mathcal{K} 中的状态满足如下关系:

$$F_j|\phi\rangle = \lambda_j|\phi\rangle, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (14)$$

其中 F_j 如式(9) 所示, $|\phi\rangle$ 为所有算符 F_j 的简并本征态. 简并即为其本征值 λ_j 并不依赖于下标 j , 任取 j 后 $|\phi\rangle$ 均满足上式.

定义在子空间 \mathcal{K} 中的约化密度算符均满足式(11), 故将式(11) 和(14) 代入式(9), 得

$$\phi^\dagger L \left[\sum_{j=1}^n p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \right] \phi = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{K}. \quad (15)$$

由式(15) 很容易推出式(13), 因此得出结论: 假如子空间 \mathcal{K} 中的元素满足式(14), 则子空间 \mathcal{K} 满足无消相干子空间的判定条件(13).

进而考虑无消相干子空间的判定条件(12), 推导得出无消相干子空间中态的表达式. 在此假设态之间跃迁的偶极矩矢量为互相垂直的, 即式(1) 中 $\theta = 90^\circ$. 根据式(3) 和(8), 外加光场与三能级原子系统相互作用的 Rabi 频率将保持恒定, 为 $\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$.

由式(8) 和(5) 得出系统的消相干项

$$L = \frac{1}{2} (\Omega_2 (2A_{02} A_{20} - A_{20} A_{02} - A_{20} A_{02}) +$$

$$\frac{1}{2} \Omega_1 (2A_{12} A_{21} - A_{21} A_{12} - A_{21} A_{12})). \quad (16)$$

考虑到偶极禁戒假设, 由式(9) 和(16) 可得到 F_j 算子的表达式

$$F_1 = A_{02}, \quad F_2 = A_{12}. \quad (17)$$

根据无消相干子空间的判定条件, 需要寻找独立于参数的特征值 λ_j 满足式(14) 的解. 为此对式(14) 两边取共轭再结合式(14), 得

$$\phi^\dagger F_j^\dagger F_j \phi = \phi^\dagger F_j F_j \phi, \quad (18)$$

即

$$\phi^\dagger (F_j^\dagger F_j - F_j F_j) \phi = 0. \quad (19)$$

满足式(19) 的解为 $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_2 = 0$, 抑或二者都为 0. 不失一般性, 不妨假设 $\lambda_1 = 0$. 根据 $F_j|\phi\rangle = \lambda_j|\phi\rangle$, 得 $F_1|\phi\rangle = 0$, 即

$$A_{02}|\phi\rangle = 0. \quad (20)$$

将 $|\phi\rangle$ 用 \mathcal{K} 中的基展开, 由于系统包含三能级, 令

$$|\phi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle, \quad c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

代入式(20) 可得

$$A_{02}(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle) = 0. \quad (21)$$

因为 $A_{02} = \Omega_0|0\rangle\langle 2|$, 所以 $c_2 = 0$. 于是子空间 \mathcal{K} 中的态可表示为 $|\phi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$. 根据 $F_2 = A_{12} = \Omega_1|1\rangle\langle 2|$, 得 $F_2|\phi\rangle = 0$. 又据 $F_2|\phi\rangle = \lambda_2|\phi\rangle$, 则有 $\lambda_2|\phi\rangle = 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{K}$. 由此易知 $\lambda_2 = 0$, 故有 $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$.

子空间 \mathcal{K} 将有两个低能级态线性展开, 即满足条件(13) 的子空间退化为 $\mathcal{Z} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$. 若满足无消相干子空间的判定条件(12), 则必须满足: 如果 $|\phi\rangle$ 属于子空间 \mathcal{Z} , 则 $H|\phi\rangle$ 也属于子空间 \mathcal{Z} , 即 $H|\phi\rangle$ 中不得包含高能态 $|2\rangle$, 仅由 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 线性展开. 此条件可写成

$$A_{02} H |\phi\rangle = 0. \quad (22)$$

由式(20) 知 $A_{02}|\phi\rangle = 0$, 则式(22) 可改写成

$$(A_{02} H - H A_{02}) |\phi\rangle = 0. \quad (23)$$

由式(6) 易得

$$(A_{02} H - H A_{02}) / \hbar = \Omega_0 A_{02} + \frac{1}{2} (\Omega_0 A_{00} + \Omega_1 A_{01} - \Omega_0 A_{22}). \quad (24)$$

将式(24) 作用于 $|\phi\rangle$, 得

$$\Omega_0 (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = 0.$$

于是确定波函数 $|\phi\rangle$ 的表达式为

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle). \quad (25)$$

所有满足式(25) 的 $|\phi\rangle$ 均满足两个判定条件, 即可组成该系统的无消相干子空间, 与环境完全解耦. 该无消相干态仅取决于外界光场的 Rabi 频率.

根据式(4),在此过程中,场强与三能级原子系统的电偶极矩的关系如下:

$$E_c = \mu_{02} h/2, E_p = \mu_{12} h/2. \quad (26)$$

在所确定的满足式(25)的无消相干子空间中,无消相干态对应于确定的光场 Rabi 频率,而确定的光场 Rabi 频率对应于确定的光场矢量.即在电偶极矩一定的前提下,如果激光连续可调,则可通过式(26)的控制律调制光场,获得所需的无消相干态,实现三能级原子系统中状态的相干保持.

4 结 论

本文从三能级原子系统的物理模型入手,分析了加入激光控制场后描述该系统约化密度矩阵演化的主方程模型,旨在获得主方程模型中表达系统消相干作用的项.利用无消相干子空间理论,根据无消相干子空间的定义,得到与系统算符相关的一个充要判定条件.结合系统的消相干表达,推导了控制场与系统无消相干态之间的关系.通过改变耦合激光场的 Rabi 频率的方式,设计出一种制备系统无消相干态的控制策略,实现了系统状态和环境的解耦.如何利用该无消相干子空间进行量子信息处理,将是下一步工作的重点.

参考文献(References)

- [1] Shor P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory [J]. *Physical Review A*, 1995, 52 (4): 2493-2496.
- [2] Duan L M, Guo G C. Preserving coherence in quantum computation by pairing quantum bits [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(10): 1953-1956.
- [3] Duan L M, Guo G C. Prevention of dissipation with two particles[J]. *Physical Review A*, 1998, 57(4): 2399-2402.
- [4] Viola L, Lloyd S. Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems[J]. *Physical Review A*, 1998, 58(4): 2733-2744.
- [5] Alessandro D, Dobrovivitski V. Control of a two level open quantum system[C]. *Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control*. Las Vegas, 2002: 40-45.
- [6] Altafini C. Controllability properties for finite dimensional quantum markovian master equations[J]. *J of Mathematical Physics*, 2003, 44(6): 2357-2372.
- [7] Wiseman H M, Milburn GJ. Quantum error correction for continuously detected errors[J]. *Physical Review A*, 2003, 67(5): 2310-2321.
- [8] Zanardi P Rasetti. Noiseless quantum codes [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(17): 3306-3309.
- [9] Zhang Q, Yin J, Chen T Y, et al. Experimental fault-tolerant quantum cryptography in a decoherence-free subspace [J]. *Physical Review A*, 2006, 73 (2): 020301.
- [10] Bosco A R, De Magalhaes, Nemes M C. Searching for decoherence-free subspaces in cavity quantum electrodynamics[J]. *Physical Review A*, 2004, 70(5): 053825.
- [11] Aolita L, Davidovich L. Universal quantum computation in decoherence-free subspaces with hot trapped ions [J]. *Physical Review A*, 2007, 75 (5): 052337.
- [12] Arimondo E. Coherent population trapping in laser spectroscopy[J]. *Progress in Optics*, 1996, 35 (1): 257-353.
- [13] Marangos J P. Electromagnetically induced transparency[J]. *J of Modern Optics*, 1998, 45 (3): 471-503.
- [14] Heinz-Peter Breuer, Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [15] Fleischhauer M, Imamoglu A, Marangos J P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77(2): 633-673.
- [16] Lidar D A, Chuang I L, Whaley K B. Decoherence-free subspaces for quantum computation[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 81(12): 2594-2597.
- [17] Ficek Z, Swain S. *Quantum interference and coherence: Theory and experiments*[M]. New York: Springer, 2005.