

文章编号: 1001-0920(2009)04-0560-05

## 梯度微粒群优化算法及其收敛性分析

肖健梅<sup>1</sup>, 李军军<sup>2</sup>, 王锡淮<sup>1</sup>

(1. 上海海事大学 电气自动化系, 上海 200135; 2. 上海海洋大学 电气工程系, 上海 201306)

**摘要:** 针对标准微粒群优化算法微粒运动轨迹的收敛性进行了分析, 给出并证明了微粒运动轨迹收敛的充分条件. 提出一种简便的等高线图判别法, 该方法能够通过参数的位置判断微粒轨迹是否收敛并衡量收敛速度. 为提高算法的收敛速度, 构造出一种梯度微粒群优化算法, 给出并证明了该方法收敛的充分条件. 仿真结果表明, 梯度微粒群优化算法具有优良的搜索性能.

**关键词:** 微粒群优化; 收敛性; 梯度

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A

## Convergence analysis of particle swarm optimization and its improved algorithm based on gradient

XIAO Jian-mei<sup>1</sup>, LI Jun-jun<sup>2</sup>, WANG Xi-huai<sup>1</sup>

(1. Department of Electrical and Automation, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, China; 2. Department of Electrical Engineering, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China. Correspondent: WANG Xi-huai, E-mail: wxh@shmtu.edu.cn)

**Abstract:** The convergence of standard particle swarm optimization algorithm is studied. The sufficient condition for the convergence of the algorithm is given and proved. And a kind of convenient contour map discriminance is proposed. This discriminance can be used to judge if the algorithm is convergent and measure the convergence rate. A sort of gradient particle swarm optimization algorithm is presented to enhance the convergence rate of the algorithm. The sufficient condition for the convergence of this method is given and proved. Simulation results verify the correctness and efficiency of the proposed method.

**Key words:** Particle swarm optimization; Convergence; Gradient

### 1 引言

微粒群优化 (PSO) 算法是一种基于群智能方法的演化计算技术, 由 Kennedy 等<sup>[1,2]</sup> 于 1995 年提出. PSO 模拟鸟群的捕食行为, 通过鸟之间的集体协作来达到优化问题的求解. PSO 简单易行, 目前已成功应用于求解各种复杂的优化问题<sup>[3,4]</sup>. 但基本 PSO 算法并不能保证收敛到全局最优解, 目前一些文献对 PSO 或其改进算法收敛性进行分析, 文献 [5] 从邻域算子角度分析了 PSO 算法的性能; [6] 分别从离散域和连续域给出了 PSO 算法的较完整的理论分析; [7] 从理论上分析粒子的速度对算法收敛性的影响; [8] 从微粒运动轨迹角度研究了 PSO 算法的收敛性, 但如何简单判别是否收敛和衡量收敛速度的研究并不多见.

本文对标准 PSO 微粒轨迹的收敛性进行了详细的分析, 在标准 PSO 迭代矩阵谱半径计算式的基础上, 提出一种判别标准 PSO 微粒轨迹是否收敛及衡量收敛速度的一种等高线图判别法. 结合微粒群寻优过程中的梯度信息, 提出了一种新的梯度 PSO 算法, 并分析了该算法的收敛性. 在优化实例中, 以本文得出的收敛性判别依据对参数进行分析与设置. 算例结果验证了梯度 PSO 算法具有较优的收敛性能.

### 2 标准微粒群算法

微粒群优化算法最初是为了图形化地模拟鸟群优美而不可预测的运动. 人们通过对动物社会行为的观察, 发现在群体中对信息的社会共享有利于在演化中获得优势, 并以此作为开发 PSO 算法的基

收稿日期: 2008-01-28; 修回日期: 2008-11-02.

基金项目: 上海市教委重点学科建设项目 (J50602); 上海市教委科研创新项目 (08ZZ78).

作者简介: 肖健梅 (1962—), 女, 辽宁大连人, 教授, 从事复杂系统控制、智能优化等研究; 王锡淮 (1961—), 男, 江苏淮安人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模和优化等研究.

础,形成了 PSO 的最初版本<sup>[2]</sup>.之后,Shi 等<sup>[9]</sup>引入惯性权重 来更好地控制开发和探索,形成了当前的标准微粒群算法(PSO).

标准微粒群优化算法首先在解空间内随机初始化一组微粒,这些微粒通过迭代搜寻最优值.迭代公式如下:

$$V_{id}^{t+1} = V_{id}^t + c_1 R_1 (X_{id}^{pb} - X_{id}^t) + c_2 R_2 (X_d^{gb} - X_{id}^t), \tag{1}$$

$$X_{id}^{t+1} = X_{id}^t + V_{id}^{t+1}. \tag{2}$$

其中:  $d = 1, 2, \dots, D; t = 1, 2, \dots, t$  为迭代次数; 为惯性权重;  $c_1$  和  $c_2$  为认知和社会参数;  $R_1$  和  $R_2$  为  $[0, 1]$  之间的随机数;  $X_{id}^{pb}$  是微粒在其搜索过程中到达过的最优位置;  $X_d^{gb}$  是整个微粒群目前找到的最优位置.

### 3 标准微粒群算法收敛性分析

将式(1)代入(2),整理可得

$$V_{id}^{t+1} = V_{id}^t - (c_1 R_1 + c_2 R_2) X_{id}^t + c_1 R_1 X_{id}^{pb} + c_2 R_2 X_d^{gb}, \tag{3}$$

$$X_{id}^{t+1} = V_{id}^t + (1 - c_1 R_1 - c_2 R_2) X_{id}^t + c_1 R_1 X_{id}^{pb} + c_2 R_2 X_d^{gb}. \tag{4}$$

则标准 PSO 迭代公式可以表示为

$$\begin{bmatrix} V_{id}^{t+1} \\ X_{id}^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - (c_1 R_1 + c_2 R_2) \\ 1 - (c_1 R_1 + c_2 R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{id}^t \\ X_{id}^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 R_1 & c_2 R_2 \\ c_1 R_1 & c_2 R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{id}^{pb} \\ X_d^{gb} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

关于迭代过程的收敛性有如下定理<sup>[10]</sup>:

**定理 1** 迭代过程  $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d$  对任给初始向量  $x^{(0)}$  收敛的充分必要条件是迭代矩阵的谱半径  $(G) < 1$ ,且当  $(G) < 1$  时,迭代矩阵谱半径越小,收敛速度越快.

通过对式(5)进行迭代矩阵谱半径计算来分析标准 PSO 微粒轨迹的收敛性.令

$$A = \begin{bmatrix} - (c_1 R_1 + c_2 R_2) \\ 1 - (c_1 R_1 + c_2 R_2) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$t_{id} = c_1 R_1 + c_2 R_2$ ,为简化表示,以 表示  $t_{id}$ <sup>[15]</sup>,则有

$$A = \begin{bmatrix} - \\ 1 - \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其特征多项式为

$$\lambda^2 + (\ - 1 - ) + . \tag{8}$$

令  $A$  的特征值为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,则  $A$  的谱半径为

$$(A) = \max_i | \lambda_i | = \max\{ | \lambda_1 |, | \lambda_2 | \}. \tag{9}$$

**推论 1** 标准 PSO 算法微粒轨迹对任意初始微粒群收敛的一个充分条件是  $(A) < 1$ ,即

$$- 1 < < 1, 0 < < 2 + 2 . \tag{10}$$

且当此条件满足时,  $(A)$  越小,收敛速度越快.

证明 可求得当  $(A) < 1$  时  $(A)$  的计算式,为表示清晰,这里按 的正负不同分别给出,当  $- 1 < 0$  时

$$(A) = \begin{cases} \frac{+}{2}, & 0 < < 1 + ; \\ \frac{-+}{2}, & 1 + < 2 + 2 . \end{cases} \tag{11}$$

当  $< < 1$  时

$$(A) = \begin{cases} \frac{+}{2}, & 0 < (1 - \sqrt{\ })^2; \\ \sqrt{, (1 - \sqrt{\ })^2 < < (1 + \sqrt{\ })^2; \\ \frac{-+}{2}, & (1 + \sqrt{\ })^2 < 2 + 2 . \end{cases} \tag{12}$$

其中:  $= - + 1 + , = \sqrt{( - 1 - )^2 - 4} .$

$A$  包括随机量,在标准 PSO 算法迭代过程中,  $(A)$  是一变化量(见式(11)和(12)),  $c_1 R_1, c_2 R_2, X_{id}^{pb}, X_d^{gb}$  也是变化量.但在每次迭代中,  $(A), X_{id}^{pb}, X_d^{gb}$  都是常数,  $c_1 R_1$  和  $c_2 R_2$  也是常数,则式(5)右边第 2 部分也是常数.因此由定理 1,  $(A) < 1$  是迭代过程(5)即标准 PSO 算法微粒轨迹对任意初始微粒群收敛的充分条件,且当  $(A) < 1$  时,  $(A)$  越小,收敛速度越快.

由  $(A)$  的计算式可知,  $(A) < 1$  的充要条件为

$$- 1 < < 1, 0 < < 2 + 2 . \tag{13}$$

综上,推论 1 成立.

由式(13)有

$$0 < < 2 + 2 < 4. \tag{14}$$

在  $(A)$  的计算式中,参数 和 有 5 个不同范围,分别对应标准 PSO 参数区域(图 1)中的区域 , , , , .当参数 和 位于区域 ~ 时,标准 PSO 微粒轨迹收敛;位于区域 时,标准 PSO 微粒轨迹不收敛,其分界为  $= 2 + 2 .$

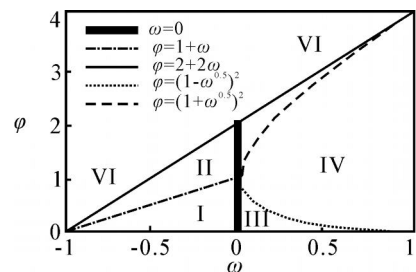


图 1 标准 PSO 的参数区域

根据推论 1,当参数 和 位于收敛区域时,  $(A)$  越小,标准 PSO 微粒轨迹收敛速度越快.这里给出  $(A)$  关于 和 的三维图,如图 2 所示.

图 2 中等高线成环状分布,在  $(- 1, 0), (1, 0), (1, 4)$  为顶点的三角形内,以  $[0, 1]$  为中心,一层一

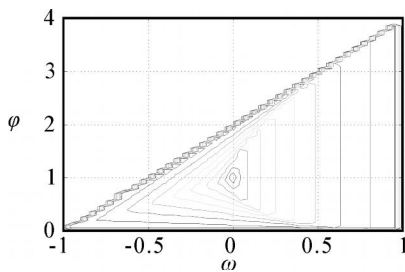


图2 (A)的等高线图形

层向外扩展.当 $\omega$ 位于 $[0,1]$ 附近时,PSO微粒轨迹收敛速度最快;越向周围PSO微粒轨迹收敛速度越慢.

针对标准PSO的不同参数设置,可以通过式(10)判断能否收敛.若能收敛,则可通过式(11)和(12)计算此时 $A$ 的谱半径大小,以分析其收敛速度的高低.一种更为简便的方法是根据 $\omega$ 和 $\phi$ 在图2上的位置,判断算法是否收敛,若收敛,则可大致判断算法收敛速度的高低.若 $(\omega, \phi)$ 位置在 $(-1,0), (1,0), (1,4)$ 为顶点的三角形内,则收敛;若 $(\omega, \phi)$ 位置在 $(-1,0), (1,4), (-1,4)$ 为顶点的三角形内,则不收敛.若 $(\omega, \phi)$ 位置在(A)较低的区域,则收敛速度较快;若 $(\omega, \phi)$ 位置在(A)较高的区域,则收敛速度较慢.将此方法称为等高线图判别法.

标准PSO微粒轨迹算法要求必须能够收敛,但也并非收敛速度越快越好.比如当 $\omega$ 位于 $[0,1]$ 附近时,微粒速度的组成部分中先前速度部分(主要是认知部分、社会部分)很小,显然收敛速度很快,但也很容易陷入局部极值,不符合搜索精度的要求.

#### 4 梯度微粒群算法及其收敛性分析

为提高标准PSO算法的收敛效率,结合梯度法,构造一种梯度微粒群算法(GPSO).利用微粒群迭代过程中的梯度信息,对参数 $\omega$ 进行调整;同时,在全局最优值出现停滞时,对 $X^{gb}$ 沿负梯度方向变异,改变种群搜索方向,以防止算法陷入局部极值;采用第3节的结论对梯度PSO微粒轨迹的收敛性进行分析,得出其收敛的充分条件.

##### 4.1 梯度微粒群算法

与其他智能优化算法一样,标准PSO算法利用种群进行随机搜索,没有使用梯度信息.而微粒群寻优过程中的梯度信息往往包含目标函数的一些重要信息.

对于函数 $f(X)$ , $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,其梯度可表示为

$$\nabla f(X) = \left[ \frac{\partial f(X)}{\partial X_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial X_n} \right]^T. \quad (15)$$

函数值的最速下降方向是负梯度方向.例如,对于求 $\min f(X)$ 问题,式(1)和(2)是微粒群第 $t$ 代到第 $t$

+1代的迭代公式,而第 $t-1$ 代到第 $t$ 代有

$$X_{id}^t = X_{id}^{t-1} + V_{id}^t. \quad (16)$$

从第 $t-1$ 代到第 $t$ 代,对微粒 $i$ ,梯度为

$$\nabla f(X_i) = \frac{f(X_i^t) - f(X_i^{t-1})}{X_i^t - X_i^{t-1}} = \frac{f(X_i^t) - f(X_i^{t-1})}{V_i^t}, \quad (17)$$

其负梯度方向即为

$$-\nabla f(X_i) = \frac{f(X_i^{t-1}) - f(X_i^t)}{V_i^t}. \quad (18)$$

若 $f(X_i^{t-1}) > f(X_i^t)$ ,则 $V_i^t$ 与其负梯度方向一致,而 $V_{id}^t$ 是 $V_{id}^{t+1}$ 的一部分,将式(1)中的 $V_{id}^t$ 取正,保留这部分的作用;若 $f(X_i^{t-1}) < f(X_i^t)$ ,则 $V_i^t$ 其负梯度方向相反,将式(1)中的 $V_{id}^t$ 以一定概率置负,使 $V_{id}^t$ 与其负梯度方向保持一致;若 $f(X_i^{t-1}) = f(X_i^t)$ ,梯度为0,也将式(1)中的 $V_{id}^t$ 取正,以加快搜索速度,减少搜索的盲目性.在式(1)中,有

$$V_{id}^t = \begin{cases} 1, & f(X_i^{t-1}) > f(X_i^t); \\ 2, & f(X_i^{t-1}) < f(X_i^t), \text{rand} < \alpha; \\ 3, & f(X_i^{t-1}) < f(X_i^t), \text{rand} > \alpha. \end{cases} \quad (19)$$

其中: $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 < 0$ ,  $\alpha_3 > 0$ ;rand是 $(0,1)$ 上的一个随机数; $\alpha \in [0,1]$ ,一般取一个较小的数,以避免算法陷入局部极值.

当全局最优值 $f(X^{gb})$ 连续多代未得到更新时,对 $X^{gb}$ 沿其负梯度方向作变异调整,使种群进入其他区域进行搜索,从而使算法跳出局部最优. $X^{gb}$ 负梯度方向为

$$-\nabla f(X^{gb}) = \frac{f(X^{gb,old}) - f(X^{gb})}{X^{gb} - X^{gb,old}},$$

其中 $X^{gb,old}$ 为 $X^{gb}$ 最近一次更新前的 $X^{gb}$ .若无 $X^{gb,old}$ ,即 $X^{gb}$ 尚未更新过,则 $X^{gb}$ 沿其随机方向作变异调整.

##### 4.2 梯度微粒群算法的收敛性分析

推论2 梯度PSO微粒轨迹收敛对任给初始微粒群收敛的充分条件为

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 < 2 + 2\alpha_1, & f(X_i^{t-1}) > f(X_i^t); \\ 0 < \alpha_2 < 2 + 2\alpha_2, & f(X_i^{t-1}) < f(X_i^t), \text{rand} < \alpha; \\ 0 < \alpha_3 < 2 + 2\alpha_3, & f(X_i^{t-1}) < f(X_i^t), \text{rand} > \alpha; \\ \alpha_1 < 1, & \alpha_2 > -1, & \alpha_3 < 1. \end{cases} \quad (20)$$

证明 若 $\alpha_1 < 1$ ,  $\alpha_2 > -1$ ,  $\alpha_3 < 1$ ,而梯度PSO中 $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 < 0$ ,  $\alpha_3 > 0$ ,则有

$$-1 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1. \quad (21)$$

式(20)的前3个式子显然与 $0 < \alpha_1 < 2 + 2\alpha_1$ 等价,因此

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1 < 1, \\ 0 < \alpha_2 < 2 + 2\alpha_2 \end{cases} \quad (22)$$

成立.而每次  $X^{gb}$  变异之后仍是常数,根据推论 1,此时梯度 PSO 收敛.

### 5 算例分析

本文针对 6 个具有代表性的基准测试函数<sup>[11]</sup>,对梯度 PSO 算法进行测试与分析.由于篇幅限制,仅给出基准函数  $F_1$  的计算结果,基准函数  $F_1$  为

$$F_1 = 100(x_1^2 - x_2) + (1 - x_1)^2, - 2.048 \leq x_i \leq 2.048. \quad (23)$$

在标准 PSO 算法中,采用文献[12]的参数设置方案:  $\omega = 0.729, c_1 = c_2 = 1.49445$ .此时  $(-1, 1), (0, 2.98890) \subseteq (0, 2 + 2 \times 0.729)$ ,标准 PSO 算法是收敛的,和位置如图 3 中虚线所示.由图 3 可知, (A) 基本相同,算法收敛速度基本稳定.

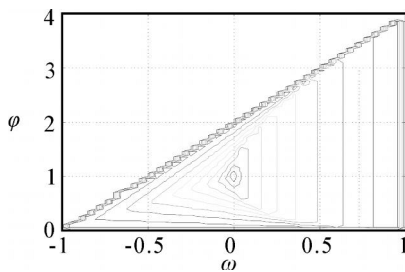


图 3 文献[12]的参数位置

梯度 PSO 算法中,  $\omega_1 = \omega_3 = 0.729, \omega_2 = -0.15, c_1 = c_2 = 1.49445, \omega = 0.1$ .由上面的分析可知,当  $\omega = \omega_1 = \omega_3$  时,算法收敛;而当  $\omega = \omega_2$  时,  $(-1, 1), (0, 2.98890) \supset (0, 2 + 2 \times \omega_2)$ ,此时梯度 PSO 算法不是充分收敛的,位置如图 4 中虚线所示.由图 4 可知,位置没有完全位于收敛区域内.

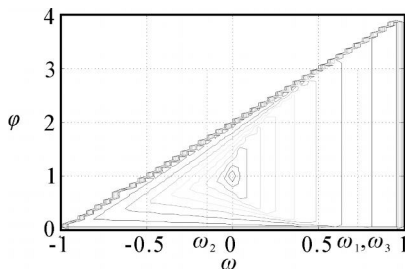


图 4 梯度 PSO 的参数位置 1

对  $\omega = \omega_2$  时的  $c_1$  和  $c_2$  进行调整,令  $c_1 = c_2 = (2 + 2 \times \omega_2) / 2 = 0.85$ ,则  $(0, 1.7) \subseteq (0, 2 + 2 \times \omega_2)$ ,此时梯度 PSO 算法收敛,位置如图 5 中虚线所示,可见,位置现在已完全位于收敛区域内.图 5 中,的两条位置虚线,右边一条与标准 PSO 算法的相同,左边一条绝大部分对应的 (A) 相对右边那条小,因此梯度 PSO 算法收敛速度应会高于标准 PSO 算法.

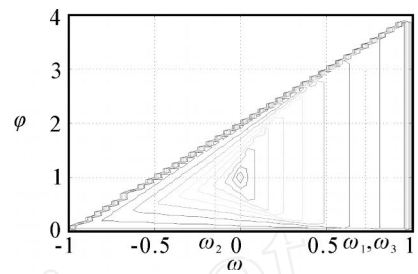


图 5 梯度 PSO 的参数位置 2

两种 PSO 算法中,微粒数为 20,迭代次数为 100.为进一步反映梯度 PSO 算法的收敛性能,也采用基于模拟退火的 PSO 算法(SAPSO)<sup>[11]</sup>和带有梯度加速的 PSO 算法(IPSO)<sup>[13]</sup>对这 6 个函数进行计算,其参数设置与 SPSO 和 GPSO 相同.若求得的结果与理想最优解误差小于  $10^{-4}$ ,就视其为收敛到理想最优解.4 种算法计算结果如表 1 所示.

表 1 基准函数  $F_1$  的优化结果比较

算法	收敛概率 / %	平均收敛代数	平均收敛时间 / s
标准 PSO	70	62.36	0.0212
SAPSO <sup>[11]</sup>	100	38.24	0.0207
IPSO <sup>[13]</sup>	90	45.46	0.0168
梯度 PSO	100	39.80	0.0146

由表 1 可以看出,梯度 PSO 的收敛速度、收敛概率均优于标准 PSO;梯度 PSO 的收敛概率、平均收敛代数与 SAPSO 相当,但平均收敛时间明显优于 SAPSO;而与 IPSO 比较,梯度 PSO 在 3 个指标上均更优,可见本文梯度 PSO 确实改善了 PSO 的搜索性能.

### 6 结 论

本文通过对标准 PSO 迭代矩阵谱半径的计算分析,从理论上分析了标准微粒群算法微粒运动轨迹的收敛性,给出了标准 PSO 收敛的参数取值范围,并提出一种简便的等高线图判别法.在微粒群迭代过程中,根据梯度信息对惯性权重进行了调整,构造出一种梯度微粒群算法.利用标准 PSO 微粒轨迹收敛性分析结果对梯度 PSO 进行了分析,提出其收敛的充分条件.通过基准测试函数的求解,说明梯度 PSO 改善了 PSO 的收敛性能,是一种有效的优化算法.

### 参考文献(References)

[1] Eberhart R C, Kennedy J. Particles swarm optimization [C]. IEEE Int Conf on Neural Network. Perth, 1995: 1942-1948.

[2] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particles swarm theory[C]. The 6th Int Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya, 1995: 39-

- 43.
- [3] 谢晓锋, 张文俊, 杨之廉. 微粒群算法综述[J]. 控制与决策, 2003, 18(2): 129-134.  
(Xie X F, Zhang W J, Yang Z L. Overview of particle swarm optimization[J]. Control and Decision, 2003, 18(2): 129-134.)
- [4] Parsopoulos K E, Vrahatis M N. On the computation of all global minimizers through particle swarm optimization [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 211-224.
- [5] Kadiramanathan V, Selvarajah K, Fleming P J. Stability analysis of the particle dynamics in particle swarm optimizer [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2006, 10(3): 245-255.
- [6] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm-explosion, stability and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-64.
- [7] 刘洪波, 王秀坤, 谭国真. 粒子群优化算法的收敛性分析及其混沌改进算法[J]. 控制与决策, 2006, 21(6): 636-640, 645.  
(Liu H B, Wang X K, Tan G Z. Convergence analysis of particle swarm optimization and its improved algorithm based on chaos [J]. Control and Decision, 2006, 21(6): 636-640, 645.)
- [8] F van den Bergh, Engelbrecht A P. A study of particle swarm optimization particle trajectories[J]. Information Sciences, 2006, 176(8): 937-971.
- [9] Shi Yuhui, Eberhart R. A modified particle swarm optimizer [C]. Proc IEEE Int Conf on Evolutionary Computation. 1998: 69-73.
- [10] 马东升. 数值计算方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.  
(Ma D S. Methods of numerical value calculation[M]. Beijing: China Machine Press, 2001.)
- [11] Li J J, Wang X H. A modified particle swarm optimization algorithm [C]. Proc of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, 2004: 354-356.
- [12] Eberhart R C, Shi Y. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization[C]. Proc of the IEEE Conf on Evolutionary Computation. California: IEEE Service Center, 2000: 84-88.
- [13] 王俊伟, 汪定伟. 一种带有梯度加速的粒子群算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1298-1300, 1304.  
(Wang J W, Wang D W. Particle swarm optimization algorithm with gradient acceleration [J]. Control and Decision. 2004, 19(11): 1298-1300, 1304.)

(上接第 559 页)

- [7] 左元华, 姜斌, 陈复扬. 悬臂梁主动控制与模型参考自适应控制比较研究[J]. 计算技术与自动化, 2007, 26(4): 1-4.  
(Zuo Y H, Jiang B, Chen F Y. A comparative research of routine active control and model reference adapting control on overhanging-beam[J]. Computing Technology and Automation, 2007, 26(4): 1-4.)
- [8] 黄群, 文立华, 李双. 基于压电堆式作动器的主动隔振研究及其仿真分析[J]. 西安工业大学学报, 2006, 26(4): 361-364.  
(Huang Q, Wen L H, Li S. Study and simulation of active vibration isolation system with piezo electric stack acutators [J]. J of Xi 'an Technological University, 2006, 26(4): 361-364.)
- [9] 司洪伟, 李东旭. 自适应变论域模糊控制器在结构振动控制中的应用[J]. 振动与冲击, 2007, 26(5): 81-84.  
(Si H W, Li D X. Active control of structural vibration using a fuzzy control method based on adaptive scaling universes of discourse [J]. J of Vibration and Shock, 2007, 26(5): 81-84.)
- [10] Bayer V, Bucher C. Important sampling for first passage problems of nonlinear structures, international [J]. J of Probabiistic Engineering Mechanics, 1999, 14(1): 27-32.
- [11] Carbone V, Caroccim, Savio E. Combination of a vision system and a coordinate measuring machine for the reverse engineering of freeform surface [J]. Int J of Advanced Manufacturing Technology, 2001, 17(4): 263-271.