第 24 卷 第 3 期　　控 制 与 决 策　　2009 年 3 月
Vol. 24 No. 3　　Control and Decision　　Mar. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)03-0455-04

一般相关噪声下线性系统固定延迟平滑算法

陈嘉鸿[1,2], 韩九强[1], 席震东[2], 黄 凯[1,2]
(1. 西安交通大学 电信学院, 西安 710049; 2. 中国卫星海上测控部, 江苏 江阴 214431)

摘 要: 针对机动目标跟踪中固定延迟平滑估计算法的精度问题,当具有一般相关过程噪声和量测噪声时,提出了离散线性系统最优固定延迟平滑估计算法. 该算法通过将延迟区间内全部量测进行集中式扩维,并对误差传递进行分析,从而精确地给出了误差间的相关性. 在线性无偏最小方差意义下对系统状态进行递推估计,新算法在噪声的高斯分布假设下是最优的. 仿真实验结果表明了该算法的有效性.

关键词: 目标跟踪; 相关噪声; 定延迟平滑
中图分类号: TP271.8　　**文献标识码**: A

Fixed-lag smoothing algorithm for linear systems with general correlated noises

CHEN Jia-hong[1,2], *HAN Jiu-qiang*[1], *XI Zhen-dong*[2], *HUANG Kai*[1,2]
(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. China Satellite Maritime Tracking and Control Department, Jiangyin 214431, China. Correspondent: CHEN Jia-hong, E-mail: stone_cjh@sina.com)

Abstract: In view of estimation performance for maneuvering target tracking, an optimal fixed-lag smoothing algorithm is proposed for discrete-time linear system with general correlated measurement and process noises. The correlations between the errors are calculated precisely by the analysis of the error transfer property. Based on the linear unbiased minimum variance estimation theory, the algorithm estimates the system states recursively using centralized expanding-dimension method with all measurements in the fixed lag interval. The algorithm is optimal under the hypothesis of Gauss distribution based on the best linear unbiased estimation (BLUE) theory. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Target tracking; Correlated noises; Fixed-lag smoothing

1 引 言

在机动目标跟踪中,平滑估计可使用更多的量测信息,因而能输出比滤波更精确的估计结果. 尤其是在空间发射问题中,一般需要对测量数据进行精确的事后精度分析,使用高精度的平滑处理方法更加重要. 由于数据量很大,利用所有量测数据进行平滑处理(即定区间平滑),计算量巨大,实际应用中有时不可接受,甚至不能进行. 因此在允许的精度范围内,使用固定延迟平滑,既能保证精度,又能保证速度.

不同时刻噪声的相关性称为噪声的时间相关性. 同一时刻不同传感器各量测通道或同一传感器不同通道噪声之间的相关性,以及过程噪声与量测噪声之间的相关性,统称为噪声的空间相关性. 对于过程噪声和量测噪声都是白噪声的情况,平滑算法有多种不同的形式[1-6]. 一些文献没有考虑量测噪声与过程噪声的相关性[1-3],或只考虑了噪声的部分空间相关性[4-5],或只考虑了量测噪声的时间相关性[6]. 目前,尚未见一般相关噪声情况下平滑问题的文献报道.

当系统受到连续干扰时,不同时刻的噪声可能存在时间相关性;当传感器系统受到共同干扰的影响时,量测噪声自身可能存在空间相关性. 由于离散化过程的影响,量测噪声与过程噪声之间存在一定的时空相关性[7]. 在机动目标跟踪中,将噪声看作具有一般相关性,更接近于实际情况.

收稿日期: 2008-02-25; **修回日期**: 2008-04-14.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60502021).
作者简介: 陈嘉鸿(1971 —),男,江苏宝应人,高级工程师,博士,从事飞行器跟踪测量、信息融合技术的研究; 韩九强(1951 —),男,西安人,教授,博士生导师,从事信息融合技术、智能检测技术等研究.

本文在线性无偏最小方差意义下,研究离散线性系统固定延迟平滑估计算法,并对延迟区间大小与估计精度之间的关系进行仿真研究.

2 问题描述

考虑如下线性系统:

$$\begin{cases} X_{k+1} = F_{k+1|k} X_k + G_k w_k, \\ z_k = H_k X_k + v_k. \end{cases} \tag{1}$$

其中:$X_k \in R^n$(n维实数空间)为状态矢量,$z_k \in R^m$为量测矢量,$F_{k+1|k}$表示k时刻到$k+1$时刻的系统状态转移矩阵,G_k为过程噪声矩阵,H_k为量测矩阵,w_k和v_k分别为过程噪声和量测噪声,下标$k=\{1,2,\cdots,N\}$表示采样时刻.系统满足如下假设:

假设 1 状态转移矩阵可逆.

假设 2 $\{w_k\}$和$\{v_k\}$是零均值相关高斯序列,其协方差阵已知,且为

$$E\left\{\begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix}[w_j \quad v_j]\right\} = \begin{bmatrix} Q_{ij} & S_{ij} \\ S_{ij}^T & R_{ij} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中上标 T 表示矩阵转置.

假设 3 初始状态是具有均值X_0和协方差阵P_0的高斯随机向量,且初态误差$\tilde{X}_0$与$\{w_k\}$和$\{v_k\}$不相关.

记k时刻延迟区间内的所有有效量测扩维向量为$Z_k = [z_{k-i}^T, \cdots, z_k^T, \cdots, z_{k+j}^T]^T$. $i \neq 0$表示压缩平滑,即不需要每点都平滑,或是对既往量测信息的重复利用;j表示延迟量.这两个参数在平滑过程中是已知和固定的.记区间长度为$L = i + j + 1$.在获得量测信息Z_k的情况下,需要对$X_k(k \leq N)$进行平滑估计.

3 集中式定延迟平滑估计

由最优融合估计理论[8],在已知Z_k和X_{k+1}估计(即$\hat{X}_{k+1}$)的情况下对X_k进行估计,不损失任何有效信息,可将所有量测并行扩维,对状态进行最佳线性无偏估计.以状态X_k为起点,由假设1可得正向和逆向量测递推方程

$$\begin{aligned} z_{k+j} = {} & H_{k+j} F_{k+j|k+j-1} F_{k+j-1|k+j-2} \cdots F_{k+1|k} X_k + v_{k+j} + \\ & H_{k+j}(F_{k+j|k+j-1} \cdots F_{k+2|k+1} G_k w_k + \cdots + \\ & F_{k+j|k+j-1} G_{k+j-2} w_{k+j-2} + G_{k+j-1} w_{k+j-1}), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} z_{k-i} = {} & H_{k-i} F_{k-i|k-i+1} F_{k-i+1|k-i+2} \cdots F_{k-1|k} X_k + v_{k-i} - \\ & H_{k-i}(F_{k-i|k-i+1} \cdots F_{k-1|k} G_{k-1} w_{k-1} + \cdots + \\ & F_{k-i|k-i+1} G_{k-i} w_{k-i}). \end{aligned} \tag{4}$$

记k时刻各扩维矩阵如下:

$$V_k = [v_{k-i}^T, \cdots, v_{k+j}^T]^T, \; W_k = [w_{k-i}^T, \cdots, w_{k+j-1}^T]^T,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix} H_{k-i} F_{k-i|k-i+1} F_{k-i+1|k-i+2} \cdots F_{k-1|k} \\ \cdots \\ H_{k-1} F_{k-1|k} \\ H_k \\ H_{k+1} F_{k+1|k} \\ \cdots \\ H_{k+j} F_{k+j|k+j-1} F_{k+j-1|k+j-2} \cdots F_{k+1|k} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & O_{i*j} \\ O_{1*i} & O_{1*j} \\ O_{j*i} & \boldsymbol{\Psi}_2 \end{bmatrix},$$

Z_k如第2节所定义.其中

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = -\begin{bmatrix} H_{k-i} F_{k-i|k-i+1} G_{k-i} & \cdots & H_{k-i} F_{k-i|k-i+1} \cdots F_{k-1|k} G_{k-1} \\ 0 & \cdots & H_{k-i+1} F_{k-i+1|k-i+2} \cdots F_{k-1|k} G_{k-1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & H_{k-1} F_{k-1|k} G_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} H_{k+1} G_k & \cdots & 0 \\ H_{k+2} F_{k+2|k+1} G_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ H_{k+j} F_{k+j|k+j-1} \cdots F_{k+2|k+1} G_k & \cdots & H_{k+j} G_{k+j-1} \end{bmatrix},$$

O_{i*j}表示i行j列零矩阵.这里假定过程噪声维数r和量测噪声维数m皆为1,否则相应的零矩阵行数应乘以m,列数应乘以r.于是可得扩维后k时刻的量测方程

$$Z_k = \boldsymbol{\Phi}_k X_k + \boldsymbol{\Gamma}_k W_k + V_k. \tag{5}$$

若已知$k-1$时刻的状态平滑估计$\hat{X}_{k-1}$及其协方差P_{k-1},则由最佳线性无偏估计理论,状态一步预报为

$$\hat{X}_{k|k-1} = F_{k|k-1} \hat{X}_{k-1}. \tag{6}$$

状态一步预报误差为

$$\tilde{X}_{k|k-1} = X_k - \hat{X}_{k|k-1} = F_{k|k-1} \tilde{X}_{k-1} + G_{k-1} w_{k-1}. \tag{7}$$

由于噪声一般相关性的存在,前一步状态估计误差与噪声之间也存在相关性.计算状态更新平滑增益K_k的重点在于求得状态估计误差的递推表达式

$$\tilde{X}_{k-1} = X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}. \tag{8}$$

记 I 为单位矩阵,经逐步代入后的误差传递可简记为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k-1} = {} & A_{k-1} \tilde{X}_0 + B_{k-1} W_{0:k-2} - \\ & C_{k-1} W_{1:k-1} - D_{k-1} V_{1:k-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$W_{0:k-2} = [W_0^T, W_1^T, \cdots, W_{k-2}^T]^T,$$

$$W_{1:k-1} = [W_1^T, W_2^T, \cdots, W_{k-1}^T]^T,$$

$$V_{1:k-1} = [V_1^T, V_2^T, \cdots, V_{k-1}^T]^T,$$

$$A_{k-1} =$$
$$(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})F_{k-1|k-2}(I - K_{k-2}\Phi_{k-2})F_{k-2|k-3}\cdots$$
$$(I - K_1\Phi_1)F_{1|0},$$
$$B_{k-1} =$$
$$[(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})F_{k-1|k-2}(I - K_{k-2}\Phi_{k-2})F_{k-2|k-3}\cdots,$$
$$\cdots,(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})G_{k-2}],$$
$$C_{k-1} =$$
$$[(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})F_{k-1|k-2}(I - K_{k-2}\Phi_{k-2})F_{k-2|k-3}\cdots,$$
$$\cdots,(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})F_{k-1|k-2}K_{k-2}\Gamma_{k-2},K_{k-1}\Gamma_{k-1}],$$
$$D_{k-1} =$$
$$[(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})F_{k-1|k-2}(I - K_{k-2}\Phi_{k-2})F_{k-2|k-3}\cdots,$$
$$\cdots,(I - K_{k-1}\Phi_{k-1})F_{k-1|k-2}K_{k-2},K_{k-1}].$$

由假设 3 初始误差 $\tilde{X}_0$ 与噪声的无关性,可得状态一步预报协方差

$$P_{k|k-1} =$$
$$F_{k|k-1}P_{k-1}F^{T}_{k|k-1} + G_{k-1}Q_{k-1,k-1}G^{T}_{k-1} +$$
$$G_{k-1}(Q_{k-1,0:k-2}B^{T}_{k-1} - Q^{1:k-1}_{k-1}C^{T}_{k-1} - S^{1:k-1}_{k-1}D^{T}_{k-1}) +$$
$$(Q_{k-1,0:k-2}B^{T}_{k-1} - Q^{1:k-1}_{k-1}C^{T}_{k-1} - S^{1:k-1}_{k-1}D^{T}_{k-1})^{T}G^{T}_{k-1}. \tag{10}$$

其中:$Q_{k:l,i:j}$ 为矩阵 Q 的第 k 行到 l 行、第 i 列到 j 列子阵,$Q^{1:k-1}_{k-1} = \mathrm{cov}(w_{k-1},w_{1:k-1})$,$S^{1:k-1}_{k-1} = \mathrm{cov}(w_{k-1},V_{1:k-1})$. 记 $Q^{1:k-1,k} = \mathrm{cov}(W_{1:k-1},W_k)$,$S^{k,1:k-1} = \mathrm{cov}(W_k,V_{1:k-1})$,$R^{k,k} = \mathrm{cov}(V_k,V_k)$,其他与此类似.

于是,量测预报为

$$\hat{Z}_k = \Phi_k\hat{X}_{k|k-1}. \tag{11}$$

量测新息为

$$\tilde{Z}_k = Z_k - \hat{Z}_k = \Phi_k\tilde{X}_{k|k-1} + \Gamma_kW_k + V_k. \tag{12}$$

状态一步预报与新息交互协方差为

$$\Lambda_k = \mathrm{cov}(\tilde{X}_{k|k-1},\tilde{Z}_k) = P_{k|k-1}\Phi^{T}_k + \Omega_k, \tag{13}$$

其中

$$\Omega_k = G_{k-1}Q^{k}_{k-1}\Gamma^{T}_k + F_{k|k-1}(B_{k-1}Q^{k}_{0:k-2} -$$
$$C_{k-1}Q^{1:k-1,k} - D_{k-1}(S^{k,1:k-1})^{T})\Gamma^{T}_k +$$
$$F_{k|k-1}(B_{k-1}S^{k}_{0:k-2} - C_{k-1}S^{1:k-1,k} -$$
$$D_{k-1}R^{1:k-1,k}) + G_{k-1}S^{k}_{k-1}. \tag{14}$$

新息协方差为

$$\Xi_k = \mathrm{cov}(\tilde{Z}_k) =$$
$$\Phi_k\Lambda_k + \Omega^{T}_k\Phi^{T}_k + \Gamma_kQ^{k,k}\Gamma^{T}_k +$$
$$R^{k,k} + \Gamma_kS^{k,k} + (\Gamma_kS^{k,k})^{T}. \tag{15}$$

平滑增益为

$$K_k = \Lambda_k(\Xi_k)^{-1}. \tag{16}$$

利用量测 Z_k 的状态平滑更新为

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Z_k - \Phi_k\hat{X}_{k|k-1}). \tag{17}$$

状态更新估计协方差为

$$P_k = P_{k|k-1} - \Lambda_k(\Xi_k)^{-1}\Lambda^{T}_k. \tag{18}$$

式(6),(7),(10) ~ (12),(15) ~ (18) 构成了具有一般相关量测噪声和过程噪声的离散线性系统集中式固定延迟平滑估计算法. 该算法完全基于最佳线性无偏估计理论,因而在线性无偏最小方差意义下是最优的. 当噪声不相关时,该算法与不考虑相关性的卡尔曼平滑算法等价.

在工程应用中,由于数据量巨大,考虑整个量测区间内的噪声相关性是不可能的. 取而代之的是在某一合适的窗口时间内认为噪声是相关的,超出窗口时间长度则认为不再相关,即间隔时间越长的噪声之间的相关性越弱. 这与实际情况也是吻合的. 同时假定噪声的统计特性对窗口 L 具有平移不变性,即噪声过程是平稳过程. 对于 k 时刻的循环,一般只需扩维至包含 $k - L + 1$ 时刻噪声即可.

4　仿真研究

本节仿真主要对不相关固定延迟算法(UCFL),空间相关固定延迟算法(SCFL),一般相关固定延迟算法(GCFL)和一般相关固定区间算法(GCFI)进行比较,并且研究延迟区间大小对平滑性能的影响. 考虑一般相关性的 GCFI 算法充分利用了所有有效量测信息,它的平滑性能是最优的,但其运算量却最大,且随区间的增大甚至不可应用. 本文仿真将它作为评价平滑性能的比较基准.

利用文献[6]的算例,不同的是采用了具有固定相关系数的相关量测和过程噪声. 考虑系统(1),采样间隔 $T = 1\,\mathrm{s}$,取两组固定相关系数 $\rho = 0.36$ 和 $\rho = 0.097$ 分别进行实验. 系统参数如下:

$$Q_{ii} = R_{ii} = 1,\ H_k = [1\quad 0],$$
$$F_{k|k-1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ G_k = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix},$$
$$X_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix},\ P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

仿真时间 100 s,仿真结果为 $M = 100$ 次 Monte Carlo 仿真运行的统计结果.

仿真以时间平均均方根误差(RMS) 的比较为主. RMS 误差的计算公式为

$$e_k = \left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}[\tilde{x}_k(j)\tilde{x}_k(j)]\right)^{1/2}, \tag{19}$$

其中 $\tilde{x}_k(j)$ 表示 k 时刻第 j 次仿真位置估计误差.

时间平均均方根误差为

$$\bar{e} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e_k. \tag{20}$$

表 1 和表 2 是 UCFL,SCFL,GCFL 和 GCFI 各自的位置和速度时间平均均方根值,其中 $L = 20$,相关系数 ρ 分别为 0.36 和 0.097. 表 3 是不同延迟下

时间平均均方根值的比较结果,其中 $L = N - k$ 表示固定区间平滑.

表 1 时间平均均方根值比较($\rho = 0.36$, $L = 20$)

	UCFL	SCFL	GCFL	GCFI
位置	0.7356	0.5760	0.4960	0.4713
速度	0.4883	0.4751	0.4701	0.4683

表 2 时间平均均方根值比较($\rho = 0.097$, $L = 20$)

	UCFL	SCFL	GCFL	GCFI
位置	0.6622	0.6402	0.5837	0.5647
速度	0.5559	0.5578	0.5553	0.5542

表 3 不同延迟时间平均均方根值比较($\rho = 0.36$)

	$L = 5$	$L = 10$	$L = 20$	$L = N - k$
位置	0.5326	0.5138	0.4960	0.4713
速度	0.4740	0.4715	0.4701	0.4683

由表 1 和表 2 可以看出, GCFL 算法估计精度明显优于 UCFL 和 SCFL 算法,它们的差异随着相关性降低而减小. 在相关系数为 0.36 时, GCFL 位置跟踪精度相对后两种算法分别提高 32 % 和 14 %,而相对最优的 GCFI 算法只相差 5 %. 在速度方向上,几种平滑算法性能差异不大.

从表 3 可以看出,随着延迟时间的增加,平滑精度有所提高. 以 GCFI 结果为基准,当 L 为 5,10 和 20 时,估计精度差分别为 13 %,9 % 和 5 %. 延迟时间越长,估计精度提高越不明显. 算法复杂度与延迟时间的大小呈指数增长关系,因而选择合适的延迟成为工程应用的必然.

本文考虑了所有噪声的相关性,并且延迟区间内所有有效信息得到了充分利用,因此噪声相关性越强, GCFL 算法越有优势. 当噪声的时间相关性变弱时, GCFL 与 SCFL 二者性能接近;当所有噪声确实不相关时, GCFL 与 UCFL 和 SCFL 算法等价.

5 结 论

本文基于集中式量测信息融合的思想,利用最小方差线性无偏估计理论,导出了具有一般相关量测噪声和过程噪声的离散线性系统最优固定延迟平滑算法. 新的 GCFL 算法具有一般性,当噪声不相关时, GCFL 与 UCFL 和 SCFL 平滑算法等价. 数值仿真进一步验证了 GCFL 算法的有效性. 本文算法尤其适用于平稳噪声过程状态的估计. 如何提高 GCFL 算法的运算效率,将是有待进一步研究的课题.

参考文献(References)

[1] Donald C F, James E P. The optimum linear smoother as a combination of two optimum linear filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1969, 14(8): 387-390.

[2] Leonid Mirkin, Gilead Tadmor. Fixed-lag smoothing as a constrained version of the fixed-interval case[C]. Proc of the 2004 American Control Conf. Boston: American Automatic Control Council, 2004: 4165-4170.

[3] Nakamori S, Hermoso Carazo A, Linares Perez J. A general smoothing equation for signal estimation using randomly delayed observations in the correlated signal-noise case[J]. Digital Signal Processing, 2006, 16(4): 369-388.

[4] Sun Shuli, Ma Jing. Optimal filtering and smoothing for discrete-time stochastic singular systems [J]. Signal Processing, 2007, 87(1): 189-201.

[5] Hermoso Carazo A, Linares Perez J. Linear smoothing for discrete-time systems in the presence of correlated disturbances and uncertain observations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(8): 1486-1488.

[6] Han Chongzhao, Wang Jie, Li Xiaorong. Smoothing algorithm for linear systems with general correlated measurement noises[J]. J of Xi'an Jiaotong University, 2000, 34(9): 1-4.

[7] Zuo Dongguang, Han Chongzhao, Wei Ruixuan, et al. Tracks association and fusion in case of correlated noises [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(8): 1117-1120.

[8] Li Xiaorong, Zhu Yunmin, Wang Jie, et al. Optimal linear estimation fusion-part Ⅰ: Unified fusion rules [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2003, 49(9): 2192-2208.