

文章编号: 1001-0920(2009)04-0583-04

## 时变不确定系统鲁棒控制器设计的新方法

陈 珺, 刘 飞

(江南大学 自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

**摘 要:** 基于包含两个二次项的分段 Lyapunov 函数, 研究了线性时变不确定系统的鲁棒控制器设计问题. 所考虑的系统由两个矩阵的凸组合构成, 通过引入一个附加矩阵, 推导出鲁棒控制器存在的充分条件. 该控制器的状态反馈增益的求解问题可以转化为一组带有两个比例参数的线性矩阵不等式的凸优化问题. 最后的数值示例说明了该设计方法的可行性.

**关键词:** 分段 Lyapunov 函数; 鲁棒控制; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## New approach to robust controller design for time-varying uncertain systems

CHEN Jun, LIU Fei

(Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: LIU Fei, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn)

**Abstract:** By means of two-term piecewise quadratic Lyapunov functions, the problem of robust controller design for linear time-varying uncertain systems is investigated in this paper. The system under consideration involves the convex combination of two matrices. By introducing an additional slack matrix, a sufficient condition for the existence of robust controller is derived. And the solution of robust state feedback gain can be converted into a convex optimization problem in terms of a set of linear matrix inequalities (LMIs) with two scaling parameters. Finally, the numerical example illustrates the feasibility of the design procedure.

**Key words:** Piecewise Lyapunov functions; Robust control; Linear matrix inequalities

### 1 引 言

目前,二次稳定的概念已经成为人们分析时变不确定系统鲁棒稳定的主要工具之一.然而,基于二次稳定概念得到的稳定条件通常都要求对于所有可允许的参数不确定性,系统存在一个共同的二次 Lyapunov 函数.显然,这样的要求比较苛刻,由此导出的结果必然具有较大的保守性.为此,不少学者尝试采用非二次 Lyapunov 函数来改善系统鲁棒稳定域的估计问题<sup>[1,2]</sup>.非二次 Lyapunov 函数除了可对线性时变不确定系统进行研究外,还可以应用于分段线性系统的稳定性分析中<sup>[3,4]</sup>.虽然该方法在一定程度上扩大了系统的鲁棒稳定域,但是与之相应的最优化问题往往是非凸的,并且缺少有效的数值求解方法.为了克服这一缺点,文献[5]选取两个二

次项的最大值或最小值形式作为 Lyapunov 函数,分别给出了连续情形和离散情形下分析系统鲁棒稳定的新方法.与文献[6]中的分析方法相比,文献[5]不仅减少了比例参数的个数,降低了求解难度,更重要的是它为验证系统稳定提供了一个有效的数值求解方法.但遗憾的是,该文献并未给出系统鲁棒控制器的设计方法.随后,文献[7]对连续情形下的时变不确定系统进行了鲁棒控制的分析和设计,但其针对的是具有  $N$  个顶点构成的系统矩阵和  $q$  个分段二次 Lyapunov 函数,求解比较困难.

近年来,通过投影定理<sup>[8]</sup>解除 Lyapunov 矩阵和系统矩阵之间的耦合来减小设计保守性的思想被越来越多的人所采用,但采用这种思想对连续时变不确定系统的研究还较为少见.本文借助该思想,

收稿日期: 2008-03-01; 修回日期: 2008-07-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574001); 新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-05-0485); 江南大学创新团队发展计划项目.

作者简介: 陈珺(1980—),女,江苏无锡人,副教授,博士,从事模糊系统控制及应用的研究; 刘飞(1965—),男,安徽宣城人,教授,博士生导师,从事鲁棒控制、模糊与神经网络系统等研究.

在文献[5]的基础上,对连续时变不确定系统进行了鲁棒控制器的设计.与文献[3,4]中所给出的分段 Lyapunov 函数不同,这里选取的 Lyapunov 函数并不需要对状态空间进行划分.也就是说,在任意时刻,状态空间中的每一点都可由系统矩阵给出的动态特性所决定.由于附加矩阵的引入,消除了 Lyapunov 矩阵和系统矩阵之间的耦合关系,使得控制器增益可以独立于 Lyapunov 矩阵进行设计.并且控制器增益的求解问题可以转化为一组带有两个比例参数的线性矩阵不等式的凸优化问题,其中比例参数被限定在区域[0,1]内.本文最后给出的数值示例表明了该设计方法的有效性和可行性.

## 2 问题描述

考虑如下的线性自治连续时变系统:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  为系统的状态变量;  $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统的时变矩阵,并假定该矩阵由两个矩阵的凸组合构成,即

$$A(t) = \text{Co}\{A_1, A_2\}. \quad (2)$$

取分段 Lyapunov 函数

$$V(x) = \max\{x^T P_1 x, x^T P_2 x\}, \\ P_i = P_i^T > 0, i = 1, 2. \quad (3)$$

根据文献[5],可得系统(1)和(2)鲁棒稳定的一个充分必要条件.现将此条件作为引理叙述如下:

**引理1** 考虑分段 Lyapunov 函数(3),系统(1)和(2)是鲁棒稳定的,当且仅当存在标量  $\alpha_i, \beta_j \in [0, 1]$  和对称正定矩阵  $P_i (i = 1, 2)$ ,使得下列线性矩阵不等式成立:

$$A_i^T P_i + P_i A_i < 0, i = 1, 2; \quad (4)$$

$$(1 - \alpha_j)(A_i^T P_j + P_j A_i) + \alpha_j(P_j - P_i) < 0; \\ i = j, i, j = 1, 2; \quad (5)$$

$$0 < P_i < I, i = 1, 2. \quad (6)$$

**注1** 如果令式(4)~(6)中的  $P_1 = P_2 = P$ ,则引理1就退化为传统的利用 Lyapunov 函数  $V(x) = x^T P x$  得到的系统稳定准则.

本文的目标是根据选定的分段 Lyapunov 函数(3),为系统(1)和(2)设计一个状态反馈的鲁棒控制器.然而,在对式(4)~(6)采用常规方法左乘、右乘 Lyapunov 矩阵的逆阵时发现,用该方法并不能直接推导出系统的状态反馈增益矩阵,主要原因在于对式(5)左乘、右乘  $P_j^{-1}$  后,式中出现的  $(1 - \alpha_j)P_j^{-1}P_iP_j^{-1}$  一项关于  $P_j^{-1}$  并不是线性的.

为了能设计出保证系统稳定的鲁棒控制器,下节中将通过应用投影定理<sup>[8]</sup>和 Schur 补引理<sup>[6]</sup>,建立该系统的一个鲁棒稳定的新准则.该准则通过引入一个附加矩阵,消除了系统矩阵与 Lyapunov 矩阵

之间的耦合关系.并在两个有界比例参数的约束下,通过求解相应的线性矩阵不等式进行系统状态反馈鲁棒控制器的设计.

**引理2(投影定理)** 设  $M$  和  $N$  是给定的适当维数矩阵,且  $M$  是对称的.  $M$  和  $N$  分别是由核空间  $\ker(M)$  和  $\ker(N)$  的任意一组基向量作为列向量构成的矩阵,则存在一个矩阵  $G$ ,使得

$$M + M^T G^T N + N^T G M < 0, \quad (7)$$

当且仅当

$$M^T M < 0, N^T N < 0. \quad (8)$$

## 3 主要结果

考虑如下的受控线性连续时变系统:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \quad (9)$$

其中:  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  为系统的状态变量,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  为系统的控制输入.时变矩阵  $A(t)$  和  $B(t)$  满足

$$[A(t), B(t)] = \text{Co}\{(A_1, B_1), (A_2, B_2)\}. \quad (10)$$

本节将对由式(3)给出的分段 Lyapunov 函数,设计一个状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \quad (11)$$

使得系统(9)和(10)是鲁棒稳定的,其中  $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为待定的控制器反馈增益.

**定理1** 考虑分段 Lyapunov 函数(3),如果存在标量  $\alpha_i, \beta_j \in [0, 1]$ ,对称正定矩阵  $P_i (i = 1, 2)$  和矩阵  $G$ ,使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * \\ A_i G + P_i & -P_i & * \\ G & 0 & -P_i \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2; \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * \\ (1 - \alpha_j)A_i G + P_j & -P_j + \alpha_j(P_j - P_i) & * \\ G & 0 & -P_j \end{bmatrix} < 0, \\ i = j, i, j = 1, 2; \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} I & * \\ P_i & P_i \end{bmatrix} > 0, i = 1, 2; \quad (14)$$

其中“\*”代表对应块的转置矩阵.那么,系统(9)和(10)是鲁棒稳定的.

**证明** 由对偶性易知,式(12)等价于

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * \\ A_i^T G + P_i & -P_i & * \\ G & 0 & -P_i \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2. \quad (15)$$

将式(15)改写成(7)的形式,其中

$$= \begin{bmatrix} 0 & P_i & 0 \\ P_i & -P_i & 0 \\ 0 & 0 & -P_i \end{bmatrix},$$

$$M = [I \ 0 \ 0], N = [-I \ A_i \ I].$$

则矩阵  $M$  和  $N$  的零空间可分别表示为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} A_i & I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

根据引理 2,有

$$\begin{bmatrix} -P_i & 0 \\ 0 & -P_i \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2; \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} P_i A_i + A_i^T P_i - P_i & P_i \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2. \tag{17}$$

不难发现,不等式(16)包含于不等式(17)中,即只要不等式(17)成立,就能保证不等式(16)成立.通过 Schur 补引理的简单变换,可以很容易从式(17)推得(4).再根据式(17)与(15)及式(15)与(12)的等价关系,易知式(4)可由(12)保证.同理,采用与上述类似的推导方法可得式(13)与如下矩阵不等式等价:

$$\begin{bmatrix} -P_j + j(P_j - P_i) & 0 \\ 0 & -P_j \end{bmatrix} < 0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} (1 - j)(A_i^T P_j + P_j A_i) \\ + j(P_j - P_i) - P_j \\ P_j & -P_j \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

其中  $i = j, i, j = 1, 2$ .

又由式(19)易得(5)成立,从而式(5)可由(13)保证.

**注 2** 由于式(13)与(18),(19)等价,而引理 1 中并没有与式(18)等价的约束,所以式(18)的存在可能会给定理 1 的结果带来或多或少的保守性.

最后,由 Schur 补引理可推得式(14)与  $P_i > 0$  和  $I - P_i > 0$  两式等价,即式(6)成立.

**定理 1** 通过引入一个附加矩阵  $G$ ,给出了系统(9)和(10)鲁棒稳定的充分条件.在该新条件中,乘积项  $A_i^T P_j$  和  $P_j A_i (i, j = 1, 2)$  不再出现在线性矩阵不等式组(12)~(14)中,取而代之的是  $G^T A_i^T$  和  $A_i G (i = 1, 2)$  两项.产生这种现象的原因主要在于,附加矩阵  $G$  的引入消除了系统矩阵  $A_i$  和 Lyapunov 矩阵  $P_i$  之间的耦合关系,使两者分离开来.这种重要的特性使得系统的状态反馈增益可以独立于 Lyapunov 矩阵进行设计.

**定理 2** 考虑分段 Lyapunov 函数(3),如果存在标量  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ ,对称正定矩阵  $P_i (i = 1, 2)$ ,矩阵  $Y$  和矩阵  $G$ ,使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * \\ A_i G + B_i Y + P_i & -P_i & * \\ G & 0 & -P_i \end{bmatrix} < 0, \tag{20}$$

$i = 1, 2;$

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * \\ (1 - \alpha_j)(A_i G + B_i Y) + P_j & -P_j & * \\ G & 0 & -P_j \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

$i = j, i, j = 1, 2;$

$$\begin{bmatrix} I & * \\ P_i & P_i \end{bmatrix} > 0, i = 1, 2. \tag{22}$$

那么,系统(9)和(10)是鲁棒稳定的,与之对应的鲁棒控制器的状态反馈增益为

$$K = YG^{-1}. \tag{23}$$

**证明** 将定理 1 中的矩阵  $A_i$  用  $(A_i + B_i K)$  代替,并令  $Y = KG$ ,即可得到线性矩阵不等式组(20)~(22).

**注 3** 此外,还可采用如下的分段 Lyapunov 函数来研究系统(9)和(10)的鲁棒稳定性及控制器设计问题:

$$V(x) = \min\{x^T P_1 x, x^T P_2 x\}, \tag{24}$$

$P_i = P_i^T > 0, i = 1, 2.$

此时,在引理 1 中,式(5)将被(25)代替;

$$(1 - \alpha_j)(A_i^T P_j + P_j A_i) - \alpha_j(P_j - P_i) < 0, \tag{25}$$

$i = j, i, j = 1, 2.$

类似地,其余定理可作相应调整.

需要指出的是,在求解定理 2 中的线性矩阵不等式组时,会牵涉到参数  $\alpha_i (i = 1, 2)$  的取值问题.由于  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ ,通常采用简单的网格搜索技术对其进行二维搜索取值.对于区间  $[0, 1]$  内的每一对固定值  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,都有一组线性矩阵不等式组与其对应.通过求解这些线性矩阵不等式组,便可得到与该可行对  $(\alpha_1, \alpha_2)$  相应的控制器增益.一般经过网格技术搜索后,得到的使线性矩阵不等式组(20)~(22)可行的参数对  $(\alpha_1, \alpha_2)$  可能不只一对,此时可根据实际需要,通过施加某种约束来对解进行筛选.例如,可取使反馈增益  $K$  的范数为最小,即以  $\min \|K\|_2$  为目标来选取合适的可行解  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

#### 4 数值示例

为了验证本文方法的可行性,选取文献[5]中给出的数值示例进行说明:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 - c(t)x_1, \end{aligned} \tag{26}$$

其中  $c(t)$  为一时变不确定参数,且满足  $0 < c(t) < c$ .

在求解相关定理之前,假设比例参数  $\alpha_i$  均按  $\alpha_i = 0.05 \cdot 1 (i = 1, 2)$  进行网格搜索,则根据系统(26),可得该系统的系统矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - c & -1 \end{bmatrix}.$$

首先应用定理1求解线性矩阵不等式组(12)~(14).经搜索发现,只有当 $c = 3.82$ 时才能找到使系统(26)鲁棒稳定的可行解对 $(\delta_1, \delta_2)$ .显然,该结果不如文献[5]中给出的,因为不等式(13)中额外包含了约束(18),由此造成结果具有一定的保守性.

现设计一个使系统(26)鲁棒稳定的状态反馈控制器.取 $B_1 = B_2 = [0 \ 1]^T$ 作为系统的控制输入矩阵.求解定理2中的线性矩阵不等式组(20)~(22),并以 $\min K_2$ 为最终目标来搜索符合要求的可行解对 $(\delta_1, \delta_2)$ .

当 $c = 20$ 时,使系统(26)鲁棒稳定的控制器的状态反馈增益为 $K = [-5.8761 \quad -7.5904]$ .与之对应的比例参数分别为 $\delta_1 = 0.7000$ 和 $\delta_2 = 0.5500$ .

图1和图2分别描绘了在 $c = 20$ 时,可行解 $(\delta_1, \delta_2)$ 的范围及在初始条件 $x_0 = [0.1 \ 0]^T$ 下的系统状态响应曲线.

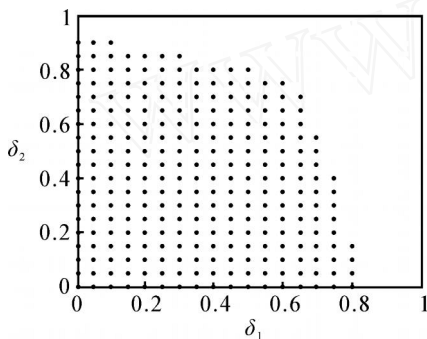


图1  $c = 20$ 时的所有可行解对 $(\delta_1, \delta_2)$

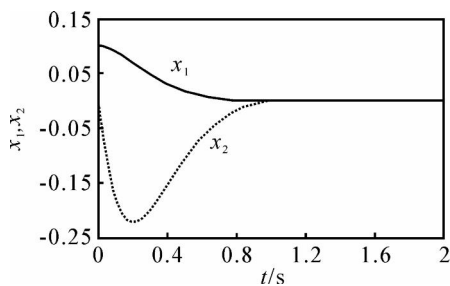


图2  $c = 20$ 时系统的状态响应曲线

## 5 结 论

本文针对系统矩阵仅由两个矩阵的凸组合构成的线性连续时变不确定系统,研究了其鲁棒控制器的设计问题.根据投影定理,通过引入一个附加矩阵,以线性矩阵不等式的形式给出了系统鲁棒控制器存在的充分条件,并且所设计的控制器保证了系统的鲁棒稳定性.最后的数值示例很好地说明了本文方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Blanchini F, Miami S. A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(3): 641-647.
- [2] Bobyleva O N. Piecewise-linear Lyapunov functions for linear stationary systems[J]. Automation and Remote Control, 2002, 63(4): 540-549.
- [3] Feng G. Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1108-1112.
- [4] Johansson M. Piecewise linear control systems - A computational approach [M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
- [5] Xie L, Shishkin S, Fu M. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems[J]. Systems and Control Letters, 1997, 31(3): 165-171.
- [6] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [7] Almeida H L S, Bhaya A, Falcão D M, et al. A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2001, 11(4): 357-371.
- [8] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control [J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1994, 4(4): 421-448.