第 24 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2009 年 4 月
Vol. 24 No. 4 Control and Decision Apr. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)04-0611-06

非线性切换系统的集合稳定性分析

林相泽[1,2], 邹 云[1]
(1. 南京理工大学 自动化学院, 南京 210094; 2. 南京农业大学 工学院, 南京 210031)

摘 要: 将输出对状态稳定和状态模可观测等概念进行推广,提出了输出对 $V(x)$ 稳定、小时间 $V(x)$ 可观测、大时间 $V(x)$ 可观测的定义. 利用上述定义,给出了非线性切换系统的 $V(x)$ 零值集稳定的充分条件. 分别利用统一 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数证明了所提出的结论,并详细讨论了输出对 $V(x)$ 稳定与输出对状态稳定及其他相关定义之间的关系. 数值例子验证了所提出结论的正确性.

关键词: 切换系统; 输出对状态稳定; 输出对 $V(x)$ 稳定; 集合稳定性
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Set stability analysis of nonlinear switched systems

LIN Xiang-ze[1,2], *ZOU Yun*[1]
(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. College of Engineering, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210031, China. Correspondent: LIN Xiang-ze, E-mail: xzlin@njau.edu.cn)

Abstract: The concepts of output-to-state stability and state norm observability are extended. The definitions of output-to-$V(x)$ stability, small-time $V(x)$ observability and large-time $V(x)$ observability are proposed for the nonlinear switched systems. Based on these new concepts, some sufficient conditions are proposed for that the zero-value set of the function $V(x)$ of the nonlinear switched systems is stable. The stability results are proved by using common Lyapunov function and multiple Lyapunov functions respectively. Finally, the relationship between the concepts proposed in this paper and the existing related definitions is discussed in details. Numerical examples verify the conclusion of the proposed method.

Key words: Switched systems; Output-to-$V(x)$ state stability; Output-to-stability; Set stability

1 引 言

切换系统是由一系列连续动态子系统和一个逻辑切换控制器组成的一类复杂的非线性系统,在机械控制系统、交通控制、汽车工业等领域得到了广泛应用. 近年来,对切换系统的研究受到了越来越多学者的关注,主要研究成果集中在切换系统的稳定性[1-3]、能控性和能观性[4-5]以及对满足优化指标的控制器的设计[6-7]等方面. 实际上,许多实际切换系统的稳定状态常常不是孤立平衡点,而是平衡点的集合或一个流形[8],如电子振荡器、人口动态变化、行走机器人等. 在集合稳定性分析中,不变性原理是常用的分析工具,目前对切换系统不变性原理的研究引起了众多学者的关注[2,3,9-11].

系统的可观测性(或可检测性)是控制系统的一个重要性质. 经典的非线性控制理论指出,如果非线性系统平衡点可检测,那么可设计静态输出反馈控制器,使得无源非线性系统渐近稳定[12]. 为研究无源非线性系统不变集的反馈镇定, Shiriaev[13]提出了 $V(x)$ 可检测的概念,其验证过程非常复杂.

近年来,众多学者提出各种切换系统的可观测性来研究系统的稳定性与反馈控制[2,3,14]. 上述研究成果主要讨论切换系统孤立平衡点的稳定性,要求系统有共同平衡点. 但是,实际系统的稳定状态可能不是一个孤立平衡点,而是一个状态集合(如极限环[15]),这需要研究切换系统的集合稳定性理论.

本文讨论切换系统的集合稳定性,提出了输出对 $V(x)$ 稳定和 $V(x)$ 可观测等概念. 给出了非线性切换系统的一类集合的稳定性判定定理,并分别利用统一 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数给出了定理的详细证明.

收稿日期: 2008-04-25; **修回日期**: 2008-08-08.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60474078,60574015,60304001); 江苏省农机基金项目(gxz08008).
作者简介: 林相泽(1977—),男,山东青岛人,助教,博士生,从事切换系统、复杂非线性系统控制等研究; 邹云(1962—),男,江苏宜兴人,教授,博士生导师,从事应急控制理论、微分代数系统理论等研究.

文中结论虽然主要讨论由函数 $V(x)$ 零值水平集表达的状态集合的稳定性,但在实际系统中有较广泛的应用范围. 例如,如果能够为切换系统的极限环找到一个函数 $V(x)$,满足在极限环上 $V(x)=0$,且系统满足文中定理的条件,那么极限环是渐近稳定的. 另外,如果函数 $V(x)$ 正定,那么文中定理退化为针对平衡点的稳定性判定定理. 所提出的输出对 $V(x)$ 稳定和 $V(x)$ 可观测等概念可通过比较函数法直接验证,不需要对函数进行求导等计算,验证相对简单. 另外,考虑的系统输出是一般的连续函数,不再局限于某种特定的形式,如切换系统 Lyapunov 函数导数的负数[3].

2 输出对 V(x) 稳定及相关概念

定义非线性系统为

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x), \\ y=h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中:$x\in X\subseteq R^n$ 为系统状态,$f(\cdot):R^n\to R^n$ 连续可微,$h(\cdot):R^n\to R^r$ 连续. 文中 $|\cdot|$ 表示欧式范数,$\|z\|_J$ 表示 $J\subset[0,\infty)$ 上信号 z 的最大模. 如果函数 $\gamma(\cdot):R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$ 连续、单增且 $\gamma(0)=0$,则称 $\gamma(\cdot)$ 是 K 函数,记为 $\gamma\in K$. 如果 $\gamma\in K$,当 $t\to\infty$ 时,$\gamma(\infty)\to\infty$,则称 $\gamma(\cdot)$ 是 K_∞ 函数,记为 $\gamma\in K_\infty$. 如果函数 $\beta(\cdot,\cdot):R_{\geq 0}\times R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$ 对固定的 t 和 s,$\beta(\cdot,t)\in K$,当 $t\to\infty$ 时,有 $\beta(s,t)$ 单调递减到 0,则称 $\beta(\cdot,\cdot)$ 是 KL 函数,记为 $\beta\in KL$.

定义 1[16] 假设 M 是一个非空集合. $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta(\varepsilon)>0$,使得 $d(x_0,M)<\delta(\varepsilon)\Rightarrow d(x(t,x_0),M)<\varepsilon$,$\forall t\geq 0$,则称系统(1) 关于 M 稳定;如果存在 M 邻域 $U\subseteq R^n$,$\forall x_0\in U$,$\lim\limits_{t\to\infty}d(x(t,x_0),M)=0$,则称系统(1) 关于 M 是吸引的;如果系统(1) 关于 M 是稳定且吸引的,则称系统(1) 关于 M 局部渐近稳定. 如果 $U=R^n$,系统(1) 关于 M 是稳定且吸引的,则称 M 全局渐近稳定.

输出对状态稳定[17,18] 定义了系统的一种可检测性,可以等价为定义 2.

定义 2 如果 $\exists\beta\in KL$,$\gamma\in K$,$\forall t\geq 0$,系统(1) 的轨迹存在,对 $\forall x_0\in X\subseteq R^n$,$y\in R^r$,有

$$|x(t)|\leq\beta(|x_0|,t)+\gamma(\|y\|_{[0,t]}),$$

则称系统输出对状态稳定.

为了研究切换系统的集合稳定性,提出输出对 $V(x)$ 稳定的概念.

定义 3 对于系统(1),如果 $\exists\beta\in KL$,$\gamma\in K$ 以及非负函数 $V(x)$,$\forall x_0\in X\subseteq R^n$,$y\in R^r$,$t\geq 0$,

$$V(x(t))\leq\beta(V(x_0),t)+\gamma(\|y\|_{[0,t]}), \tag{2}$$

则称系统输出对 $V(x)$ 稳定.

注 1 输出对 $V(x)$ 稳定是输出对状态稳定的推广,定义了系统状态集合 $\{x:V(x)=0\}$ 的一种可检测性. 如果 $\exists\beta\in KL$,$\gamma\in K$ 以及非负函数 $V(x)$,有 $V(x(t))\leq\beta(V(x_0),t)+\gamma(|y(t)|)$,那么系统显然是输出对 $V(x)$ 稳定的.

为研究切换系统平衡点的稳定性,Hespanha 提出了状态模可观测的概念.

定义 4[3] 对于系统(1),$\forall\tau>0$,$\exists\gamma\in K_\infty$,$|x(t)|\leq\gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})$,则称系统小时间状态模可观测;$\exists\tau>0$,$\gamma\in K_\infty$,$|x(t)|\leq\gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})$,则称系统大时间状态模可观测.

将上述概念进行适当推广,得到小时间 $V(x(t))$ 可观测和大时间 $V(x(t))$ 可观测的概念.

定义 5 对于系统(1),若存在非负函数 $V(x)$,$\forall\tau>0$,$\exists\gamma\in K_\infty$,$V(x(t))\leq\gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})$,则称系统小时间 $V(x(t))$ 可观测;若 $\exists\tau>0$,$\gamma\in K_\infty$,$V(x(t))\leq\gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})$,则称系统大时间 $V(x(t))$ 可观测.

引理 1[19] 对于系统(1),$\forall x_0\in R^n$,若系统轨迹 $x(t,x_0)$ 有界,$\int_0^\infty\|h(x(t,x_0))\|^p\mathrm{d}t<\infty$,$0<p<\infty$,那么 $\lim\limits_{t\to\infty}y=\lim\limits_{t\to\infty}h(x)=0$.

引理 2[16] (Gronwall 不等式) 设 k 为非负常数,若函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 连续非负 $(a\leq t\leq b)$,满足不等式 $f(t)\leq k+\int_a^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$,那么 $f(t)\leq k\mathrm{e}^{\int_a^t g(s)\mathrm{d}s}$.

定义 6[12] 对 $\forall a>0$,如果集合 $V^{-1}([0,a])=\{x\in X:0\leq V(x)\leq a\}$ 是紧集,则称 $V(\cdot):X\to R$ 适定.

3 切换系统的集合稳定性

定义切换系统

$$\begin{cases} \dot{x}=f_\sigma(x), \\ y=h(x). \end{cases} \tag{3}$$

其中:$x\in X\subseteq R^n$ 为系统状态,$y\in Y\subseteq R^m$ 为系统输出,$f_\sigma(\cdot)$ 连续可微,$h(\cdot)$ 连续,$f_\sigma(0)=0$,$h(0)=0$,函数 $\sigma(\cdot):[0,\infty)\to Q=\{1,2,\cdots,N\}$ 表示一个右端连续的逐段常值切换信号.

记 $t_i(i=1,2,\cdots)$ 是按照发生先后次序排列的不连续时间点(即 $t_1<t_2<\cdots<t_i<\cdots$),称为切换系统(3) 的切换时间点. 在区间 $[t_i,t_{i+1})$ 中 $\sigma(t)$ 为常值,将所有 $\sigma(t)=q(q\in Q)$ 的时间区间的起始时刻记为 $t_{q_k}(k=1,2,\cdots)$,显然,$\{t_{q_k}\}_{k=1}^\infty$ 是 $t_i(i=1,2,\cdots)$ 的子序列.

3.1 统一 Lyapunov 函数法

如果切换系统(3) 存在非负函数 $V(x)$,对任意切换序列,$V(x)$ 满足定义 3 中式(2),则可得一致输

出对 $V(x)$ 稳定的定义.

定义 7　如果切换系统(3) 存在函数 $\beta \in KL$, $\gamma \in K$ 及非负函数 $V(x)$, 使得对于任意切换信号 $\sigma(t)$, $\forall x_0 \in X \subseteq R^n$, $y \in R^r$, $t \geq 0$, 有

$$V(x(t)) \leq \beta(V(x_0), t) + \gamma(\|y\|_{[0,t]}), \quad (4)$$

则称切换系统一致输出对 $V(x)$ 稳定.

注 2　定义 7 的"一致"与文献[2] 中的"一致"意义相同,是指对切换序列的一致性,即式(4) 对所有切换序列都成立.

如果切换系统(3) 存在一个统一 Lyapunov 函数,可得如下切换系统(3) 集合稳定的定理:

定理 1　如果切换系统(3) 满足条件:

1) 存在非负光滑 Lyapunov 函数 $V(x)$, $\forall q \in Q$, $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f_q(x) \leq 0$, 且 $S_c = \{x \in X \subset R^n : V(x) \leq c\}$ 是紧集,其中 $c > 0$;

2) 切换系统(3) 一致输出对 $V(x)$ 稳定;

3) $\int_0^\infty \|h(x(t, x_0))\|^p \mathrm{d}t < \infty$, $0 < p < \infty$;

那么 $\forall x_0 \in S_c$, $S_0 = \{x \in X \subset R^n : V(x) = 0\}$ 渐近稳定. 如果 $\forall x_0 \in R^n$, $V(x)$ 适定,那么 S_0 全局渐近稳定.

证明　由定理 1 中假设 1) 可知,切换系统在任意切换信号作用下是稳定的且系统轨迹有界. 令

$$v(x(s, x_0)) = \int_s^\infty \|h(x(t, x_0))\|^p \mathrm{d}t,$$

由定理 1 中假设 3) 可知, v 是非负有界函数. 对 v 求导可得 $\dot{v}(x(s, x_0)) = -\|h(x(s, x_0))\|^p \leq 0$. 由于 v 连续、单减, $\inf_t v(x(t, x_0)) = \lim_{t\to\infty} v(x(t, x_0)) = \eta$, $\eta \geq 0$. 因此存在 $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, 使得 $x(t_n, x_0) \to x^*$, $\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n, x_0)) = v(x^*) = \eta$. 对于任意有界 t , 有

$$\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n + t, x_0)) - \lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n, x_0)) = 0,$$

那么

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n + t, x_0)) - \lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n, x_0))\Big] = 0,$$

因此

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[-\lim_{t_n\to\infty} \int_{t_n}^{t_n+t} \|h(x(s, x_0))\|^p \mathrm{d}s\Big] =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[-\lim_{t_n\to\infty} \int_0^t \|h(x(t_n + \tau, x_0))\|^p \mathrm{d}\tau\Big] =$$

$$-\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \lim_{n\to\infty} \int_0^t h_n(\tau) \mathrm{d}\tau = 0,$$

其中 $h_n(\tau) = \|h(x(t_n + \tau, x_0))\|^p$. 由于

$$v(x(t_n + t, x_0)) =$$

$$v(x(t_n, x_0)) + \int_0^t \dot{v}(x(t_n + \tau, x_0)) \mathrm{d}\tau \leq$$

$$v(x(t_n, x_0)) + \int_0^t 0 \mathrm{d}\tau \leq$$

$$v(x(t_n, x_0)) + \int_0^t 0 \cdot v(x(t_n + \tau, x_0)) \mathrm{d}\tau.$$

两边取极限,可得

$$\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n + t, x_0)) \leq$$

$$\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n, x_0)) + \lim_{t_n\to\infty} \int_0^t 0 \cdot v(x(t_n + \tau, x_0)) \mathrm{d}\tau =$$

$$\eta + \lim_{t_n\to\infty} \int_0^t 0 \cdot v(x(t_n + \tau, x_0)) \mathrm{d}\tau.$$

由引理 2 可知, $\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n + t, x_0)) \leq \eta e^{\int_{t_n} 0 \mathrm{d}\tau} = \eta$. 因为 $\inf_t v(x(t, x_0)) = \eta$, 有 $\lim_{t_n\to\infty} v(x(t_n + t, x_0)) = \eta$, 由 v 连续可知,对任意 $\tau \in [0, t]$, $x(t_n + \tau, x_0)$ 一致收敛到 $x(\tau, x^*)$, 所以 $h_n(\tau)$ 一致收敛到 $h(x(\tau, x^*))$. 因此,

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[-\lim_{n\to\infty} \int_0^t h_n(\tau) \mathrm{d}\tau\Big] =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-1}{t} \int_0^t h(x(\tau, x^*)) \mathrm{d}\tau = -h(x^*),$$

即 $h(x(t, x^*)) = 0$. 当 $t \to \infty$时, $\|h(x(t, x_0))\|^p \to 0$, 即 $\lim_{t\to\infty} y(x(t)) = \lim_{t\to\infty} h(x(t)) = 0$. 当 $t \to \infty$时, 由假设 2) 可知, $V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t) + \gamma(\|y\|_{[0,t]}) \to 0$, 即 $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$. 由 $V(x)$ 光滑可得, $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = V\left(\lim_{t\to\infty} x(t)\right) = 0$, 即 $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^* \in S_0$. 因此, $d\left(\lim_{t\to\infty} x(t), S_0\right) = d(x^*(t), S_0) = 0$, S_0 局部渐近稳定. 同理, $\forall x_0 \in R^n$, $V(x)$ 适定, S_0 全局渐近稳定. □

注 3　由定理 1 可知,集合 S_0 是系统的不变集,即 $x(0) \in S_0$, $\forall t \geq 0$, $x(t) \in S_0$.

如果集合 S_0 只包含 $x = 0$, 可得如下推论:

推论 1　如果切换系统(3) 满足定理 1 的假设 1) , 2) , 3) , 且 S_0 只包含系统平衡点 $x = 0$, 那么 $x = 0$ 局部渐近稳定. 若 $\forall x_0 \in R^n$, $V(x)$ 适定,则 $x = 0$ 全局渐近稳定.

3.2　多 Lyapunov 函数法

下面利用多 Lyapunov 函数讨论切换系统的集合稳定性. 考虑到切换序列对系统动态性能的影响,需要讨论切换系统输出与切换序列相关的情形,即 $y = h_\sigma(x)$, 这样也增加了集合稳定性分析的自由度.

定理 2　如果切换系统(3) 满足如下假设:

1) $\forall q \in Q$, 第 q 个子系统存在非负光滑的 Lyapunov 函数 $V_q(x)$, $\partial V_q(x) f_q(x) / \partial x \leq 0$, 且集合 $S_q^{c_q} = \{x \in X \subset R^n : V_q(x) \leq c_q\}$ 是紧集,其中 $c_q > 0$;

2) $\forall q \in Q, V_q(x(t_{i+1})) \geq V_q(x(t_j)), t_i < t_j$, $\sigma(t_i) = \sigma(t_j) = q$;

3) $\forall q \in Q$,切换系统(3) 的第 q 个子系统小时间 $V_q(x)$ 可观测;

4) $\int_0^\infty \|\widetilde{h}_q(x(t))\|^p \mathrm{d}t < \infty, 0 < p < \infty$,其中

$$\widetilde{h}_q(x(t)) = \begin{cases} h_q(x_q(t)), & t \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[t_{q_i}, t_{q_i+1}); \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases}$$

5) 如果系统发生无穷多次切换,那么 $\exists \tau_D > 0$,使得对 $\forall T \geq 0$,存在一个正整数 i,使得 $t_{i+1} - \tau_D \geq t_i \geq T$.

那么 $\forall x_0 \in \bigcup_{i=1}^{N} S_q^{c_q}$, $S_0 = \bigcup_{q=1}^{N} S_q^0$ 局部渐近稳定,其中 $S_q^0 = \{x \in X \subset R^n : V_q(x) = 0\}$. 若 $\forall q \in Q, x_0 \in R^n, V_q(x)$ 适定,则 S_0 全局渐近稳定.

利用定理 1 证明方法易得到定理 2 结论.

如果子系统大时间 $V_q(x(t))$ 可观测,可得如下定理:

定理 3 如果切换系统(3) 满足定理 2 的假设 1),2),4),5),且 $\forall q \in Q$,切换系统(3) 的第 q 个子系统大时间 $V_q(x)$ 可观测,那么 $\forall x_0 \in \bigcup_{i=1}^{N} S_q^{c_q}$,集合 $S_0 = \bigcup_{q=1}^{N} S_q^0$ 局部渐近稳定. 若 $\forall q \in Q, x_0 \in R^n$, $V_q(x)$ 适定,则 S_0 全局渐近稳定.

注 4 由定理 2 和定理 3 可知,S_0 不是系统的不变集,系统切换时,不能够保证系统状态一直在 S_0 中.

假设 1 切换系统(3) 输出为

$$y_q = -\frac{\partial V_q(x)}{\partial x} f_q(x).$$

由定理 2 的假设 1) 和 2) 可知,如果系统满足假设 1,定理 2 的假设 4) 必然成立(此时可取 $p = 1$).

推论 2 如果切换系统(3) 满足假设 1 和定理 2 的条件,且 S_0 只包含 $x = 0$,那么 $x = 0$ 局部渐近稳定. 若 $\forall q \in Q, x_0 \in R^n, V_q(x)$ 适定,则 $x = 0$ 全局渐近稳定.

同样,对于定理 3 有如下推论:

推论 3 如果切换系统(3) 满足假设 1 和定理 3 的条件,且 S_0 只包含 $x = 0$,那么 $x = 0$ 局部渐近稳定. 若 $\forall q \in Q, x_0 \in R^n, V_q(x)$ 适定,则 $x = 0$ 全局渐近稳定.

注 5 由推论 2 和推论 3 可知,如果 $\alpha_{q1}, \alpha_{q2} \in K_\infty$, $\alpha_{q1}(|x|) \leq V_q(x) \leq \alpha_{q2}(|x|)$,切换系统(3) 输出满足假设 1,那么定理 2 和定理 3 退化为文献[3] 中的定理 7 和定理 9.

4 相关概念之间的关系

首先提出输出对状态稳定 Lyapunov 函数概念.

定义 8[17,18] 如果系统(1) 存在光滑函数 $V(\cdot): R^n \to R_{\geq 0}$,函数 $V(\cdot)$ 满足:1) $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, $\forall x \in R^n, \alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$;2) $\exists \alpha_3, \sigma \in K_\infty$, $\forall x \in R^n, y \in R^r$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_3(|x|) + \sigma(\|y\|_{[0,t]}).$$

那么称 $V(\cdot)$ 是系统(1) 的输出对状态稳定 Lyapunov 函数.

Krichman 等[18] 指出:系统(1) 输出对状态稳定等价于系统存在输出对状态稳定 Lyapunov 函数.

输出对 $V(x)$ 稳定与输出对状态稳定之间的关系可归纳为以下定理:

定理 4 如果 $V(x)$ 是系统(1) 输出对状态稳定 Lyapunov 函数,则系统(1) 输出对 $V(x)$ 稳定;如果系统(1) 输出对 $V(x)$ 稳定,$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, $\forall x \in R^n, \alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$,则系统(1) 输出对状态稳定.

证明 如果函数 $V(x)$ 是系统(1) 的输出对状态稳定 Lyapunov 函数,则由于系统存在输出对状态稳定 Lyapunov 函数等价于系统输出对状态稳定,有 $\exists \beta \in KL, \gamma \in K$, $|x(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|y\|_{[0,t]})$, $\forall x_0 \in R^n, y \in R^r$,

$$\begin{aligned} &V(x) \leq \alpha_2(|x|) \leq \\ &\alpha_2(2\beta(\alpha_1^{-1}(V(x_0)), t)) + \alpha_2(2\gamma(\|y\|_{[0,t]})) = \\ &\beta_1(V(x_0), t) + \widetilde{\gamma}(\|y\|_{[0,t]}). \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1(V(x_0), t) = \alpha_2(2\beta(\alpha_1^{-1}(V(x_0)), t)),$$
$$\widetilde{\gamma}(\|y\|_{[0,t]}) = \alpha_2(2\gamma(\|y\|_{[0,t]})).$$

易知 $\beta_1(\cdot, \cdot) \in KL$, $\widetilde{\gamma} \in K$. 由此可知,系统(1) 输出对 $V(x)$ 稳定. 如果系统输出对 $V(x)$ 稳定,且 $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$,使得 $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$, $\forall x_0, t \geq 0$,有

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \beta(V(x_0), t) + \gamma(\|y\|_{[0,t]}).$$

因此

$$\begin{aligned} &|x| \leq \\ &\alpha_1^{-1}(2\beta(\alpha_2(|x_0|), t)) + \alpha_1^{-1}(2\gamma_1(\|y\|_{[0,t]})) = \\ &\beta_1(|x_0|, t) + \Psi(\|y\|_{[0,t]}). \end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{\beta}_1(|x_0|, t) = \alpha_1^{-1}(2\beta(\alpha_2(x_0), t)),$$
$$\widetilde{\Psi}(\|y\|_{[0,t]}) = \alpha_1^{-1}(2\gamma(\|y\|_{[0,t]})).$$

易知 $\beta_1(\cdot, \cdot) \in KL$, $\Psi(\cdot) \in K$. 因此,系统(1) 输出对状态稳定. □

小时间 $V(x(t))$ 可观测与小时间状态模可观测

之间关系,有如下定理:

定理 5　非负函数 $V(x)$, $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, $\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|)$,如果系统(1)小时间 $V(x(t))$ 可观测,那么系统(1)小时间状态模可观测.

证明　若系统(1)小时间 $V(x(t))$ 可观测,那么 $\forall \tau > 0$, $\exists \gamma \in K_\infty$, $V(x(t)) \le \gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})$. 如果 $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, $\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|)$, 那么 $\forall \tau > 0$, $\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})$. 因此, $|x| \le \alpha_1^{-1}(\gamma(\|y\|_{[t,t+\tau]})) = \tilde{\gamma}(\|y\|_{[t,t+\tau]})$. 显然, $\tilde{\gamma}(\cdot) \in K_\infty$,由此可知系统(1)小时间状态模可观测. □

同理,可得如下定理:

定理 6　非负函数 $V(x)$, $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, $\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|)$,如果系统(1)大时间 $V(x(t))$ 可观测,那么系统(1)大时间状态模可观测.

5　数值例子

下面利用数值例子验证文中结论. 首先,利用统一 Lyapunov 函数来判断切换系统的集合稳定性.

例 1　两个二维子系统的切换系统为

$$A:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - 0.25x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ x_1 - 0.25x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{bmatrix},$$

$$B:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.33x_2 - 2.25x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ 0.33x_1 - 2.25x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{bmatrix}.$$

将 R^2 划分为 $X_A = \{x: x_1x_2 \ge 0\}$, $X_B = R^2/X_A$,系统输出为

$$y(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.5x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ 0.5x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{bmatrix}, & x \in X_A;\\ \begin{bmatrix} 1.5x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ 1.5x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{bmatrix}, & x \in X_B.\end{cases}$$

令 $V(x) = 0.25(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$,则 $S_0 = \{x: x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. 不难验证,系统满足定理 1 的条件,由此可知,集合 S_0 渐近稳定. 分别从初值 $x_0 = [-1.2; 1.5]$ 和初值 $x_0 = [-0.7; -0.5]$ 出发,仿真图如图 1 所示.

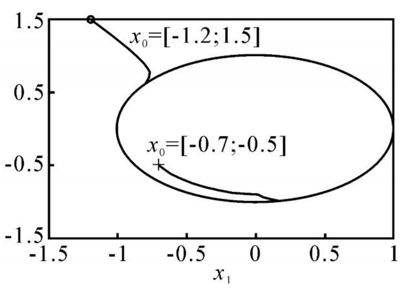

图 1　集合稳定性(CLF)

下面利用多 Lyapunov 函数来判断集合稳定性.

例 2　两个二维子系统的切换系统分别为

$$A:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25x_2 - 0.25x_1(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1)\\ -4x_1 - 4x_2(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1)\end{bmatrix},$$

$$y_A = \begin{bmatrix} 0.5x_1(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1)\\ 0.5x_2(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1)\end{bmatrix},$$

$$B:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_2 - 4x_1((0.25x_1)^2 + x_2^2 - 1)\\ -0.25x_1 - 0.25x_2((0.25x_1)^2 + x_2^2 - 1)\end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} 0.5x_1((0.25x_1)^2 + x_2^2 - 1)\\ 0.5x_2((0.25x_1)^2 + x_2^2 - 1)\end{bmatrix}.$$

将 R^2 划分为 $X_A:\{x: |x_1| \le |x_2|\}$, $X_B = R^2/X_A$. 取

$$V_A(x) = 0.25(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1)^2,$$
$$V_B(x) = 0.25((0.25x_1)^2 + x_2^2 - 1)^2.$$

那么

$$S_A^0 \cup S_B^0 = \{x \in X_A: x_1^2 + (0.25x_2)^2 = 1\} \cup \{x \in X_B: (0.25x_1)^2 + x_2^2 = 1\}.$$

令

$$\tilde{h}_A(x) = \begin{cases} h_A(x), & x \in X_A;\\ 0, & \text{otherwise};\end{cases}$$
$$\tilde{h}_B(x) = \begin{cases} h_B(x), & x \in X_B;\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

不难验证,定理 2 各项假设成立,由此可知,集合 $S_A^0 \cup S_B^0$ 渐近稳定. 分别从初值 $x_0 = [-3.2; 2.5]$ 和初值 $x_0 = [0.2; -1]$ 出发,仿真图如图 2 所示.

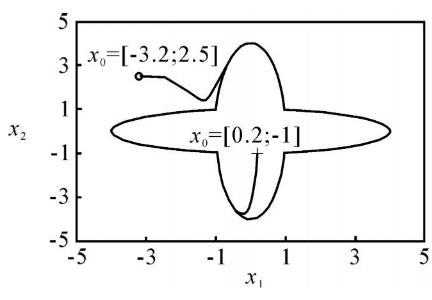

图 2　集合稳定性(MLF)

注 6　由例 1 和例 2 可知,切换系统的平衡状态不是孤立的平衡点,而是一个极限环,因此文献[2,3]中的结论无法分析例 1 和例 2,而利用本文结论,不难得到切换系统集合稳定的结论.

6　结　　论

本文给出了输出对 $V(x)$ 稳定等概念,基于文中推广的概念,分别利用统一 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数讨论了切换系统的集合稳定性. 文中

的稳定性判据是在函数 $V(x)$ 已知的前提下得到的. 对于如何构造 $V(x)$,使得给定集合包含在 $V(x)$ 零值水平集内没有展开讨论,如何判断任意给定集合的稳定性是下一步工作的目标.

参考文献(References)

[1] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems, 1999, 19(5): 59-70.

[2] Hespanha J P. Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle's invariance principle [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(4): 470-482.

[3] Hespanha J P, Liberzon D, Angeli D, et al. Nonlinear norm-notions and stability of switched systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(2): 154-168.

[4] Bemporad A, Ferrari-Trecate G, Morari M. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1864-1876.

[5] Sun Z, Ge S S, Lee T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems [J]. Automatica, 2002, 38(5): 775-786.

[6] Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamics and constraints[J]. Automatica, 1999, 35(3): 407-427.

[7] Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems[J]. Automatica, 2005, 41(2): 181-195.

[8] Rouche N, Habets P, Laloy M. Stability theory by Lyapunov's direct method[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[9] Bacciotti A, Mazzi L. An invariance principle for nonlinear switched systems[J]. Systems and Control Letters, 2005, 45(11): 1109-1119.

[10] Mancilla-Aguilar J L, Garcia R A. An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems[J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(5): 376-384.

[11] Cheng D Z, Wang J H, Hu X M. Stabilization of switched linear systems via LaSalle's invariance principle [C]. IEEE Int Conf on Control and Automation. Guangzhou, 2007.

[12] Byrnes C I,, Isidori A, Willems J C. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 36(11): 1228-1240.

[13] Shiriaev A S. The notion of V-detectability and stabilization of invariant sets of nonlinear systems[J], Systems and Control Letters, 2000, 39(5): 327-338.

[14] Zhao J, Hill D J. Passivity and stability of switched systems: A multiple storage function method [J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(2): 158-164.

[15] 林相泽, 李世华. 一类切换系统极限环的反馈镇定研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(9): 1073-1076.
(Lin X Z, Li S H. Feedback stabilization of limit cycles of a class of switched systems[J]. Control and Decision, 2007, 22(9): 1073-1076.)

[16] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
(Liao X X. Theory methods and applications of stability[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.)

[17] Sontag E D, Yuan Wang. Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems[J]. Systems and Control Letters, 1997, 29(5): 279-290.

[18] Krichman M, Sontag E D, Yuan Wang. Input-output-to-sate stability [J]. SIAM J Control Optimation, 2001, 39(6): 1874-1928.

[19] Byrnes C I, Martin C F. An integral-invariance principle for nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(6): 983-994.

(上接第 610 页)

[11] 杨帆, 张庆灵. 基于观测器的不确定广义时滞系统保成本控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(10): 1177-1180.
(Yang F, Zhang Q L. Guaranteed cost observer-based control of singular time-delay systems with uncertainties[J]. Control and Decision, 2005, 20(10): 1177-1180.)

[12] Petersen I R, Hollot Christopher V. A Riccati equation to the stabilization of uncertain linear systems [J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.

[13] Xu S Y, Dooren P V, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.