文章编号: 1001-0920(2009)04-0587-06

具有时延和丢包的网络控制系统 H∞状态反馈控制

谢德晓, 韩笑冬, 黄 鹤, 王执铨
(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘 要: 研究了具有时延和数据包丢失的网络控制系统 H_∞状态反馈控制问题. 考虑了网络控制系统中同时存在时延和数据包丢失的情况,将丢包过程建模为有限状态的马尔可夫过程. 在此模型的基础上,利用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法,给出了保持系统均方稳定且满足 H_∞性能的控制器存在的充分条件,并给出了相应的设计方法. 最后数例仿真结果表明了控制器设计方法的有效性.

关键词: 网络控制系统; 数据包丢失; 时延; H_∞控制; 状态反馈
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

H∞ state feedback control for networked control system with time-delay and packet dropout

XIE De-xiao, HAN Xiao-dong, HUANG He, WANG Zhi-quan
(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: XIE De-xiao, E-mail: xdx_115@yahoo.com.cn)

Abstract: The H_∞ state feedback control problem of networked control system (NCS) with time-delay and data packet dropout is studied. Time-delay and the data packet dropout are both considered in networked control system and the data packet dropout is modeled as finte state Markovian process. Based on this model, the sufficient conditions for the existence of controller, which guarantee the mean-square stability of NCS and meet the H_∞ performance, are given via Lyapunov stability theory and linear matrix inequality technique. The corresponding controller desgin techniques are also provided. Finally, the simulation results of numerical example show the effectiveness of the method.

Key words: Networked control system; Data packet dropout; Time-delay; H_∞ control; State feedback

1 引 言

网络控制系统(NCS)是指控制系统的各部件(传感器、控制器、执行器等)通过通信网络连接构成的闭环控制系统[1-3]. 与以往点到点的控制系统相比,网络控制系统具有资源共享、布线少、易于安装维护、低开销等优点. 然而,随着网络的引入,也带来了其他新的问题. 由于网络带宽总是有限的,网络中不可避免地存在着网络资源竞争和网络拥塞问题,从而导致数据包丢失或传输延迟[4,5],同时 NCS 还存在量化误差[6]、时序错乱等其他问题.

数据包的丢失和时延是网络控制系统研究中的重要问题. 目前,对于具有数据包丢失和时延的 NCS 的研究已经取得了一些成果[2,7-9]. 文献[2]考虑了传感器和控制器之间存在数据包丢失的情况,将数据包丢失建模为伯努利随机变量,从而将具有数据丢包的 NCS 建模成异步动态系统(ADS). 基于 ADS 的控制理论,给出保持系统指数稳定的充分条件,但是需要求解双线性矩阵不等式(BMI). 文献[7]将具有任意有界丢包的 NCS 建模成切换系统,研究了系统的稳定性问题,并给出了控制器的设计方法. 但以上文献都仅考虑测量数据的丢失,并没有考虑控制器数据的丢失. 文献[8]考虑了传感器与控制器之间和控制器与执行器之间都存在丢包的情况,并将丢包过程建模为马尔可夫过程,将 NCS 建模为含有马尔可夫参数的离散时间系统. 建立丢包依赖的 Lyapunov 函数,给出了保证系统均方稳定的充分条件,并给出了控制器的设计方法. 文献[9]同时考虑了数据包丢失和短时延问题,给出了系统指数稳定的充要条件. 以上文献都是有关系统稳定性的研究,没有考虑 NCS 的抗干扰能力,而系统往

收稿日期: 2008-03-23; **修回日期**: 2008-06-05.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574082).
作者简介: 谢德晓(1984—),男,浙江温州人,博士生,从事网络控制系统的研究; 王执铨(1939—),男,武汉人,教授,博士生导师,从事动态大系统的容错控制、混沌控制理论与应用等研究.

往会受到外界扰动或噪声影响,考虑 NCS 的 H_∞扰动衰减指标是很有必要的.文献[10]将 NCS 直接建模为马尔可夫线性系统(MJLS),利用 MJLS 的有界实引理[11],研究了 NCS 的 H_∞控制问题,给出了 NCS 动态输出反馈控制器的设计方法,但并没有考虑网络时延的问题,构造的 Lyapunov 函数也不是丢包依赖的.

本文考虑网络控制系统中同时存在数据包丢失和时延的情况,将丢包过程建模为有限状态的马尔可夫过程,在该网络环境下,研究 NCS 的 H_∞控制问题.利用 Lyapunov 稳定理论和线性矩阵不等式方法,给出了保持系统均方稳定且满足 H_∞扰动衰减指标的充分条件,并给出了控制器的设计方法.最后给出的数例仿真验证了控制器设计方法的有效性.

2　问题描述

在网络控制系统(如图 1)中,考虑如下连续被控对象:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t),\quad z(t) = Cx(t). \tag{1}$$

其中:$x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量;$u(t) \in R^m$ 是系统的控制输入;$w(t) \in R^q$ 是外部扰动输入;$z(t) \in R^p$ 是系统被调输出;A,B,C,D 分别是具有适当维数的矩阵.假设传感器的工作方式是时间驱动,控制器和执行器的工作方式是事件驱动,且数据是单包传送的.假设系统的状态完全可测,采用线性状态反馈 $u(t) = Kx(t)$,K表示待求的状态反馈增益矩阵.

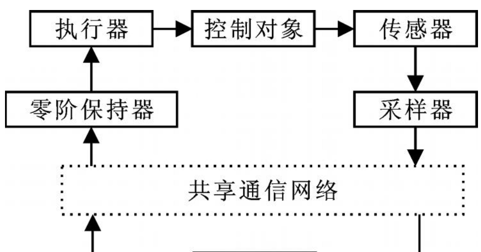

图 1　具有数据包丢失的网络控制系统模型

定义 1　数据包序列 $\Psi = \{i_1, i_2, i_3, \cdots\}$,表示零阶保持器成功接受到的数据包采样时刻.其中 i_k 表示第 k 次到达零阶保持器的数据包对应采样器 i_k 时刻的采样数据,即 i_k 时刻对应的数据包未丢失,若 $\forall k \in Z_+, i_{k+1} - i_k = 1$,则表明没有数据包丢失.令 $i_0 = 0$,则 $\bigcup_{k=0}^{\infty}[i_k, i_{k+1}) = [0,\infty)$.

定义 2　随机丢包过程,连续丢包数 $\eta(i_k) = i_{k+1} - i_k$,$i_k \in \Psi$.假设连续丢包数有界,上界为 s,即 $\max\{\eta(i_k), k \in Z_+\} = s$,则 $\eta(i_k) \in S = \{1,2,\cdots,s\}$,且满足马尔可夫链分布过程,其转移概率阵 $\Pi = (\pi_{ij}) \in R^{s\times s}$,其中 $\pi_{ij} = P\{\eta(i_{k+1}) = j \mid \eta(i_k) = i\}$,$i,j \in S$,并且 $\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij} = 1$ 对任何 $i \in S$ 成立.

注 1　从实际的物理系统出发,系统对数据包丢失容忍是有限的,连续丢包数分布满足马尔可夫过程是符合实际情况的.

根据以上被控对象和网络参数的描述,并结合文献[12]中的模型,实际的网络控制系统可以表示为

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t);\\ &z(t) = Cx(t),\ t \in [i_k h + \tau_k, i_{k+1}h + \tau_{k+1});\\ &u(t^+) = Kx(t - \tau_k),\ t \in \{i_k h + \tau_k, k = 1,2,\cdots\}.\end{aligned} \tag{2}$$

其中:h为传感器采样周期,τ_k为数据从传感器到执行器时延.

为简化分析,假设 $\tau_k < h$,将系统(2)离散化可得闭环系统

$$\begin{aligned}&x(l+1) = \\ &\Phi x(l) + \Gamma_1 u(l) + \Gamma_2 u(l-1) + Fw(l),\\ &z(l) = Cx(l),\\ &u(l) = Kx(i_k),\ l \in [i_k, i_{k+1}).\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\Phi = e^{Ah},\ \Gamma_1 = \int_0^{h-\tau_k} e^{As}\mathrm{d}sB,$$

$$\Gamma_2 = \int_{h-\tau_k}^{h} e^{As}\mathrm{d}sB,\ \Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

为了定理证明的需要,给出如下引理:

引理 1(Schur 补引理)　对给定对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$,以下 3 个条件是等价的:

1) $S < 0$,

2) $S_{11} < 0$,$S_{22} - S_{12}^{\mathrm T}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$,

3) $S_{22} < 0$,$S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm T} < 0$.

引理 2　对于任意的向量 a,b和正定矩阵 X,有以下不等式成立:

$$\pm 2a^{\mathrm T}b \le a^{\mathrm T}X^{-1}a + b^{\mathrm T}Xb.$$

3　NCS 稳定性分析

定义 3　对于系统(3),$w(l) \equiv 0$,在初始条件 $x(0) = x_0$ 的情况下,若系统的状态解满足 $\lim_{l\to\infty}E(\|x(l,x_0)\|^2) = 0$,则称系统(3)是均方稳定的.

定理 1　对于给定的控制器 K,如果存在正定矩阵 P_i, R_i, Q,使得下列矩阵不等式对 $\forall i \in S$ 成立:

$$\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\begin{bmatrix}\Delta_{1j} + W_{1i} - P_i & * & *\\ \Delta_{2j}^{\mathrm T} - N_{1i}^{\mathrm T} + N_{2i} & \Delta_{3j} + W_{2i} & *\\ N_{1i}^{\mathrm T} & N_{2i}^{\mathrm T} & -R_i\end{bmatrix} < 0, \tag{4}$$

则系统(3) 是均方稳定的. 其中

$$\Delta_{1j} = \phi_{1j}^{\mathrm{T}} P_j \phi_{1j} + (\phi_{1j} - I)^{\mathrm{T}} R_j (\phi_{1j} - I);$$
$$\Delta_{2j} = \phi_{1j}^{\mathrm{T}} P_j \phi_{2j} + (\phi_{1j} - I)^{\mathrm{T}} R_j \phi_{2j};$$
$$\Delta_{3j} = \phi_{2j}^{\mathrm{T}} (P_j + R_j) \phi_{2j}, W_{1i} = Q + N_{1i} + N_{1i}^{\mathrm{T}};$$
$$W_{2i} = -Q - N_{2i} - N_{2i}^{\mathrm{T}}, \phi_{2j} = \boldsymbol{\Phi}^{j-1} \boldsymbol{\Gamma}_2 K;$$
$$\phi_{1j} = \boldsymbol{\Phi}^j + \boldsymbol{\Phi}^{j-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 K + \delta(j) \sum_{n=0}^{j-2} \boldsymbol{\Phi}^n \boldsymbol{\Gamma}_3 K;$$
$$\delta(j) = \begin{cases} 0, & j \in S, j = 1; \\ 1, & j \in S, j \neq 1. \end{cases}$$

证明　令 $r = l - i_k$,则根据系统(3) 可推得

$$x(l) = \Big[\boldsymbol{\Phi}^r + \boldsymbol{\Phi}^{r-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 K + \delta(r) \sum_{n=0}^{r-2} \boldsymbol{\Phi}^n \boldsymbol{\Gamma}_3 K\Big] x(i_k) + \boldsymbol{\Phi}^{r-1} \boldsymbol{\Gamma}_2 K x(i_{k-1}),$$
$$z(l) = Cx(l), \ l \in (i_k, i_{k+1}]. \tag{5}$$

令

$$\xi = [x^{\mathrm{T}}(i_k) \quad x^{\mathrm{T}}(i_{k-1})]^{\mathrm{T}}, \ e(l) = x(l) - x(i_k),$$
$$\eta(i_{k-1}) = i_k - i_{k-1} = i, \ \eta(i_k) = i_{k+1} - i_k = j.$$

构造丢包依赖的 Lyapunov 函数

$$V(l) = x^{\mathrm{T}}(l) P_r x(l) + x^{\mathrm{T}}(i_k) Q x(i_k) + e^{\mathrm{T}}(l) R_r e(l),$$
$$l \in (i_k, i_{k+1}], \ r = l - i_k. \tag{6}$$

则

$$V(i_k) = x^{\mathrm{T}}(i_k) P_{\eta(i_{k-1})} x(i) + x^{\mathrm{T}}(i_k) Q x(i_{k-1}) + e^{\mathrm{T}}(i_k) R_{\eta(i_{k-1})} e(i_k).$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta V = {} & E\{V(i_{k+1}) - V(i_k)\} = \\ & E\{x^{\mathrm{T}}(i_{k+1}) P_{\eta(i_k)} x(i_{k+1}) + x^{\mathrm{T}}(i_k) Q x(i_k) + \\ & e^{\mathrm{T}}(i_{k+1}) R_{\eta(i_k)} e(i_{k+1}) - x^{\mathrm{T}}(i_k) P_{\eta(i_{k-1})} x(i_k) - \\ & x^{\mathrm{T}}(i_{k-1}) Q x(i_{k-1}) - e^{\mathrm{T}}(i_k) R_{\eta(i_{k-1})} e(i_k)\}.\end{aligned} \tag{7}$$

根据引理 2,对于任意正定矩阵 R_i, $N_i = \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix} \in R^{2n \times n}$,有以下不等式成立:

$$-e^{\mathrm{T}}(i_k) R_i e(i_k) \leq \xi^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix} R_i^{-1} [N_{1i}^{\mathrm{T}} \ N_{2i}^{\mathrm{T}}] \xi + 2\xi^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix} e(i_k). \tag{8}$$

结合式(5),(7) 和(8),故有

$$\Delta V \leq \xi^{\mathrm{T}} \left\{ \sum_{j=1}^{s} \pi_{ij} \begin{bmatrix} \Delta_{1j} + W_{1i} - P_i & * \\ \Delta_{2j}^{\mathrm{T}} - N_{1i}^{\mathrm{T}} + N_{2i} & \Delta_{3j} + W_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix} R_i^{-1} [N_{1i}^{\mathrm{T}} \quad N_{2i}^{\mathrm{T}}] \right\} \xi. \tag{9}$$

利用 Schur 补引理及式(4),可得对于任意 $\xi \neq 0$,有 $\Delta V < 0$, $\lim_{i_k \to \infty} E(V(i_k)) = 0$,故有

$$\lim_{i_k \to \infty} E(\|x(i_k, x(i_0))\|^2) = 0.$$

对于 $l \in (i_k, i_{k+1}]$,结合式(5) 和(6),有

$$V(l) = \xi^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Delta_{1r} + Q & \Delta_{2r} \\ * & \Delta_{3r} \end{bmatrix} \xi,$$

其中 $r = l - i_k$. 令

$$\alpha_1 = \max_{r \in S} \left\| \begin{matrix} \Delta_{1r} + Q & \Delta_{2r} \\ * & \Delta_{3r} \end{matrix} \right\|_2,$$
$$\alpha_2 = \min_{i \in S} \left\| \begin{matrix} P_i + Q + R_i & -R_i \\ -R_i & R_i \end{matrix} \right\|_2, \ \alpha = \alpha_1 / \alpha_2,$$

可得 $V(l) \leq \alpha V(i_k)$,故有 $\lim_{l \to \infty} E(V(l)) = 0$. 因此 $\lim_{l \to \infty} E(\|x(l, x_0)\|^2) = 0$,即系统(3) 是均方稳定的. □

下面基于定理 1,给出使得系统(3) 均方稳定的控制器设计方法.

定理 2　如果存在正定矩阵 X_i, Z_i, $\overline{Q}$ 及矩阵变量 G, Y, N_{1i}, N_{2i},使得下列矩阵不等式对 $\forall i \in S$ 成立:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{1i} + \boldsymbol{\Omega}_{1i} & * & * & * & * \\ -\overline{N}_{1i}^{\mathrm{T}} + \overline{N}_{2i} & \widetilde{W}_{2i} & * & * & * \\ \overline{N}_{1i}^{\mathrm{T}} & \overline{N}_{2i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{2i} & * & * \\ \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & 0 & -\overline{X} & * \\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & 0 & 0 & -\overline{Z} \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

则当 $K = YG^{-1}$ 时,系统(3) 是均方稳定的. 其中

$$\widetilde{W}_{1i} = \overline{Q} + \overline{N}_{1i} + \overline{N}_{1i}^{\mathrm{T}}; \ \widetilde{W}_{2i} = -\overline{Q} - \overline{N}_{2i} - \overline{N}_{2i}^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{1i} = X_i - G - G^{\mathrm{T}}; \ \boldsymbol{\Omega}_{2i} = Z_i - G - G^{\mathrm{T}};$$
$$\overline{X} = \mathrm{diag}\{X_1 \cdots X_s\}; \ \overline{Z} = \mathrm{diag}\{Z_1 \cdots Z_s\};$$
$$\Xi_{i1} = [\sqrt{\pi_{i1}} \bar{\phi}_{11}^{\mathrm{T}} \cdots \sqrt{\pi_{is}} \bar{\phi}_{1s}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$
$$\Xi_{i2} = [\sqrt{\pi_{i1}} \bar{\phi}_{21}^{\mathrm{T}} \cdots \sqrt{\pi_{is}} \bar{\phi}_{2s}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$
$$\Xi_{i3} = [\sqrt{\pi_{i1}} (\bar{\phi}_{11}^{\mathrm{T}} - I) \cdots \sqrt{\pi_{is}} (\bar{\phi}_{1s}^{\mathrm{T}} - I)]^{\mathrm{T}};$$
$$\bar{\phi}_{1j} = \boldsymbol{\Phi}^j G + \boldsymbol{\Phi}^{j-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 Y + \delta(j) \sum_{n=0}^{j-2} \boldsymbol{\Phi}^n \boldsymbol{\Gamma}_3 Y;$$
$$\bar{\phi}_{2j} = \boldsymbol{\Phi}^{j-1} \boldsymbol{\Gamma}_2 Y;$$
$$\delta(j) = \begin{cases} 0, & j \in S, j = 1; \\ 1, & j \in S, j \neq 1, \end{cases}$$

证明　利用 Schur 补引理,式(4) 等价于

$$\begin{bmatrix} W_{1i} - P_i & * & * & * & * \\ -N_{1i}^{\mathrm{T}} + N_{2i} & W_{2i} & * & * & * \\ N_{1i}^{\mathrm{T}} & N_{2i}^{\mathrm{T}} & -R_i & * & * \\ \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & 0 & -\Sigma_1 & * \\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & 0 & 0 & -\Sigma_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其中

$$\Xi_{i1} = [\sqrt{\pi_{i1}} \phi_{11}^{\mathrm{T}} \cdots \sqrt{\pi_{is}} \phi_{1s}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$\Xi_{i2} = [\sqrt{\pi_{i1}} \phi_{21}^{\mathrm{T}} \cdots \sqrt{\pi_{is}} \phi_{2s}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{i3} = [\sqrt{\pi_{i1}}(\phi_{11}^{\mathrm T} - I) \cdots \sqrt{\pi_{is}}(\phi_{1s}^{\mathrm T} - I)]^{\mathrm T},$$

$$\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{P_1^{-1} \cdots P_s^{-1}\},\ \Sigma_2 = \mathrm{diag}\{R_1^{-1} \cdots R_s^{-1}\}.$$

注意到 $(G^{-1} - P_i)^{\mathrm T} P_i^{-1}(G^{-1} - P_i) \geq 0$,则有 $-P_i \leq G^{-\mathrm T} P_i^{-1} G^{-1} - G^{-1} - G^{-\mathrm T} = \Omega_{1i}$. 同理有 $-R_i \leq G^{-\mathrm T} R_i^{-1} G^{-1} - G^{-1} - G^{-\mathrm T} = \Omega_{2i}$. 因此若要式(11)成立,只需

$$\begin{bmatrix} W_{1i} + \Omega_{1i} & * & * & * & * \\ -N_{1i}^{\mathrm T} + N_{2i} & W_{2i} & * & * & * \\ N_{1i}^{\mathrm T} & N_{2i}^{\mathrm T} & \Omega_{2i} & * & * \\ \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & 0 & -\Sigma_1 & * \\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & 0 & 0 & -\Sigma_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

式(12)两边分别乘以 $\mathrm{diag}\{G^{\mathrm T}, G^{\mathrm T}, G^{\mathrm T}, I, I\}$ 和 $\mathrm{diag}\{G, G, G, I, I\}$,并设 $X_i = P_i^{-1}, Z_i = R_i^{-1}, \overline{N_{1i}} = G^{\mathrm T} N_{1i} G, \overline{N_{2i}} = G^{\mathrm T} N_{2i} G, \overline{Q} = G^{\mathrm T} Q G, Y = KG$,可得式(10). □

4 NCS H_∞ 优化控制

定义4 闭环系统(3)满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ 是指在零初始条件下,当 $w(l) \in l_2^q$ 是能量有限的扰动信号时,满足 $E\{\|z(l)\|_2\} \leq \gamma E\{\|w(l)\|_2\}$,其中

$$l_2^q = \{\{x(l)\}_{l=0}^{\infty}\} : \forall l, x(l) \in R^q.\ \|x\|_2 < \infty\},$$

$$\|w(l)\|_2^2 = \sum_{l=0}^{\infty} E[w(l)^{\mathrm T} w(l)],$$

$$\|z(l)\|_2^2 = \sum_{l=0}^{\infty} E[z(l)^{\mathrm T} z(l)].$$

定义5 对于给定的 $\gamma > 0$,若存在控制器 K,使得闭环系统(3)满足以下期望性能:1)闭环系统(3)是均方稳定的;2)在零初始条件下,闭环系统(3)满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ,则称 K 是闭环系统(3)的 γ 次优 H_∞ 控制律.

定理3 对于给定的控制器 K,正标量 γ 及转移概率阵 $\Pi = (\pi_{ij}) \in R^{s \times s}$,如果存在正定矩阵 P_i, R_i, Q 及矩阵 N_{1i}, N_{2i},使得对所有 $i \in S$ 满足下列矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 \\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 \\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm T} \begin{bmatrix} \overline{P} & * & * \\ 0 & \overline{R} & * \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 \\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 \\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} W_{1i} - P_i & * & * & * \\ -N_{1i}^{\mathrm T} + N_{2i} & W_{2i} & * & * \\ 0 & 0 & -\Lambda_i & * \\ N_{1i}^{\mathrm T} & N_{2i}^{\mathrm T} & 0 & -R_i \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

则系统(3)是均方稳定的,且满足 H_∞ 扰动衰减指标 Λ_i. 其中

$$W_{1i} = Q + N_{1i} + N_{1i}^{\mathrm T};\ W_{2i} = -Q - N_{2i} - N_{2i}^{\mathrm T};$$

$$\overline{P} = \mathrm{diag}\{P_1 \cdots P_s\};\ \overline{R} = \mathrm{diag}\{R_1 \cdots R_s\};$$

$$\Lambda_i = \mathrm{diag}\{\alpha_{i1}\gamma^2 I \cdots \alpha_{is}\gamma^2 I\};$$

$$\Xi_{i1} = [\sqrt{\pi_{i1}}\phi_{11}^{\mathrm T} \cdots \sqrt{\pi_{is}}\phi_{1s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T};$$

$$\Xi_{i2} = [\sqrt{\pi_{i1}}\phi_{21}^{\mathrm T} \cdots \sqrt{\pi_{is}}\phi_{2s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T};$$

$$\Xi_{i3} = [\sqrt{\pi_{i1}}(\phi_{11}^{\mathrm T} - I) \cdots \sqrt{\pi_{is}}(\phi_{1s}^{\mathrm T} - I)]^{\mathrm T};$$

$$\Xi_{i4} = [\sqrt{\alpha_{i1}}C\phi_{11}^{\mathrm T} \cdots \sqrt{\alpha_{is}}C\phi_{1s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T};$$

$$\Xi_{i5} = [\sqrt{\alpha_{i1}}C\phi_{21}^{\mathrm T} \cdots \sqrt{\alpha_{is}}C\phi_{2s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T};$$

$$\Psi_{i1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi_{i1}}\Phi^0 F & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \sqrt{\pi_{is}}\Phi^{s-1} F & \cdots & \sqrt{\pi_{is}}\Phi^0 F \end{bmatrix};$$

$$\Psi_{i2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_{i1}}C\Phi^0 F & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \sqrt{\alpha_{is}}C\Phi^{s-1} F & \cdots & \sqrt{\alpha_{is}}C\Phi^0 F \end{bmatrix};$$

$$\phi_{1j} = \Phi^j + \Phi^{j-1}\Gamma_1 K + \delta(j)\sum_{n=0}^{j-2}\Phi^n\Gamma_3 K;$$

$$\phi_{2j} = \Phi^{j-1}\Gamma_2 K;\ \alpha_{in} = \sum_{j=n}^{s}\pi_{ij}\ (n \in S);$$

$$\delta(j) = \begin{cases} 0,\ j \in s,\ j = 1; \\ 1,\ j \in s,\ j \neq 1. \end{cases}$$

证明 令 $r = l - i_k$. 根据系统(3)可推得

$$x(l) = \Big[\Phi^r + \Phi^{r-1}\Gamma_1 K + \delta(r)\sum_{n=0}^{r-2}\Phi^n\Gamma_3 K\Big]x(i_k) + \Phi^{r-1}\Gamma_2 K x(i_{k-1}) + \sum_{n=0}^{r-1}\Phi^n F w(i_k + r - 1 - n), \tag{14}$$

$$z(l) = Cx(l),\ l \in (i_k, i_{k+1}].$$

令 $\zeta = [x^{\mathrm T}(i_k)\ x^{\mathrm T}(i_{k-1})\ w^{\mathrm T}(i_k) \cdots w^{\mathrm T}(i_k + s - 1)]^{\mathrm T}$,构造 Lyapunov 函数如式(6),并设 $i_0 = 0, V(i_0) = 0$,有

$$J = \sum_{l=0}^{\infty} E\{z^{\mathrm T}(l)z(l) - \gamma^2 w^{\mathrm T}(l)w(l)\} \leq \overline{J} = \sum_{l=0}^{\infty} E[z^{\mathrm T}(l)z(l) - \gamma^2 w^{\mathrm T}(l)w(l) + V(i_{l+1}) - V(i_l)] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\Big[\sum_{n=1}^{\eta(i_k)} z^{\mathrm T}(i_k + n)z(i_k + n) - \sum_{n=0}^{\eta(i_k)-1}\gamma^2 w^{\mathrm T}(i_k + n)w(i_k + n) +$$

$$x^{\mathrm T}(i_{k+1})P_{\eta(i_k)}x(i_{k+1}) + x^{\mathrm T}(i_k)Qx(i_k) + e^{\mathrm T}(i_{k+1})R_{\eta(i_k)}e(i_{k+1}) - x^{\mathrm T}(i_k)P_{\eta(i_{k-1})}x(i_k) -$$

$$x^{\mathrm T}(i_{k-1})Qx(i_{k-1}) - e^{\mathrm T}(i_k)R_{\eta(i_{k-1})}e(i_k)\big]. \tag{15}$$

根据引理2,对于任意正定矩阵 R_i, $N_i = [N_{1i}^{\mathrm T}\quad N_{2i}^{\mathrm T}\quad 0]^{\mathrm T} \in R^{sn\times n}$,有以下不等式成立:

$$-e^{\mathrm T}(i_k)R_ie(i_k) \le \zeta^{\mathrm T}\begin{bmatrix} N_{1i}\\ N_{2i}\\ 0\end{bmatrix}R_i^{-1}[N_{1i}^{\mathrm T}\quad N_{2i}^{\mathrm T}\quad 0]\zeta + 2\zeta^{\mathrm T}\begin{bmatrix} N_{1i}\\ N_{2i}\\ 0\end{bmatrix}e(i_k). \tag{16}$$

结合式(14)～(16),可得

$$\bar J \le \sum_{k=0}^{\infty}\zeta^{\mathrm T}\left\{\begin{bmatrix}\Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1}\\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1}\\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\bar P & * & *\\ 0 & \bar R & *\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\times \begin{bmatrix}\Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1}\\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1}\\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}W_{1i}-P_i & * & *\\ -N_{1i}^{\mathrm T}+N_{2i} & W_{2i} & *\\ 0 & 0 & -\gamma\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{1i}\\ N_{2i}\\ 0\end{bmatrix}R_i^{-1}[N_{1i}^{\mathrm T}\quad N_{2i}^{\mathrm T}\quad 0]\right\}\zeta.$$

利用Schur补引理及式(13),可得对于任意 $\zeta\neq 0$,有 $J\le\bar J<0$,因此可得

$$\sum_{l=0}^{\infty}E\{z^{\mathrm T}(l)z(l)\} < \gamma^2\sum_{l=0}^{\infty}E\{w^{\mathrm T}(l)w(l)\},$$

系统(3)满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ. 根据Schur补引理,从式(13)可得式(4),则系统(3)是均方稳定的. 从而定理得证. □

下面基于定理3,给出保证系统(3)均方稳定且满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ 的控制器设计方法.

定理4　对于给定的正标量 γ,转移概率阵 $\Pi = (\pi_{ij})\in R^{s\times s}$,如果存在正定矩阵 X_i, Z_i, $\bar Q$,矩阵变量 G, Y, $\overline{N_{1i}}$, $\overline{N_{2i}}$,使得对所有的 $i\in S$,下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\widetilde W_{1i}+\Omega_{1i} & * & * & * & * & * & *\\ -\overline{N_{1i}}^{\mathrm T}+\overline{N_{2i}} & \widetilde W_{2i} & * & * & * & * & \\ 0 & 0 & -\Lambda_i & * & * & * & *\\ \overline{N_{1i}}^{\mathrm T} & \overline{N_{2i}}^{\mathrm T} & 0 & \Omega_{2i} & * & * & *\\ \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 & -\bar X & * & *\\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 & 0 & -\bar Z & *\\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2} & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

则系统(3)是均方稳定的,且满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ, $K = YG^{-1}$ 为系统(3)的 γ 次优 H_∞ 控制律. 其中

$\widetilde W_{1i} = \bar Q + \overline{N_{1i}} + \overline{N_{1i}}^{\mathrm T}$; $\widetilde W_{2i} = -\bar Q - \overline{N_{2i}} - \overline{N_{2i}}^{\mathrm T}$;

$\Omega_{1i} = X_i - G - G^{\mathrm T}$; $\Omega_{2i} = Z_i - G - G^{\mathrm T}$;

$\bar X = \mathrm{diag}\{X_1\cdots X_s\}$; $\bar Z = \mathrm{diag}\{Z_1\cdots Z_s\}$;

$\Lambda_i = \mathrm{diag}\{\alpha_1\gamma^2 I\cdots\alpha_s\gamma^2 I\}$;

$\Xi_{i1} = [\sqrt{\pi_{i1}}\bar\Phi_{11}^{\mathrm T}\cdots\sqrt{\pi_{is}}\bar\Phi_{1s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$;

$\Xi_{i2} = [\sqrt{\pi_{i1}}\bar\Phi_{21}^{\mathrm T}\cdots\sqrt{\pi_{is}}\bar\Phi_{2s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$;

$\Xi_{i3} = [\sqrt{\pi_{i1}}(\bar\Phi_{11}^{\mathrm T}-I)\cdots\sqrt{\pi_{is}}(\bar\Phi_{1s}^{\mathrm T}-I)]^{\mathrm T}$;

$\Xi_{i4} = [\sqrt{\alpha_1}C\bar\Phi_{11}^{\mathrm T}\cdots\sqrt{\alpha_s}C\bar\Phi_{1s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$;

$\Xi_{i5} = [\sqrt{\alpha_1}C\bar\Phi_{21}^{\mathrm T}\cdots\sqrt{\alpha_s}C\bar\Phi_{2s}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$;

$\bar\Phi_{1j} = \Phi^jG + \Phi^{j-1}\Gamma_1Y + \delta(j)\sum_{n=0}^{j-2}\Phi^n\Gamma_3Y$;

$\bar\Phi_{2j} = \Phi^{j-1}\Gamma_2Y$; $\alpha_n = \sum_{j=n}^{s}\pi_{ij}\ (n\in S)$;

$$\Psi_{i1} = \begin{bmatrix}\sqrt{\pi_{i1}}\Phi^0F & \cdots & 0\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \sqrt{\pi_{is}}\Phi^{s-1}F & \cdots & \sqrt{\pi_{is}}\Phi^0F\end{bmatrix};$$

$$\Psi_{i2} = \begin{bmatrix}\sqrt{\alpha_1}C\Phi^0F & \cdots & 0\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \sqrt{\alpha_s}C\Phi^{s-1}F & \cdots & \sqrt{\alpha_s}C\Phi^0F\end{bmatrix};$$

$$\delta(j) = \begin{cases}0, & j\in s, j = 1;\\ 1, & j\in s, j\neq 1.\end{cases}$$

证明　利用Schur补引理,式(13)等价于

$$\begin{bmatrix}W_{1i}-P_i & * & * & * & * & * & *\\ -N_{1i}^{\mathrm T}+N_{2i} & W_{2i} & * & * & * & * & *\\ 0 & 0 & -\Lambda_i & * & * & * & *\\ N_{1i}^{\mathrm T} & N_{2i}^{\mathrm T} & 0 & -R_i & * & * & *\\ \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 & -\bar P^{-1} & * & *\\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 & 0 & -\bar R^{-1} & *\\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2} & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix} < 0. \tag{18}$$

注意到 $(G^{-1}-P_i)^{\mathrm T}P_i^{-1}(G^{-1}-P_i)\ge 0$,则有 $-P_i\le G^{-\mathrm T}P_i^{-1}G^{-1}-G^{-1}-G^{-\mathrm T} = \Omega_{1i}$. 同理有 $-R_i\le G^{-\mathrm T}R_i^{-1}G^{-1}-G^{-1}-G^{-\mathrm T} = \Omega_{2i}$. 因此,若要式(18)成立,只需

$$\begin{bmatrix}W_{1i}+\Omega_{1i} & * & * & * & * & * & *\\ -N_{1i}^{\mathrm T}+N_{2i} & W_{2i} & * & * & * & * & *\\ 0 & 0 & -\Lambda_i & * & * & * & *\\ N_{1i}^{\mathrm T} & N_{2i}^{\mathrm T} & 0 & \Omega_{2i} & * & * & *\\ \Xi_{i1} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 & -\bar P^{-1} & * & *\\ \Xi_{i3} & \Xi_{i2} & \Psi_{i1} & 0 & 0 & -\bar R^{-1} & *\\ \Xi_{i4} & \Xi_{i5} & \Psi_{i2} & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix} < 0. \tag{19}$$

式(19)两边分别乘以 $\mathrm{diag}\{G^{\mathrm T},G^{\mathrm T},I,G^{\mathrm T},I,I,I\}$ 和 $\mathrm{diag}\{G,G,I,G,I,I,I\}$,并设 $X_i = P_i^{-1}$, $Z_i = R_i^{-1}$, $\overline{N_{1i}} = G^{\mathrm T}N_{1i}G$, $\overline{N_{2i}} = G^{\mathrm T}N_{2i}G$, $\bar Q = G^{\mathrm T}QG$, $Y = KG$. 可得式(17). □

推论1　若存在正定矩阵 X_i, Z_i, $\bar Q$ 及矩阵变量 G, Y, $\overline{N_{1i}}$, $\overline{N_{2i}}$,使得对所有 $i\in S$,以下的优化问题有可行解:

$$\min(\gamma^2):(X_i, Z_i, \bar Q, Y, G, \overline{N_{1i}}, \overline{N_{2i}}, \gamma^2),$$

s.t. LMI(17).

记可行解为 $(X_{iL}, Z_{iL}, \bar{Q}_L, Y_L, G_L, \overline{N_{1iL}}, \overline{N_{2iL}}, \gamma_L^2)$,则称 $K_L = Y_L G_L^{-1}$ 是系统(3) 的 γ_L 最优 H_∞ 控制律.

注 2 推论 1 通过求解优化问题,得到最小的 H_∞ 扰动衰减指标上界 γ_L. 若给定 H_∞ 扰动衰减指标 $\gamma > \gamma_L$,则线性矩阵不等式组(17) 有解.

5 数例仿真

考虑连续被控对象(1),其中参数为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 1], \ F = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

设采样周期 $h = 0.3$, $\tau_k = 0.1$. 离散化系统可得系统参数

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.7431 & 0.0536 \\ 0.0803 & 1.0644 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.1817 & 0.0257 \\ 0.0261 & 0.4088 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.0785 & 0.0169 \\ 0.0173 & 0.2113 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0.2603 & 0.0426 \\ 0.0434 & 0.6201 \end{bmatrix}.$$

假设丢包的上界 $s = 4$,并记丢包转移概率矩阵

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

根据推论 1,使用 Matlab 工具箱中的优化问题求解器 mincx 求解线性矩阵不等式(17),得到最小的 H_∞ 扰动衰减指标上界 $\gamma_L = 1.088$. 根据定理 4,取 H_∞ 扰动衰减指标上界 $\gamma = 1.4142$. 求解线性矩阵不等式(17),可得

$$Y = \begin{bmatrix} -20.0818 & 4.9424 \\ 27.0561 & -18.6121 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 99.2446 & -76.3315 \\ -74.6249 & 59.5351 \end{bmatrix}.$$

从而可得 γ 次优 H_∞ 控制律

$$K = \begin{bmatrix} -3.8942 & -4.9098 \\ 1.0450 & 1.0272 \end{bmatrix}.$$

设系统初始状态 $x_0 = [2 \ 4]^{\mathrm{T}}$,图 2 表示系统状态零输入响应曲线. 从仿真结果可得,系统是均方稳定的. 当系统扰动 $w(k)$ 是幅值为 1,周期为 3s 的正弦信号,作用时间为 3s 时,系统的被调输出如图 3 所示. 经计算可得 $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$,满足 H_∞ 扰动衰减指标.

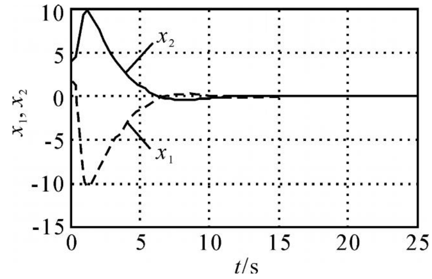

图 2 系统状态零输入响应曲线

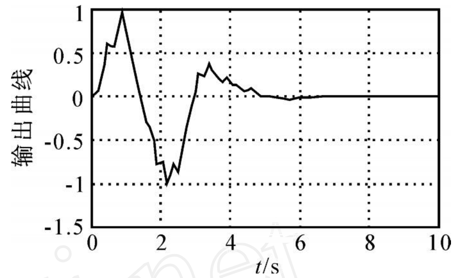

图 3 被调输出曲线

6 结 论

本文针对同时存在数据包丢失和时延的网络控制系统,考虑在传感器和控制器之间、控制器和执行器之间都存在网络时延和丢包的情况,并将丢包过程建模为有限状态的马尔可夫过程. 利用 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 方法,构造了丢包依赖的 Lyapunov 函数,给出了保证系统均方稳定且满足 H_∞衰减指标的状态反馈控制器设计方法. 仿真结果表明,在本文设计的控制器控制下,系统均方稳定且满足 H_∞性能,验证了控制器设计方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Hespanha J P, Payam N, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 138-162.

[2] Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.

[3] Walsh G C, Ye H. Scheduling of networked control systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(l): 57-65.

[4] Azimi-Sadjadi B. Stability of networked control systems in the presence of packet losses[C]. Proc of the Conf on Decision and Control. Hawaii, 2003: 676-681.

[5] Nilsson J. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays[J]. Automatica, 1998, 34(1): 57-64.

(下转第 597 页)

[3] Kliem R L, Ludin I S. The people side of project management[M]. Aldershot: Gower, 1992.
[4] Turner J R. Contracting for project management[M] Aldershot: Gower Publishing Limited, 2003.
[5] PMI. A guide to project management body of knowledge [M]. Newtown Square: PMI, 2000.
[6] Kim E, Well W G, Duffey M R. A model for effective implementation of earned value management methodology[J]. Int J of Project Management, 2003, 21(5): 375-382.
[7] Turner J R. Towards a theory of project management: The nature of the project [J]. Int J of Project Management, 2006, 24(1): 1-3.
[8] Turner J R. Towards a theory of project management: The nature of the project governance and project management[J]. Int J of Project Management, 2006, 24 (2): 93-95.
[9] Turner J R. Towards a theory of project management: The functions of project management [J]. Int J of Project Management, 2006, 24(3): 187-189.
[10] Turner J R. Towards a theory of project mmanagement: The nature of the functions of project management[J]. Int J of Project Management, 2006, 24(4): 277-279.
[11] Chen X P, Chen C C. On the intricacies of the Chinese Guanxi: A process model of Guanxi development[J]. Asia Pacific J of Management, 2004, 21(3): 305-324.
[12] Xin K R, Pearce J L. Guanxi: Connections as substitutes for formal institutional support [J]. Academy of Management J, 1996, 39(6): 1641-1658.
[13] Yang M M. Gifts, favors and banquets: The arts of social relationship in China[M]. New York: Cornell University Press, 1994.
[14] Park S H, Luo Y. Guanxi and organizational dynamics: Organizational networking in Chinese firms [J]. Strategic Management J, 2001, 22(5): 455-477.
[15] Li J S. Relation-based versus rule-based governance: An explanation of the East Asian Miracle and Asian Crisis[J]. Review of Int Economics, 2003, 11(4): 651-673.
[16] Coleman J. Social capital in the creation of human capital[J]. American of Sociology, 1988, 94(S): 95-120.
[17] Tsang E. Can Guanxi be a source of sustained competitive advantage for doing business in China? [J]. Academy of Management Executive, 1998, 12 (2): 64-73.
[18] Wjnen G, Kor R. Managing unique assignments: A team approach to projects and programs [M]. Aldershot: Gower Publishing, 2000.
[19] Laffont J J, Martimort D. The theory of incentives: The principal-agent model[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.

(上接第 592 页)

[6] Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(7): 1279-1289.
[7] Yu M, Wang L, Chu T, et al. Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach [C]. The 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Atlantis, 2004: 3539-3544.
[8] Xiong J L, Lam J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss [J]. Automatica, 2007, 43(1): 80-87.
[9] **邱占芝, 张庆灵, 刘明. 有时延和数据包丢失的网络控制系统控制器设计**[J]. **控制与决策**, 2006, 21(6): 625-630.
(Qiu Z Z, Zhang Q L, Liu M. Controller design for networked control systems with time-delay and data packet dropout[J]. Control and Decision, 2006, 21(6): 625-630.)
[10] Seiler P, Sengupta R. An $H\infty$ approach to networked control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 356-364.
[11] Seiler P, Sengupta R. A bounded real lemma for jump systems[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2003, 48 (9): 1651-1654.
[12] Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2004, 51(11): 640-644.