

文章编号: 1001-0920(2009)04-0621-07

基于观测器的非线性系统 H 模糊可靠控制

蔡俊伟, 胡寿松

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘要: 研究了基于观测器的非线性系统 H 模糊可靠控制问题. 采用 T-S 模糊模型对非线性系统进行建模, 用模糊观测器重构系统状态. 在系统发生故障时满足给定 H 性能的约束下, 最小化正常情况下的 H 性能, 实现次优 H 模糊可靠控制. 提出了两种应用线性矩阵不等式(LMI)的 H 模糊可靠控制器设计方法. 分别采用两步法和相似变换法将双线性矩阵不等式问题转化为 LMI 问题. 仿真示例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 非线性系统; H 控制; 模糊观测器; 可靠控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

H fuzzy reliable control based on observer for nonlinear systems

CAI Jun-wei, HU Shou-song

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.

Correspondent: CAI Jun-wei, E-mail: cjwnuaa@tom.com)

Abstract: The H fuzzy reliable control based on observer problem is addressed for nonlinear systems. The Takagi-Sugeno fuzzy model is adopted for modeling the nonlinear system. The system states are estimated by a fuzzy observer. The suboptimal H fuzzy reliable controller is achieved by minimizing the H performance in the normal case with a prescribed H performance in actuator failure cases. Two methods for the design of a H fuzzy reliable controller are proposed in terms of linear matrix inequality (LMI). Two-step procedure method and similarity transformation method are used to convert a bilinear matrix inequality (BMI) problem into a LMI problem respectively. Finally, a simulation example shows the effectiveness of the proposed methods.

Key words: Nonlinear system; H control; Fuzzy observer; Reliable control; Linear matrix inequality

1 引言

自 T-S 模糊模型出现以来, 利用模糊 T-S 模型对非线性系统进行建模和控制器设计, 已成为模糊控制领域的一个热点^[1-6]. 在许多实际系统中, 状态变量往往不能或难以测量, 因此基于观测器的控制十分必要^[2,3]. 外部干扰会导致系统性能下降甚至不稳定, H 控制是解决这一问题的有力工具^[2,4,5,7]. 控制系统元部件常常会发生故障, 从而导致闭环系统不稳定或者性能变差. 为了提高系统的可靠性, 可靠控制得到广泛的重视和发展^[4-6,8]. 文献[4]研究了非线性系统的 L_2/H 静态输出反馈可靠控制问题, 但需要采用迭代线性矩阵不等式(LMI)法, 设计过程复杂. 文献[5]研究了非线性系统的 H 可靠控制问题, 但要求状态可测. 文献[6]研究了非线性系统基于观测器的可靠控制问题, 但

没有考虑外干扰. 实际系统往往状态不可测量且受外扰影响, 因此, 研究基于观测器的非线性系统 H 可靠控制问题具有现实意义.

本文针对一类非线性系统, 采用 T-S 模糊模型进行建模, 提出两种基于观测器的 H 模糊可靠控制器设计方法. 针对设计过程中的非凸 BMI 问题, 分别采用两步法和相似变换法将其转化为 LMI 问题. 相比于文献[3], 本文提出的相似变换法不需满足局部输入矩阵列满秩. 根据两种方法设计的次优 H 模糊可靠控制器, 均可保证系统在发生故障时满足给定 H 性能约束下, 最小化正常情况下的 H 性能.

2 问题描述

考虑由如下 T-S 模糊模型描述的非线性系统:

R_i : if $x_1(t)$ is F_1^i and ...and $x_g(t)$ is F_g^i then

收稿日期: 2008-03-31; 修回日期: 2008-07-30.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60234010); 航空科学基金项目(05E52031).

作者简介: 蔡俊伟(1980—), 男, 福建泉州人, 博士生, 从事容错控制、故障诊断的研究; 胡寿松(1937—), 男, 南京人, 教授, 博士生导师, 从事故障诊断、鲁棒控制等研究.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{wi} w(t) + B_i u(t), \\ z(t) = C_{1i} x(t) + D_{wi} w(t) + D_i u(t), \\ y(t) = C_{2i} x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i(t)$ 为模糊规则的前件变量; F_j^i 表示模糊集合; r 为 if-then 规则数; $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ 分别为状态向量、控制向量, $w(t) \in R^d$ 为干扰向量, $y(t) \in R^q$, $z(t) \in R^p$ 分别为输出向量、被控输出向量; $A_i, B_{wi}, B_i, C_{1i}, D_{wi}, D_i, C_{2i}$ 为具有适当维数的已知矩阵.

T-S 模糊系统(1) 清晰化后的输出模型如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \\ \quad \sum_{i=1}^r h_i(\cdot(t)) \{ A_i \hat{x}(t) + B_{wi} w(t) + B_i u(t) \} = \\ A(h) \hat{x}(t) + B_w(h) w(t) + B(h) u(t), \\ z(t) = \\ \quad \sum_{i=1}^r h_i(\cdot(t)) \{ C_{1i} \hat{x}(t) + D_{wi} w(t) + D_i u(t) \} = \\ C_1(h) \hat{x}(t) + D_w(h) w(t) + D(h) u(t), \\ y(t) = \\ \quad \sum_{i=1}^r h_i(\cdot(t)) C_{2i} \hat{x}(t) = C_2(h) \hat{x}(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\cdot(t) = [\cdot_1(t), \dots, \cdot_g(t)],$$

$$h_i(\cdot(t)) = \mu_i(\cdot(t)) / \sum_{i=1}^r \mu_i(\cdot(t)),$$

$$\mu_i(\cdot(t)) = \prod_{j=1}^g F_j^i(\cdot_j(t)),$$

$F_j^i(\cdot_j(t))$ 是 $\cdot_j(t)$ 属于 F_j^i 的隶属度, 令 $\mu_i(\cdot(t))$

$0 < \mu_i(\cdot(t)) < 1$ 且 $\sum_{i=1}^r \mu_i(\cdot(t)) = 1$. 为描述方便, $h_i \triangleq h_i(\cdot(t))$.

考虑执行器连续故障模型^[6]

$$u^F(t) = u(t). \quad (3)$$

其中

$$S = \text{diag}\{ \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_m \},$$

$$0 < \bar{s}_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

矩阵集

$$S \triangleq \{ L \mid L = \text{diag}\{ L_1, \dots, L_m \}, L_i = \bar{s}_i \text{ 或 } -\bar{s}_i, i = 1, 2, \dots, m \},$$

$$L = 1, 2, \dots, n, \quad n = 2^{m-1},$$

l 为正常执行器个数. 可由 S 的元素表示, 显然 S 凸多面体集

$$S \triangleq \{ L \mid L = \sum_{L=1}^n L L, L \geq 0, \sum_{L=1}^n L = 1 \}.$$

采用如下 T-S 模糊观测器重构状态:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \\ \quad \sum_{i=1}^r h_i [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] = \\ A(h) \hat{x}(t) + B(h) u(t) + L(h) (y(t) - \hat{y}(t)). \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i C_{2i} \hat{x}(t)$, L_i 为观测器增益.

采用如下模糊状态反馈控制器:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i K_i \hat{x}(t) = - K(h) \hat{x}(t), \quad (5)$$

其中 K_i 为控制器增益.

把 $u^F(t)$ 代入系统(2), 并考虑模糊控制器(5), 定义重构误差 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. 令

$$\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad e^T(t)]^T,$$

可得增广闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \\ \quad \sum_{i,j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij} & \bar{B}_i \\ \bar{C}_{ij} & \bar{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A_c(h) & B_c(h) \\ C_c(h) & D_c(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_j C_{2i} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_{wi} \\ B_w \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_{ij} = [C_{1i} - D_i K_j \quad D_i K_j], \quad \bar{D}_i = D_{wi},$$

$$A_c(h) =$$

$$\begin{bmatrix} A(h) - B(h) K(h) & B(h) K(h) \\ 0 & A(h) - L(h) C_2(h) \end{bmatrix},$$

$$B_c(h) = \begin{bmatrix} B_w(h) \\ B_w(h) \end{bmatrix}, \quad D_c(h) = D_w(h),$$

$$C_c(h) = [C_1(h) - D(h) K(h) \quad D(h) K(h)].$$

当 $\bar{s}_i = 1$ 时, 式(6) 代表正常闭环系统.

给定衰减水平常数 $\sigma > 0$, 定义如下 H_∞ 性能指标:

$$\int_0^\infty z^T(t) z(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t) w(t) dt. \quad (7)$$

定义1 给定常数 $\gamma_f > \gamma_0 > 0$, 若满足条件: 1) 正常闭环系统(6) 稳定且在给定 γ_0 的情况下满足指标(7); 2) 故障闭环系统(6) 稳定且在给定 γ_f 的情况下满足指标(7). 则称控制器(5) 为基于观测器的 H_∞ 模糊可靠控制器.

定义2 若满足条件: 1) 故障闭环系统(6) 稳定且在给定常数 $\gamma_f > 0$ 的情况下满足指标(7); 2) 正常闭环系统(6) 稳定, 并最小化正常情况下指标(7) 的常数 $\gamma_0 > 0$. 则称控制器(5) 为基于观测器的次优 H_∞ 模糊可靠控制器.

本文设计目标如下: 针对闭环系统(6), 设计基于观测器的 H_∞ 模糊可靠控制器和基于观测器的次

优 H 模糊可靠控制器.

引理 1 设 $A \in R^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(A) = r - 1$, 则存在 n 阶可逆矩阵 M 和 m 阶可逆矩阵 N 使得

$$A = M \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N. \tag{8}$$

引理 2 考虑 $u(t) = 0$ 的系统(2), 给定常数 $\alpha > 0$, 若存在矩阵 $P > 0$ 和适维矩阵 T_1, T_2 , 使得

$$\begin{bmatrix} -A^T(h)T_1^T - T_1A(h) & -T_1B_w(h) \\ * & -\alpha^2 I \\ * & * \\ * & * \\ P + T_1 - A^T(h)T_2^T & C^T(h) \\ -B_w^T(h)T_2^T & D_w^T(h) \\ T_2 + T_2^T & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

成立, * 表示对称位矩阵的转置项, 则该系统渐近稳定, 且对所有 $w(t)$ 满足指标(7).

注 1 引理 2 的证明过程类似文献[9]定理 1 的证明, 此处省略. 该引理为系统(2) 的有界实引理, 通过引入辅助变量将正定 Lyapunov 矩阵 P 与系统矩阵乘积分离, 更适用于针对具有本文故障模型的系统. 采用参数依赖 Lyapunov 方法进行可靠控制器设计.

3 主要结果

对正常闭环系统(6), 给定正常数 α_0 , 根据引理 2, 若存在矩阵 $P > 0$ 和适维矩阵 T_1, T_2 使得

$$\begin{bmatrix} -A_c^T(h)T_1^T - T_1A_c(h) & T_1B_c(h) \\ * & -\alpha^2 I \\ * & * \\ * & * \\ P + T_1 - A_c^T(h)T_2^T & C^T(h) \\ -B_c^T(h)T_2^T & D_c^T(h) \\ T_2 + T_2^T & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

其中 $A_c(h)$ 和 $C_c(h)$ 分别为 $\alpha = I$ 的 $A_c(h)$ 和 $C_c(h)$, 则正常闭环系统(6) 满足定义 1 的条件 1).

对 S 的故障闭环系统(6), 给定正常数 α_f , 根据引理 2, 采用参数依赖矩阵 $P_f = \sum_{L=1}^n P_L$, 可得若存在矩阵 $P_L > 0 (L = 1, 2, \dots, n)$ 和适维矩阵 T_{1f}, T_{2f} 使得

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & -T_{1f}B_c(h) \\ * & -\frac{\alpha_f}{f}I \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_L + T_{1f} - A_{dL}^T(h)T_{2f}^T & C_{dL}^T(h) \\ -B_c^T(h)T_{2f}^T & D_c^T(h) \\ T_{2f} + T_{2f}^T & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

则故障闭环系统(6) 满足定义 1 的条件 2). 其中

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -A_{dL}^T(h)T_{1f}^T - T_{1f}A_c, L = 1, 2, \dots, n; \\ C_{dL}(h) &= [C_L(h) - D(h)_L K(h), D(h)_L K(h)]; \\ A_{dL}(h) &= \begin{bmatrix} A(h) - B(h)_L K(h) & B(h)_L K(h) \\ 0 & A(h) - L(h)C_2(h) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据式(10) 和(11) 进行控制器设计, 将会遇到双线性矩阵不等式(BMI) 问题. 下面分别采用两步法和相似变换法将其转化为 LMI 问题.

3.1 两步设计法

定理 1 对闭环系统(6), 给定常数 $\alpha_f > \alpha_0 > 0$, 正标量 α_i 和 α_j , 若存在正标量 α_i, α_j , 矩阵 $P_{11}, P_{12}, P_{22}, X_{L,11}, X_{L,12}, X_{L,22} (L = 1, 2, \dots, n), T_{11}, T_{22}, K_j, L_j (j = 1, 2, \dots, r)$, 满足不等式组

$$\alpha_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, r; \tag{12}$$

$$\frac{1}{r-1} \alpha_{ii} + \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) < 0, \tag{13}$$

$$\alpha_{L,ii} < 0, i = 1, 2, \dots, r, L = 1, 2, \dots, n; \tag{14}$$

$$\frac{1}{r-1} \alpha_{L,ii} + \frac{1}{2} (\alpha_{L,ij} + \alpha_{L,ji}) < 0; \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0; \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} X_{L,11} & X_{L,12} \\ * & X_{L,22} \end{bmatrix} > 0, L = 1, 2, \dots, n. \tag{17}$$

则控制器(5) 为基于观测器(4) 的 H 模糊可靠控制器. 其中

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(ij)} & \alpha_{12}^{(ij)} & -T_{11}B_{wi} \\ * & \alpha_{22}^{(ij)} & -T_{22}B_{wi} \\ * & * & -\frac{\alpha_f}{f}I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \alpha_{14}^{(ij)} & P_{12} & C_{1i}^T - K_j^T D_i^T \\ \alpha_{24}^{(ij)} & \alpha_{25}^{(ij)} & K_j^T D_i^T \\ \alpha_{34}^{(ij)} & \alpha_{35}^{(ij)} & D_{wi}^T \\ 44 & 0 & 0 \\ * & 55 & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$L, ij = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (L, ij) & (L, ij) & - T_{11} B_{wi} \\ * & (L, ij) & - T_{22} B_{wi} \\ * & * & - \frac{2}{f} I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} (L, ij) & X_{L,12} & (L, ij) \\ (L, ij) & (L, ij) & (L, ij) \\ (L, ij) & (L, ij) & D_{wi}^T \\ 44 & 0 & 0 \\ * & 55 & 0 \\ * & * & - I \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$(ij)_{11} = - T_{11} A_i - A_i^T T_{11}^T + T_{11} B_i K_j + K_j^T B_i^T T_{11}^T,$$

$$(ij)_{12} = - T_{11} B_i K_j,$$

$$(ij)_{14} = P_{11} + T_{11} - (A_i^T T_{11}^T - K_j^T B_i^T T_{11}^T),$$

$$(ij)_{22} = - T_{22} A_i - A_i^T T_{22}^T + T_{22} L_j C_{2i} + C_{2i}^T L_j^T T_{22}^T,$$

$$(ij)_{24} = P_{12}^T - K_j^T B_i^T T_{11}^T,$$

$$(ij)_{25} = P_{22} + T_{22} - (A_i^T T_{22}^T - C_{2i}^T L_j^T T_{22}^T),$$

$$(ij)_{34} = - B_{wi}^T T_{11}^T, \quad (ij)_{35} = - B_{wi}^T T_{22}^T,$$

$$44 = (T_{11} + T_{11}^T), \quad 55 = (T_{22} + T_{22}^T),$$

$$L, ij_{11} = - T_{11} A_i - A_i^T T_{11}^T + T_{11} B_i L K_j + K_j^T L B_i^T T_{11}^T,$$

$$(L, ij)_{12} = - T_{11} B_i L K_j,$$

$$(L, ij)_{14} = X_{L,11} + T_{11} - f(A_i^T T_{11}^T - K_j^T L B_i^T T_{11}^T),$$

$$(L, ij)_{16} = (C_{1i}^T - K_j^T L D_i^T),$$

$$(L, ij)_{22} = - T_{22} A_i - A_i^T T_{22}^T + T_{22} L_j C_{2i} + C_{2i}^T L_j^T T_{22}^T,$$

$$(L, ij)_{24} = X_{L,12} - f K_j^T L B_i^T T_{11}^T,$$

$$(L, ij)_{25} = X_{L,22} + T_{22} - f(A_i^T T_{22}^T - C_{2i}^T L_j^T T_{22}^T),$$

$$(L, ij)_{26} = K_j^T L D_i^T, \quad (L, ij)_{34} = - f B_{wi}^T T_{11}^T,$$

$$(L, ij)_{35} = - f B_{wi}^T T_{22}^T, \quad 44 = f(T_{11} + T_{11}^T),$$

$$55 = f(T_{22} + T_{22}^T).$$

限于篇幅,证明略。

式(12) ~ (17)为BMIs。为此,下面用两步法求解。由式(18)可知 T_{11} 和 T_{22} 均非奇异。由式(12) ~ (15)得 $(ij)_{11} < 0 (i = 1, 2, \dots, r)$, $(ij)_{11} < 0 (1 \leq i < j \leq r)$, $(ij)_{11} < 0 (i = 1, 2, \dots, r)$, $(ij)_{11} < 0 (1 \leq i < j \leq r, L = 1, 2, \dots, n)$ 。对上述不等式组左乘以 T_{11}^{-1} ,右乘以 T_{11}^T ,令 $S_{11} = T_{11}^{-1}$, $K_j T_{11}^T = F_j$,可得LMIs为

$$- A_i S_{11}^T + B_i F_i - S_{11} A_i^T + F_i^T B_i^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (20)$$

$$- A_i S_{11}^T + B_i F_j - S_{11} A_i^T + F_j^T B_i^T < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r; \quad (21)$$

$$- A_i S_{11}^T + B_i L F_i - S_{11} A_i^T + F_i^T L B_i^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, L = 1, 2, \dots, n; \quad (22)$$

$$- A_i S_{11}^T + B_i L F_j - S_{11} A_i^T + F_j^T L B_i^T < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r, L = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

求解式(20) ~ (23)可得 $T_{11} = S_{11}^{-1}$ 和 $K_j = F_j T_{11}^T$ 。将 T_{11} 和 K_j 代入式(12) ~ (17),并令 $T_{22} L_j = G_j$,式(12) ~ (17)化为LMIs,求解此LMIs可得 $L_j = T_{22}^{-1} G_j$ 。

令 $\mu = \frac{2}{\mu}$,根据上述两步法,基于观测器的次优 H 模糊可靠控制器问题可归结为凸优化问题

$$\min \mu : (\mu, P_{11}, P_{12}, P_{22}, X_{L,11}, X_{L,12}, X_{L,22}, T_{22}, G_j), \quad (24)$$

$$\text{s. t. 解式(20) ~ (23)得 } T_{11}, K_j \text{ 代入(12)}$$

$$\sim (17) \text{ 所得的LMIs, } \mu_0 < \mu_f.$$

综上所述,用两步法进行基于观测器的次优 H 模糊可靠控制器设计的算法如下:

算法1 1)对给定的 $\mu_f > 0$,确定参数 $\mu > 0$ 的区间 $[a, b]$ 和参数 $\mu_f > 0$ 的区间 $[a_f, b_f]$,使凸优化问题(24)有解。

2)在区间 $[a, b]$ 和区间 $[a_f, b_f]$ 搜索最优值 (μ^*, μ_f^*) ,使凸优化问题(24)的 $\min \mu(\mu, \mu_f)$ 最小。

3)根据 $L_j(\mu^*, \mu_f^*)$ 和 $K_j(\mu^*, \mu_f^*)$ 构造模糊观测器(4)和控制器(5)。

3.2 相似变换法

定理2 对局部系统满足 $B_i = \mu_i B, D_i = 0$ 的闭环系统(6),给定常数 $\mu_f > \mu > 0$,正标量 μ, μ_f, n 阶可逆矩阵 M, m 阶可逆矩阵 N ,若存在正标量 μ, μ_f ,矩阵 $P_{11}, P_{12}, P_{22}, X_{L,11}, X_{L,12}, X_{L,22} (L = 1, 2, \dots, n)$ $T_{11}, T_{22}, W_j, V_j (j = 1, 2, \dots, r)$,对角矩阵 T_{221} ,满足如下LMIs:

$$\mu_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (25)$$

$$\frac{1}{r-1} \mu_i + \frac{1}{2} (\mu_{ij} + \mu_{ji}) < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r; \quad (26)$$

$$L, \mu_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; L = 1, 2, \dots, n; \quad (27)$$

$$\frac{1}{r-1} L, \mu_i + \frac{1}{2} (L, \mu_{ij} + L, \mu_{ji}) < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r, L = 1, 2, \dots, n; \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} X_{L,11} & X_{L,12} \\ * & X_{L,22} \end{bmatrix} > 0, \quad L = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

则控制器(5)为基于观测器(4)的 H 模糊可靠控制器。控制器增益为 $K_j = N^{-1} T_{221}^{-1} V_j$,观测器增益为 $L_j = T_{11}^{-1} W_j$ 。其中

$$B = M \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N, \quad r = \text{rank}(B),$$

$ij =$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} (ij) & (ij) & (ij) & (ij) & (ij) \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} & 0 \\ * & \begin{matrix} (ij) \\ 22 \end{matrix} & \begin{matrix} (ij) \\ 23 \end{matrix} & P_{12}^T & \begin{matrix} (ij) \\ 25 \end{matrix} & M^T C_{1i}^T \\ * & * & -\frac{2}{f} I & \begin{matrix} (ij) \\ 34 \end{matrix} & \begin{matrix} (ij) \\ 35 \end{matrix} & D_{wi}^T \\ * & * & * & 44 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 55 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$L_{.ij} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (L,ij) & (L,ij) & (L,ij) \\ 11 & 12 & 13 \end{matrix} \\ * & \begin{matrix} (L,ij) \\ 22 \end{matrix} & \begin{matrix} (L,ij) \\ 23 \end{matrix} \\ * & * & -\frac{2}{f} I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$T_{22} = \text{diag}\{T_{221}, T_{222}\},$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 11 \end{matrix} = -T_{11} A_i - A_i^T T_{11} + W_j C_{2i} + C_{2i}^T W_j^T,$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 12 \end{matrix} = [\mu_i V_j^T \ 0], \quad \begin{matrix} (ij) \\ 13 \end{matrix} = -T_{11} B_{wi},$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 14 \end{matrix} = P_{11} + T_{11} - (A_i^T T_{11}^T - C_{2i}^T W_j^T),$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 15 \end{matrix} = P_{12} - [\mu_i V_j^T \ 0], \quad \begin{matrix} (ij) \\ 23 \end{matrix} = -T_{22} M^{-1} B_{wi},$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 22 \end{matrix} = -T_{22} M^{-1} A_i M - [\mu_i V_j^T \ 0]^T M - (T_{22} M^{-1} A_i M + [\mu_i V_j^T \ 0]^T M)^T,$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 25 \end{matrix} = P_{22} + T_{22} - (P^T A_i^T M^{-T} T_{22}^T - M^T [\mu_i V_j^T \ 0]),$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 34 \end{matrix} = -B_{wi}^T T_{11}^T, \quad \begin{matrix} (ij) \\ 35 \end{matrix} = -B_{wi}^T M^{-T} T_{22}^T,$$

$$44 = (T_{11} + T_{11}^T), \quad 55 = (T_{22} + T_{22}^T),$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 11 \end{matrix} = -T_{11} A_i - A_i^T T_{11}^T + W_j C_{2i} + C_{2i}^T W_j^T,$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 12 \end{matrix} = [\mu_i L V_j^T \ 0], \quad \begin{matrix} (L,ij) \\ 13 \end{matrix} = -T_{11} B_{wi},$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 14 \end{matrix} = X_{L,11} + T_{11} - \frac{1}{f} (A_i^T T_{11}^T - C_{2i}^T W_j^T),$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 15 \end{matrix} = X_{L,12} - [\mu_i L V_j^T \ 0],$$

$$\begin{matrix} (ij) \\ 22 \end{matrix} = -T_{22} M^{-1} A_i M - [\mu_i L V_j^T \ 0]^T M - (T_{22} M^{-1} A_i M + [\mu_i L V_j^T \ 0]^T M)^T,$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 23 \end{matrix} = -T_{22} M^{-1} B_{wi},$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 25 \end{matrix} = X_{L,22} + T_{22} - \frac{1}{f} (M^T A_i^T M^{-T} T_{22}^T - M^T [\mu_i L V_j^T \ 0]),$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 26 \end{matrix} = M^T C_{1i}^T, \quad \begin{matrix} (L,ij) \\ 34 \end{matrix} = -\frac{1}{f} B_{wi}^T T_{11}^T,$$

$$\begin{matrix} (L,ij) \\ 35 \end{matrix} = -\frac{1}{f} B_{wi}^T M^{-T} T_{22}^T, \quad 44 = \frac{1}{f} (T_{11} + T_{11}^T),$$

$$55 = \frac{1}{f} (T_{22} + T_{22}^T).$$

证明 不失一般性,根据引理 1,令 $B = M[I_m, 0]^T N$,对局部系统满足 $B_i = \mu_i B, D_i = 0$ 的闭环系统(6)进行相似变换 $\bar{x} = Sx$,其中

$$S = \begin{bmatrix} 0 & M \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

变换后系统矩阵为 $A_{ij} = S^{-1} \overline{A_{ij}} S, A_{ij}^0$ 表示 $= I$ 时的 $A_{ij}, B_i = S^{-1} \overline{B}_i, C_{ij}^0 = \overline{C}_{ij} S, \overline{C}_{ij}$ 表示 $D_i = 0$ 时的 \overline{C}_{ij} .

利用文献[10]的定理 2.2,若式(25)和(26)成立,则

$$\sum_{i,j=1}^r h_i h_j \lambda_{ij} < 0.$$

令

$$V_j = T_{221} N K_j, W_j = T_{11} L_j,$$

$$T_1 = \text{diag}\{T_{11}, T_{22}\}, T_2 = T_1,$$

$$T_{22} = \text{diag}\{T_{221}, T_{222}\}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix},$$

由式(29)可知 $P > 0$.对 $\sum_{i,j=1}^r h_i h_j \lambda_{ij} < 0$ 整理后将 $A_{ij}^0 = S^{-1} \overline{A_{ij}^0} S, B_i = S^{-1} \overline{B}_i, C_{ij}^0 = \overline{C}_{ij} S$ 代入,并左乘以 $\text{diag}\{S^{-T}, I, S^{-T}, I\}$,右乘以 $\text{diag}\{S^{-1}, I, S^{-1}, I\}$,令 $S^{-T} T_1 S^{-1} = T_1, S^{-T} T_2 S^{-1} = T_2, S^{-T} P S^{-1} = P$,可得式(10)成立.

同样地,若式(27)和(28)成立,则 $\sum_{i,j=1}^r h_i h_j \lambda_{L,ij} < 0, L = 1, 2, \dots, n$. 令

$< 0, L = 1, 2, \dots, n$. 令

$$V_j = T_{221} N K_j, W_j = T_{11} L_j, P_{L,11} = X_{L,11},$$

$$P_{L,12} = X_{L,12}, P_{L,22} = X_{L,22}, T_{11f} = T_{11},$$

$$T_{22f} = T_{22}, T_{22f} = \text{diag}\{T_{221f}, T_{222f}\},$$

$$T_{1f} = \text{diag}\{T_{11f}, T_{22f}\}, T_{2f} = \frac{1}{f} T_{1f},$$

$$P_L = \begin{bmatrix} P_{L,11} & P_{L,12} \\ * & P_{L,22} \end{bmatrix},$$

由式(30)可知 $P_L > 0$.对左右乘以 I 的

$\sum_{i,j=1}^r h_i h_j \lambda_{L,ij} < 0$,整理后将 $A_{ij} = S^{-1} \overline{A_{ij}} S, B_i = S^{-1} \overline{B}_i, C_{ij}^0 = \overline{C}_{ij} S$ 代入,并左乘以 $\text{diag}\{S^{-T}, I, S^{-T}, I\}$,右乘以 $\text{diag}\{S^{-1}, I, S^{-1}, I\}$,令 $S^{-T} T_{1f} S^{-1} = T_{1f}, S^{-T} T_{2f} S^{-1} = T_{2f}, S^{-T} P_L S^{-1} = P_L$,可得式(11)成立.

由式(31)可知 T_{11} 和 T_{22} 均非奇异,可得 $L_j = T_{11}^{-1} W_j, K_j = N^{-1} T_{221}^{-1} V_j$.

令 $\rho = \frac{2}{\rho}$,基于观测器的次优 H 模糊可靠控制器问题可归结为凸优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho : (\rho, \rho, P_{11}, P_{12}, P_{22}, X_{L,11}, X_{L,12}, \\ & X_{L,22}, T_{11}, T_{221}, T_{222}, W_j, V_j), \quad (33) \\ \text{s. t.} \quad & \text{LMIs(25) } \sim \text{(30)}, \rho_0 < \rho_f^2. \end{aligned}$$

用相似变换法进行基于观测器的次优 H 模糊可靠控制器设计的算法 2 仅需将算法 1 中的凸优化问题(24)换为凸优化问题(33),限于篇幅,此处省

略。

注2 本文所提出的相似变换法不需要如文献[3]要求局部输入矩阵列满秩,扩大了适用范围。

注3 在适用范围方面,两步法比相似变换法适用的范围广。在保守性方面,多输入情况下相似变换法因要求 T_{221} 为对角阵,难以与两步法进行比较。但单输入情况下,相似变换法比两步法保守性低。

注4 两步法去掉条件(14),(15),(17)及相应的变量,相似变换法去掉条件(27),(28),(30)及相应的变量,均可得到基于观测器的 H 模糊控制器的设计方法。

4 仿真示例

考虑如下小车倒立摆系统^[9]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} + w, \\ z &= x_1, y = x_1. \end{aligned}$$

其中: x_1 表示摆偏离垂直位置的角度, x_2 表示角速度, w 表示外扰, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力常数, $a = 1/(m + M)$, m 是摆的质量, M 是推车质量, $2l$ 是摆的长度, u 是作用在小车上的力。本仿真参数选为 $m = 2 \text{ kg}$, $M = 8 \text{ kg}$, $2l = 1 \text{ m}$, $w = \sin(2t + \pi/4)$ 。当 x_1 在 0 和 $\pm \pi/3$ 附近线性化,可得如下 T-S 模糊模型表示:

If x_1 is about 0, then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_{w1} w(t) + B_1 u(t), \\ z(t) = C_{11} x(t), \\ y(t) = C_{21} x(t); \end{cases}$$

If x_1 is about $\pm \pi/3$, then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_{w2} w(t) + B_2 u(t), \\ z(t) = C_{12} x(t), \\ y(t) = C_{22} x(t). \end{cases}$$

选取模糊隶属函数

$$h_1(x_1) = 1 - \frac{2}{\pi} |x_1(t)|,$$

$$h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1).$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.2941 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12.6305 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0779 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = B_{w2} = [0 \ 1]^T, C_{11} = C_{12} = [1 \ 0],$$

$$C_{21} = C_{22} = [1 \ 0].$$

选取参数

$$\mu = 0.1, \bar{\mu} = 1, \rho = 0.8.$$

根据算法1设计,无法获得可行解,两步法失效。根据算法2设计,其中 $N = 1, \mu_1 = 2.2657, \mu_2 =$

$$1, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0779 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0779 & 0.5 \end{bmatrix},$$

可得 $\min_{\rho} \rho$ 的最小值为 0.3158。基于观测器的次优 H 模糊可靠控制器增益 $K_1 = [-1029.5216, -221.2371], K_2 = [-968.8725, -121.6381]$, 观测器增益 $L_1 = [0.7498, 14.8535]^T, L_2 = [0.9571, 21.5763]^T$ 。可见对此系统采用相似变换法比两步法保守性低。给定 $\rho = 0.8$, 根据注4用相似变换法求得基于观测器的 H 模糊控制器, 控制器增益 $K_1 = [-334.6312, -119.8521], K_2 = [-398.2046, -156.2141]$, 观测器增益 $L_1 = [0.3211, 25.7203]^T, L_2 = [0.1135, 131007]^T$ 。按文献[6]方法进行模糊可靠控制器设计, 选取故障容许集

$\rho = 0.1$, 得控制器增益 $K_1 = [-213.8534, -25.8567], K_2 = [-532.4785, -66.5754]^T$, 观测器增益为 $L_1 = [5.4775, 8.2501]^T, L_2 = [7.1756, 8.3545]^T$ 。

将上述设计的控制器分别应用于小车倒立摆系统, 执行器在 5 s 时发生 $\rho = 0.2$ 的失效故障, 系统和观测器初始状态分别为 $x_0 = [1 \ 0]^T, \hat{x}_0 = [1.1 \ 0]^T$ 。从图1可见, 采用基于观测器的 H 模糊控制器(虚线)不能保证系统发生故障时稳定, 采用文献[6]方法(实线)不能保证闭环系统在外扰作用下的鲁棒性。从图2可见, 所设计的控制器能保证系统在正常和故障情况下都能稳定并对干扰具有鲁棒性。定义被控输出能量与外扰能量比的平方根为

$\rho = 0.1$, 得控制器增益 $K_1 = [-213.8534, -25.8567], K_2 = [-532.4785, -66.5754]^T$, 观测器增益为 $L_1 = [5.4775, 8.2501]^T, L_2 = [7.1756, 8.3545]^T$ 。

将上述设计的控制器分别应用于小车倒立摆系统, 执行器在 5 s 时发生 $\rho = 0.2$ 的失效故障, 系统和观测器初始状态分别为 $x_0 = [1 \ 0]^T, \hat{x}_0 = [1.1 \ 0]^T$ 。从图1可见, 采用基于观测器的 H 模糊控制器(虚线)不能保证系统发生故障时稳定, 采用文献[6]方法(实线)不能保证闭环系统在外扰作用下的鲁棒性。从图2可见, 所设计的控制器能保证系统在正常和故障情况下都能稳定并对干扰具有鲁棒性。定义被控输出能量与外扰能量比的平方根为

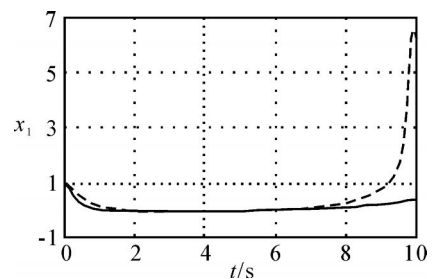


图1 两种方法的 x_1 响应

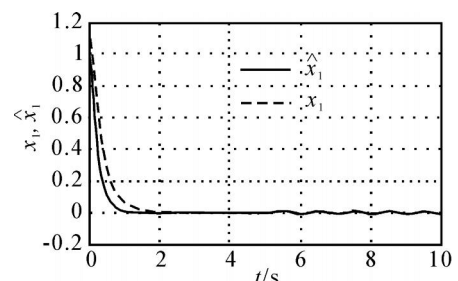


图2 本文方法的 x_1 响应及其估计 \hat{x}_1

$$\gamma(t) = \sqrt{\int_0^t z^T(\tau) z(\tau) d\tau / \int_0^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau}$$

从图 3 可以看出,在正常情况下 $\gamma(t)$ 迅速小于 0.5619,并且在执行器故障情况下也远小于 0.8.

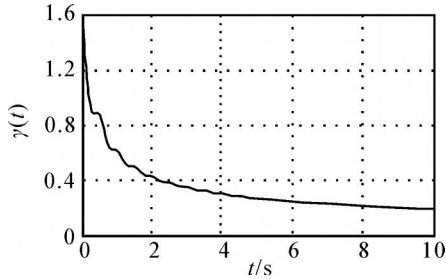


图 3 被控输出能量与外扰能量比的平方根

5 结 论

本文给出了两种基于观测器的 H 模糊可靠控制设计方法:两步法和相似变换法.两种方法均能将 BMI 问题转化为 LMI 问题.本文所提出的相似变换法不需要满足文献[3]方法所要求的局部输入矩阵列满秩的条件.分析了两种方法在适用范围和保守性方面的不同之处,采用何种设计方法需根据实际情况具体选择.仿真示例验证了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.
- [2] Wu H N, Li H X. H fuzzy observer-based control for a class of nonlinear distributed parameter systems with control constraints[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2008, 16(2): 506-516.
- [3] Lo J C, Lin M L. Existence of similarity transformation converting BMIs to LMIs[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(5): 840-851.
- [4] Wu H N, Zhang H Y. Reliable mixed L_2/H fuzzy static output feedback control for nonlinear systems with sensor faults[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1925-1932.
- [5] Wu H N, Zhang H Y. Reliable H fuzzy control for continuous-time nonlinear systems with actuator failures[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14(5): 609-618.
- [6] Chen B, Liu X P. Reliable control design of fuzzy dynamic systems with time-varying delay[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146(3): 349-374.
- [7] Assawinchaichote W, Nguang S K, Shi P, et al. H fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D -stability constraints: An LMI approach[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2008, 78(4): 514-531.
- [8] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable H controller design for linear systems[J]. Automatica, 2001, 37(5): 717-725.
- [9] He Y, Wu M, Jin H S. Improved bounded-real lemma representation and H control of systems with polytopic uncertainties[J]. IEEE Trans on circuits and systems, 2005, 52(7): 380-383.
- [10] Tuan H D, Apkarian P, Narikiyo T, et al. Parameterized linear matrix inequality technique in fuzzy control systems design[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(2): 324-332.

(上接第 620 页)

- [6] 刘建华, 樊晓平, 瞿志华. 一种基于相似度的新型粒子群算法[J]. 控制与决策, 2007, 22(10): 1155-1159.
(Liu J H, Fan X P, Qu Z H. A new particle swarm optimization algorithm based on similarity[J]. Control and Decision, 2007, 22(10): 1155-1159.)
- [7] 姜海明, 谢康, 王亚非. 按概率突跳的改进微粒群优化算法[J]. 吉林大学学报, 2007, 37(1): 141-145.
(Jiang H M, Xie K, Wang Y F. Modified particle swarm optimization via probabilistic leap[J]. J of Jilin University, 2007, 37(1): 141-145.)
- [8] 高尚, 杨静宇, 吴小俊, 等. 基于模拟退火算法思想的粒子群优化算法[J]. 计算机应用与软件, 2005, 22(2): 103-104.
(Gao S, Yang J Y, Wu X J, et al. Particle swarm optimization based on the ideal of simulated annealing algorithm[J]. Computer Applications and Software, 2005, 22(2): 103-104.)
- [9] Shi Y, Eberhart R C. Parameter selection in particle swarm optimization[C]. Annual Conf on Evolutionary Programming. San Diego, 1998: 591-600.