

文章编号: 1001-0920(2009)04-0488-06

## 纯反馈非线性离散系统的自适应神经网络控制

翟廉飞<sup>1a</sup>, 柴天佑<sup>1a,1b</sup>, 葛树志<sup>2</sup>

(1. 东北大学 a. 教育部辽宁省流程工业综合自动化重点实验室, b. 自动化研究中心, 沈阳 110004; 2. 新加坡国立大学 电气与计算机工程学院, 新加坡 117576)

**摘要:** 针对一类未知的纯反馈非线性离散系统, 提出了基于反步法设计的自适应神经网络控制方法. 为避免反步法设计中可能出现的因果矛盾问题, 首先将系统进行等价变换, 然后利用隐函数定理证实了理想虚拟控制输入和实际控制输入的存在性. 利用高阶神经网络估计这些控制量, 并基于反步法设计自适应神经网络控制系统, 证明了闭环系统半全局一致最终有界. 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 非线性系统; 神经网络; 自适应控制; 反步法; 离散系统

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Adaptive neural network control of pure-feedback nonlinear discrete-time systems

ZHAI Lianfei<sup>1a</sup>, CHAI Tianyou<sup>1a,1b</sup>, GE Shuzhi<sup>2</sup>

(1a. Key Laboratory of Process Industry Automation of Ministry of Education, 1b. Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of Electrical and Computer Engineering, National University of Singapore, Singapore 117576, Singapore. Correspondent: ZHAI Lianfei, E-mail: zlfly@yahoo.com.cn)

**Abstract:** For a class of pure-feedback discrete-time nonlinear systems, adaptive neural network control based on backstepping design is proposed. To avoid the causality contradiction problem in backstepping design, the system is firstly transformed through a coordinate transformation. Then implicit function theorem is exploited to assert the existence of the desired virtual controls and practical control. By using high-order neural networks to approximate the desired controls, an effective adaptive neural network control system is developed by backstepping design. The closed-loop system is proved to be semi-globally uniformly ultimately bounded. Simulation result illustrates the effectiveness of the proposed control.

**Key words:** Nonlinear systems; Neural networks; Adaptive control; Backstepping; Discrete systems

### 1 引言

近年来,反步法已广泛应用于具有三角结构的非线性系统控制中<sup>[1]</sup>. 对于具有严格反馈形式的离散非线性系统,提出了许多基于反步法的控制器设计方法<sup>[2-9]</sup>. 文献[2]针对一类参数严格反馈的离散非线性系统,提出了基于反步法的自适应控制方法; [3]将其推广到一类参数严格反馈的时变离散非线性系统中; [4]进一步提出避免过参数化的自适应反步控制方法; [5, 6]针对未知的严格反馈离散非线性系统,提出了基于反步法的神经网络自适应控制方

法,并将其推广到具有三角结构的多输入多输出离散非线性系统<sup>[7, 8]</sup>; [1]针对一类严格反馈的多变量系统,提出了基于反步法的神经网络自适应控制方法,将扩展 Kalman 滤波应用到神经网络的学习律中,并将该方法应用于感应电机.

文献[1-8]研究的是严格反馈形式的非线性系统,这些系统的控制输入均具有仿射形式,可以采用反馈线性化的方法来处理. 然而,对于纯反馈离散非线性系统,由于控制输入不具有仿射形式,不能采用反馈线性化来处理这类系统,控制问题变得非常复

收稿日期: 2008-04-10; 修回日期: 2008-09-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60828007); 国家 973 计划项目(2009CB320601); 国家创新研究群体科学基金项目(60821063); 高等学校学科创新引智计划项目(B08015).

作者简介: 翟廉飞(1981—),女,河南平顶山人,博士生,从事复杂工业过程智能控制及其应用等研究; 柴天佑(1947—),男,甘肃兰州人,中国科学院院士,教授,博士生导师,从事自适应控制、智能控制等研究.

杂.文献[9]曾针对一类非常特殊的纯反馈离散非线性系统,提出了自适应神经网络控制方法.然而,该方法只能处理两阶系统,对于一般的纯反馈离散非线性系统,目前没有很好的控制方法.本文将研究一般的未知纯反馈离散非线性系统的控制问题.

### 2 问题描述

考虑具有纯反馈形式的单变量离散非线性系统

$$\begin{cases} x_i(k+1) = f_i(\bar{x}_i(k), x_{i+1}(k)), \\ \quad \quad \quad 1 \quad i \quad n-1; \\ x_n(k+1) = f_n(\bar{x}_n(k), u(k)); \\ y(k) = x_1(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_i(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_i(k)]^T \in R^i$ ;  $u(k) \in R$  和  $y(k) \in R$  分别为系统的状态变量、输入和输出;  $f_i(\cdot) (i = 1, 2, \dots, n)$  为未知的光滑非线性函数.控制目标为设计控制系统使系统输出  $y(k)$  跟踪期望轨迹  $y_d(k)$ , 同时保证闭环系统的所有信号均有界.

**假设 1** 非线性函数的偏微分  $\partial f_i(\cdot) / \partial x_{i+1}(k)$  和  $\partial f_n(\cdot) / \partial u(k)$  的方向已知,且存在常数  $0 < \underline{g}_i < \bar{g}_i$  和  $0 < \underline{g}_n < \bar{g}_n$  满足  $\underline{g}_i < |\partial f_i(\cdot) / \partial x_{i+1}(k)| / \bar{g}_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  和  $\underline{g}_n < |\partial f_n(\cdot) / \partial u(k)| / \bar{g}_n$ .

假设 1 说明  $\partial f_i(\cdot) / \partial x_{i+1}(k)$  和  $\partial f_n(\cdot) / \partial u(k)$  的方向为正或为负.不失一般性,本文假设  $\partial f_i(\cdot) / \partial x_{i+1}(k)$  和  $\partial f_n(\cdot) / \partial u(k)$  为正<sup>[11]</sup>.

**假设 2** 期望轨迹  $y_d(k) (y_d(\forall k) = 0)$  光滑且已知.

**定义 1**<sup>[11]</sup> 对于任意给定的紧集  $\Omega$ , 如果  $\bar{x}_n(k_0) = x_0 \in \Omega$ , 且存在常数  $\delta > 0$  和整数  $N(k_0, x_0)$  使得对于所有的  $k \geq k_0 + N$  都有  $\bar{x}_n(k) \in \Omega$ , 那么系统(1)的解半全局一致最终有界.

**引理 1**<sup>[5]</sup> 对于线性时变离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $A(k)$ ,  $B$  和  $C$  为维数匹配的矩阵,且  $B$  和  $C$  为常数矩阵.令  $\Phi(k_1, k_0) = \prod_{k=k_0}^{k_1-1} A(k)$ , 若  $\|\Phi(k_1, k_0)\| < 1, \forall k_1 > k_0 \geq 0$ , 那么系统(2)在  $u(k) = 0$  时全局指数稳定,且输入输出有界稳定.

### 3 系统的等价变换

与文献[1,5]中的严格反馈离散非线性系统相似,当采用反步法直接对纯反馈离散非线性系统(1)进行控制系统设计时,将出现因果关系矛盾.参照文献[5]中的方法,将纯反馈离散非线性系统(1)等价变换成适合采用反步法设计的形式.

由系统(1)的前  $(n-1)$  个方程可知,  $x_i(k+1)$  为  $\bar{x}_{i+1}(k) (1 \leq i \leq n-1)$  的函数,为便于分析,记  $x_i(k+1)$  为

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= f_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k)), \\ & \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $f_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k)) = f_i(\bar{x}_i(k), x_{i+1}(k)), i = 1, 2, \dots, n-1$ . 因此,可得

$$\bar{x}_i(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \dots \\ x_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1}^c(\bar{x}_2(k)) \\ \dots \\ f_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k)) \end{bmatrix} := F_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k)), \quad (4)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . 值得注意的是  $f_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k))$  是标量,  $F_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k)) \in R^i$  为矢量.将系统的拍数后推 1 步,系统(1)的前  $(n-1)$  个方程可以表示为

$$\begin{cases} x_i(k+2) = f_i(\bar{x}_i(k+1), x_{i+1}(k+1)), \\ \quad \quad \quad 1 \quad i \quad n-2; \\ x_{n-1}(k+2) = f_{n-1}(\bar{x}_{n-1}(k+1), x_n(k+1)). \end{cases} \quad (5)$$

将式(3)和(4)代入(5)可得

$$\begin{cases} x_i(k+2) = f_{(n-1),i}^c(\bar{x}_{i+2}(k)), \\ \quad \quad \quad 1 \quad i \quad n-2; \\ x_{n-1}(k+2) = F_{n-1}(\bar{x}_n(k), x_n(k+1)). \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{(n-1),i}^c(\bar{x}_{i+2}(k)) &= \\ & f_i(F_{n,i}^c(\bar{x}_{i+1}(k)), f_{(n-1),i+1}^c(\bar{x}_{i+2}(k))), \\ & \quad \quad \quad 1 \quad i \quad n-2; \\ F_{n-1}(\bar{x}_n(k), x_n(k+1)) &= \\ & f_{n-1}(F_{n,(n-1)}^c(\bar{x}_n(k)), x_n(k+1)). \end{aligned}$$

同理,方程(6)中的前  $(n-2)$  个方程可以写成

$$\bar{x}_i(k+2) = \begin{bmatrix} x_1(k+2) \\ \dots \\ x_i(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{(n-1),1}^c(\bar{x}_3(k)) \\ \dots \\ f_{(n-1),i}^c(\bar{x}_{i+2}(k)) \end{bmatrix} := F_{(n-1),i}^c(\bar{x}_{i+2}(k)), \quad (7)$$

依此类推,后推  $(n-2)$  步,系统(1)的前 2 个方程可以表示为

$$\begin{cases} x_1(k+n-1) = f_{2,1}^c(\bar{x}_n(k)), \\ x_2(k+n-1) = F_2(\bar{x}_n(k), x_3(k+n-2)). \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{2,1}^c(\bar{x}_n(k)) &= f_1(F_{3,1}^c(\bar{x}_{n-1}(k)), f_{3,2}^c(\bar{x}_n(k))), \\ F_2(\bar{x}_n(k), x_3(k+n-2)) &= \\ & f_2(F_{3,2}^c(\bar{x}_n(k)), x_3(k+n-2)). \end{aligned}$$

继续后推一步,系统(1)的第 1 个方程变为

$$x_1(k+n) = F_1(\bar{x}_n(k), x_2(k+n-1)), \quad (9)$$

其中  $F_1(\bar{x}_n(k), x_2(k+n-1)) = f_1(f_{2,1}^c(\bar{x}_n(k)), x_2(k+n-1))$ .

由于式(6)~(9)均由原系统得到,纯反馈非线性系统(1)可以等价

$$\begin{cases} x_1(k+n) = F_1(\bar{x}_n(k), x_2(k+n-1)), \\ \dots \\ x_{n-1}(k+2) = F_{n-1}(\bar{x}_n(k), x_n(k+1)), \\ x_n(k+1) = f_n(\bar{x}_n(k), u(k)), \\ y(k) = x_1(k). \end{cases} \quad (10)$$

从上述推导过程可知  $\bar{x}_i(k+n-i) = F_{i+1,i}^c(\bar{x}_n(k))$ ,它与变量  $x_{i+1}(k+n-i)$  无关.另外,从  $F_i(\bar{x}_n(k), x_{i+1}(k+n-i))$  的定义可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(\bar{x}_n(k), x_{i+1}(k+n-i))}{\partial x_{i+1}(k+n-i)} &= \\ \frac{\partial f_i(F_{i+1,i}^c(\bar{x}_n(k)), x_{i+1}(k+n-i))}{\partial x_{i+1}(k+n-i)} &= \\ \frac{\partial f_i(\bar{x}_i(k+n-i), x_{i+1}(k+n-i))}{\partial x_{i+1}(k+n-i)}, & \\ 1 \leq i < n. & \quad (11) \end{aligned}$$

因此,由假设1知

$$g_i < \left| \frac{\partial F_i(\bar{x}_n(k), x_{i+1}(k+n-i))}{\partial x_{i+1}(k+n-i)} \right| \leq \bar{g}_i, \quad 1 \leq i < n. \quad (12)$$

**注1** 由式(11)和(12)可以看出,通过等价变换,原系统的偏微分性质仍然保留.由于系统为非仿射形式,性质(12)保证了理想的虚拟控制输入和实际控制输入的存在性.

#### 4 控制系统设计

下面利用反步法对系统(10)设计神经网络控制器.设计过程包括  $n$  步,在第  $i(i=1,2,\dots,n-1)$  步,设计虚拟控制输入  $\hat{x}_{i+1}(k)$ ,在第  $n$  步,设计实际的控制输入  $u(k)$ .与文献[5]中的严格反馈非线性系统不同,本文的被控对象为非仿射形式,不能采用反馈线性化的方法来构造虚拟控制输入和实际控制输入.在每一步,首先采用隐函数定理说明期望的虚拟控制输入和实际控制输入的存在性,然后再进行控制器设计.具体设计过程如下:

**Step1:** 定义  $e_1(k) = x_1(k) - y_d(k)$ ,利用系统(10)的第1个方程得到

$$\begin{aligned} e_1(k+n) &= x_1(k+n) - y_d(k+n) = \\ &F_1(\bar{x}_n(k), x_2(k+n-1)) - y_d(k+n). \end{aligned} \quad (13)$$

将  $x_2(k+n-1)$  看作式(13)的虚拟控制输入,根据式(12)和隐函数定理可知,存在唯一光滑的理想虚拟控制输入  $\hat{x}_2^*(k) := \hat{x}_2^*(\bar{x}_n(k), y_d(k+n))$  使得

$$F_1(\bar{x}_n(k), \hat{x}_2^*(k)) - y_d(k+n) = 0, \quad (14)$$

其中  $\hat{x}_2^*(k)$  是关于  $\bar{x}_n(k)$  和  $y_d(k+n)$  的函数.可采

用如下的高阶神经网络估计  $\hat{x}_2^*(k)$ :

$$\hat{x}_2^*(k) = W_1^{*T} \phi_1(z_1(k)) + z_1, \quad W_1^* \in \mathbb{R}^{l_1}. \quad (15)$$

$$\phi_1(z_1(k)) = [\phi_{11}(z_1(k)), \phi_{12}(z_1(k)), \dots, \phi_{1l_1}(z_1(k))]^T \in \mathbb{R}^{l_1};$$

$$\phi_{ij}(z_1(k)) = \prod_{j \in I_i} (\phi_{ij}(z_j(k)))^{\mu_j(i)}, \quad i=1,2,\dots,l_1;$$

$$z_1(k) = [z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1(n+1)}]^T = [\bar{x}_n^T(k), y_d(k+n)]^T, \quad z_1 \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

其中:  $W_1^* \in \mathbb{R}^{l_1}$  为理想的神经网络权值,  $l_1$  为隐元数,估计误差  $e_1$  在紧集  $\Omega_{e_1}$  中有界,即  $\|e_1\| \leq \rho_1$ ,  $\{I_1, I_2, \dots, I_{l_1}\}$  为  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  的非有序子集,  $\mu_j(i)$  为非负整数,基函数  $\phi_{ij}(z_j)$  选择双曲正切函数  $\phi_{ij}(z_j) = (e^{z_j} - e^{-z_j}) / (e^{z_j} + e^{-z_j})$ .因此,可构造虚拟的神经网络控制输入和神经网络权值自适应律为

$$\hat{x}_2(k) = \hat{W}_1^T(k) \phi_1(z_1(k)), \quad W_1(k) \in \mathbb{R}^{l_1}; \quad (16)$$

$$W_1(k+1) = W_1(k_1) - \eta_1 [\phi_1(z_1(k_1)) e_1(k+1) + \eta_1 W_1(k_1)]. \quad (17)$$

其中:  $k_1 = k - n + 1$ ,  $\eta_1 = \eta_1 I$  为对角矩阵,  $\eta_1 > 0$ ,  $\eta_1 > 0$ .

**Step  $i(2 \leq i < n)$ :** 定义  $e_i(k) = x_i(k) - \hat{x}_i(k_{i-1})$ ,  $k_{i-1} = k - n + i - 1$ ,利用系统(10)的第  $i$  个方程得

$$\begin{aligned} e_i(k+n-i+1) &= x_i(k+n-i+1) - \hat{x}_i(k) = \\ &F_i(\bar{x}_n(k), x_{i+1}(k+n-i)) - \hat{x}_i(k). \end{aligned} \quad (18)$$

将  $x_{i+1}(k+n-i+1)$  看作式(18)的虚拟控制输入,根据式(12)和隐函数定理可知,存在唯一光滑的理想虚拟控制输入  $\hat{x}_{i+1}^* := \hat{x}_{i+1}^*(\bar{x}_n(k), \hat{x}_i(k))$  使得

$$F_i(\bar{x}_n(k), \hat{x}_{i+1}^*(k)) - \hat{x}_i(k) = 0, \quad (19)$$

其中  $\hat{x}_{i+1}^*(k)$  是关于  $\bar{x}_n(k)$  和  $\hat{x}_i(k)$  的函数.可采用如下的高阶神经网络估计  $\hat{x}_{i+1}^*(k)$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1}^*(k) &= W_i^{*T} \phi_i(z_i(k)) + z_i, \\ W_i^* &\in \mathbb{R}^{l_i}. \end{aligned} \quad (20)$$

其中:  $z_i(k) = [\bar{x}_n^T(k), \hat{x}_i(k)]^T, z_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $W_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}$  为理想的神经网络权值,  $l_i$  为神经网络的隐元数,估计误差  $e_i$  在紧集  $\Omega_{e_i}$  中有界,即  $\|e_i\| \leq \rho_i$ .因此,构造虚拟的神经网络控制输入和神经网络权值自适应律为

$$\hat{x}_{i+1}(k) = W_i^T(k) \phi_i(z_i(k)), \quad W_i(k) \in \mathbb{R}^{l_i}; \quad (21)$$

$$W_i(k+1) = W_i(k_i) - \eta_i [\phi_i(z_i(k_i)) e_i(k+1) + \eta_i W_i(k_i)]. \quad (22)$$

其中:  $k_i = k - n + i$ ,  $\eta_i = \eta_i I$  为对角矩阵,  $\eta_i > 0$ ,  $\eta_i > 0$ .

**Step  $n$ :** 定义  $e_n(k) = x_n(k) - \hat{x}_n(k-1)$ ,利用系统(10)的第  $n$  个方程得

$$\begin{aligned} e_n(k+1) &= x_n(k+1) - \hat{x}_n(k) = \\ &f_n(\bar{x}_n(k), u(k)) - \hat{x}_n(k). \end{aligned} \quad (23)$$

由假设 1 可知  $g_n < \partial f_n / \partial u(k) < \bar{g}_n$ , 又由隐函数定理可知, 存在唯一光滑的理想控制输入  $u^*(k) := u^*(\bar{x}_n(k), z_n(k))$  使得

$$f_n(\bar{x}_n(k), u^*(k)) - z_n(k) = 0, \quad (24)$$

其中  $u^*(k)$  是关于  $\bar{x}_n(k)$  和  $z_n(k)$  的函数. 可采用如下的高阶神经网络估计  $u^*(k)$ :

$$u^*(k) = W_n^{*T} z_n(k) + z_n, \quad W_n^* \in R^{l_n}. \quad (25)$$

其中:  $z_n(k) = [\bar{x}_n^T(k), z_n(k)]^T, z_n \in R^{n+1}, W_n^* \in R^{l_n}$  为理想的神经网络权值,  $l_n$  为神经网络的隐元数, 估计误差  $z_n$  在紧集中有界, 即  $\|z_n\| \leq \rho_n$ . 因此, 可构造神经网络控制输入和神经网络权值自适应律为

$$u(k) = W_n^T(k) z_n(k), \quad W_n(k) \in R^{l_n}; \quad (26)$$

$$W_n(k+1) = W_n(k) - \eta [z_n(k) e_n(k+1) + \lambda W_n(k)]. \quad (27)$$

其中:  $\eta = \eta I$  为对角矩阵,  $\eta > 0, \lambda > 0$ .

综上, 针对系统(10)设计的虚拟控制输入和实际控制输入为

$$\begin{cases} u_i(k) = W_{i-1}^T(k) z_{i-1}(k), \\ i = 2, 3, \dots, n; \\ u(k) = W_n^T(k) z_n(k). \end{cases} \quad (28)$$

对应的神经网络权值自适应律为

$$W_i(k+1) = W_i(k) - \eta [z_i(k) e_i(k+1) + \lambda W_i(k)], \quad (29)$$

$$k_i = k - n + i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\begin{cases} e_1(k) = x_1(k) - y_d(k); \\ e_i(k) = x_i(k) - z_i(k_{i-1}), \quad 2 \leq i < n; \\ e_n(k) = x_n(k) - z_n(k-1). \end{cases} \quad (30)$$

### 5 稳定性分析

**定理 1** 对于离散非线性系统(1), 控制输入(28)以及神经网络权值自适应律(29), 如果选择参数满足

$$\eta < \frac{1}{(1 + \bar{g}_i) l_i}, \quad \lambda < \frac{1}{2 + l_j + \bar{g}_j l_j},$$

$$\eta < \frac{1}{2 + l_n + \bar{g}_n l_n},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

则闭环系统半全局一致最终有界, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(k) - y_d(k)\| = 0$ , 为任意正数.

**证明** 在  $k$  时刻, 假设  $\bar{x}_n(k)$  有界, 利用反步法证明  $\bar{x}_n(k+1)$  和  $u(k)$  有界.

Step1: 利用中值定理、式(13)和(14), 得

$$e_1(k+n) =$$

$$F_1(\bar{x}_n(k), z_2^*(k)) - y_d(k+n) +$$

$$g_1(k+n-1) [x_2(k+n-1) - z_2^*(k)] = g_1(k+n-1) [x_2(k+n-1) - z_2^*(k)]. \quad (31)$$

其中

$$g_1(k+n-1) :=$$

$$\frac{\partial F_1(\bar{x}_n(k), x_2(k+n-1))}{\partial x_2(k+n-1)} \Big|_{x_2(k+n-1)=x_{2,1}};$$

$$x_{2,1} = \alpha_1 x_2(k+n-1) + (1 - \alpha_1) z_2^*(k), \quad 0 < \alpha_1 < 1.$$

如前定义,  $e_2(k) = x_2(k) - z_2(k)$ , 则  $x_2(k+n-1) = e_2(k+n-1) + z_2(k)$ . 将它代入式(31), 并由式(15)和(16)可得

$$e_1(k+n) = g_1(k+n-1) [\tilde{W}_1^T(k) z_1(k) + e_2(k+n-1) - \alpha_1], \quad (32)$$

其中  $\tilde{W}_1(k) = W_1(k) - W_1^*$ . 式(32)可进一步写成

$$\tilde{W}_1^T(k_1) z_1(k_1) = e_1(k+1)/g_1(k) - e_2(k) + \alpha_1. \quad (33)$$

由假设 1 和式(12)可知,  $0 < g_1 < g_1(k) < \bar{g}_1$ . 选择 Lyapunov 函数

$$V_1(k) = e_1^2(k)/\bar{g}_1 + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{W}_1^T(k_1) z_1(k_1 + j), \quad (34)$$

其一阶差分为

$$\begin{aligned} V_1(k) - V_1(k+1) &= e_1^2(k+1)/\bar{g}_1 - e_1^2(k)/\bar{g}_1 + \tilde{W}_1^T(k+1) z_1(k+1) - \tilde{W}_1^T(k) z_1(k) \\ &= e_1^2(k+1)/\bar{g}_1 - e_1^2(k)/\bar{g}_1 - 2 \tilde{W}_1^T(k) z_1(k) e_1(k+1) \\ &\quad - 2 \alpha_1 W_1^T(k) W_1(k) + 2 \alpha_1 W_1^T(k) z_1(k) + \tilde{W}_1^T(k) z_1(k) - 2 \alpha_1 W_1^T(k) z_1(k) e_1(k+1) \\ &\quad - e_1^2(k+1)/\bar{g}_1 - e_1^2(k)/\bar{g}_1 - 2 \alpha_1 e_1(k+1) \\ &\quad + 2 e_2(k) e_1(k+1) - 2 \alpha_1 \tilde{W}_1^T(k) W_1(k) + \tilde{W}_1^T(k) z_1(k) - 2 \alpha_1 W_1^T(k) z_1(k) e_1(k+1) \\ &\quad + 2 \alpha_1 W_1^T(k) z_1(k) e_1(k+1) + \alpha_1^2 W_1^T(k) z_1(k). \end{aligned}$$

应用下式:

$$\begin{aligned} -2 \alpha_1 e_1(k+1) &\leq -\alpha_1 e_1^2(k+1)/\bar{g}_1 + \bar{g}_1 \alpha_1^2 / 4, \\ 2 e_2(k) e_1(k+1) &\leq \alpha_1 e_1^2(k+1)/\bar{g}_1 + \bar{g}_1 e_2^2(k) / 4, \\ \tilde{W}_1^T(k) z_1(k) - 2 \alpha_1 W_1^T(k) z_1(k) e_1(k+1) &\leq -\alpha_1 e_1^2(k+1) + \bar{g}_1 \alpha_1^2 \|W_1(k)\|^2, \\ -2 \alpha_1 \tilde{W}_1^T(k) W_1(k) &= -\alpha_1 \|\tilde{W}_1(k)\|^2 - \alpha_1 \|W_1(k)\|^2 + \alpha_1 \|W_1^*\|^2, \end{aligned}$$

$$-2 \alpha_1 \tilde{W}_1^T(k) W_1(k) = -\alpha_1 \|\tilde{W}_1(k)\|^2 - \alpha_1 \|W_1(k)\|^2 + \alpha_1 \|W_1^*\|^2,$$

可得

$$\begin{aligned}
& V_1(k) \\
& - e_1^2(k+1)/\bar{g}_1 - e_2^2(k)/\bar{g}_1 + \dots \\
& - (1 - \alpha_1 - \bar{g}_1^{-1} l_1) W_1(k) + \dots \\
& \bar{g}_1 e_2^2(k)/\dots, \tag{35}
\end{aligned}$$

其中  $\alpha_1 = 1 - 2\alpha_1 - \alpha_1 l_1 - \bar{g}_1^{-1} l_1$  和  $\alpha_1 = \bar{g}_1^{-2} / \dots + \dots W_1^*$  有界. 如果选择参数满足

$$\alpha_1 < \frac{1}{2 + l_1 + \bar{g}_1^{-1} l_1}, \quad \alpha_1 < \frac{1}{(1 + \bar{g}_1^{-1}) \dots}, \tag{36}$$

那么  $\alpha_1 > 0$  且  $(1 - \alpha_1 - \bar{g}_1^{-1} l_1) > 0$ . 在式(35)中, 由于  $\alpha_1$  有界, 如果能够保证  $e_2(k)$  有界, 式(35)中最后一项  $\bar{g}_1 e_2^2(k)/\dots$  有界, 那么一旦  $|e_1(k)| > \sqrt{g_1^{-1} + e_2^2(k)/\dots}$ , 则  $V_1(k) < 0$ . 说明: 若  $e_2(k)$  有界, 则  $V_1(k) = V_1(0) + \sum_{j=0}^k V_1(j)$  和  $e_1(k)$  均有界, 并且误差  $e_1(k)$  渐近收敛于紧集  $\Omega_1 = \{ |e_1| \leq \sqrt{g_1^{-1} + e_2^2(k)/\dots} \}$ .

神经网络的权值自适应律(17)可以进一步写成

$$\begin{aligned}
& W_1(k+1) = \\
& (I - \alpha_1) W_1(k) - \alpha_1 (z_1(k)) e_1(k+1) = \\
& A_1(k) W_1(k) - \alpha_1 (z_1(k)) e_1(k+1), \tag{37}
\end{aligned}$$

其中  $A_1(k) = I - \alpha_1$ . 由于  $\alpha_1(z_1(k))$  和  $\alpha_1$  有界, 由以上的分析可知, 若  $e_2(k)$  和  $e_1(k)$  有界, 那么式(37)的最后一项有界. 由式(36)可知,  $0 < \alpha_1 < 1$ , 因此  $A_1(k)$  的特征根均位于单位圆内. 应用引理1可得神经网络的权值  $W_1(k)$  有界.

综上, 如果  $e_2(k)$  有界, 那么  $V_1(k)$ ,  $e_1(k)$  和  $W_1(k)$  均有界. 下面将证明  $e_2(k)$  有界.

Step  $i$  ( $2 \leq i < n$ ): 由中值定理、式(18)和(19)得

$$\begin{aligned}
& e_i(k+n-i+1) = \\
& F_i(\bar{x}_n(k), \hat{x}_{i+1}(k)) - e_i(k) + \\
& \frac{\partial F_i(\bar{x}_n(k), x_{i+1}(k+n-i))}{\partial x_{i+1}(k+n-i)} \Big|_{x_{i+1}(k+n-i)=x_{i+1}(k)} \times \\
& [x_{i+1}(k+n-i) - \hat{x}_{i+1}(k)] = \\
& g_i(k+n-i) [x_{i+1}(k+n-i) - \hat{x}_{i+1}(k)]. \tag{38}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& g_i(k+n-i) = \\
& \frac{\partial F_i(\bar{x}_n(k), x_{i+1}(k+n-i))}{\partial x_{i+1}(k+n-i)} \Big|_{x_{i+1}(k+n-i)=x_{i+1}(k)}; \\
& x_{(i+1)i} = \alpha_i x_{i+1}(k+n-i) + (1 - \alpha_i) \hat{x}_{i+1}(k), \\
& 0 \leq \alpha_i \leq 1.
\end{aligned}$$

如前面所定义,  $e_{i+1}(k) = x_{i+1}(k) - \hat{x}_{i+1}(k)$ ,  $k_i = k - n + i$ , 即  $x_{i+1}(k+n-i) = e_{i+1}(k+n-i) + \hat{x}_{i+1}(k)$ , 代入式(38), 并由式(20)和(21)可得

$$\begin{aligned}
& e_i(k+n-i+1) = \\
& g_i(k+n-i) [\tilde{W}_i^T(k) - \hat{W}_i^T(z_i(k)) + \\
& e_{i+1}(k+n-i) - z_i],
\end{aligned}$$

其中  $\tilde{W}_i(k) = W_i(k) - W_i^*$ . 上式可进一步写成

$$\tilde{W}_i^T(k) - \hat{W}_i^T(z_i(k)) = e_i(k+1)/g_i - e_{i+1}(k) + z_i. \tag{39}$$

由假设1和式(12)可知,  $0 < g_i < g_i(k) \leq \bar{g}_i$ . 选择 Lyapunov 函数

$$V_i(k) = \frac{1}{g_i} e_i^2(k) + \sum_{j=0}^{n-i} \tilde{W}_i^T(k) + \dots j) \tilde{W}_i(k_i + j). \tag{40}$$

类似于 Step1 的推导过程, 可得 Lyapunov 函数(40)的一阶差分为

$$\begin{aligned}
& V_i(k) - e_i^2(k+1)/\bar{g}_i - \\
& e_i^2(k)/\bar{g}_i + \dots - \alpha_i (1 - \alpha_i) - \\
& \bar{g}_i^{-1} W_i(k) + \dots + \bar{g}_i e_{i+1}^2(k)/\dots, \tag{41}
\end{aligned}$$

其中  $\alpha_i = 1 - 2\alpha_i - \alpha_i l_i - \bar{g}_i^{-1} l_i$  和  $\alpha_i = \bar{g}_i^{-2} / \dots + \dots W_i^*$  有界. 如果选择参数满足

$$\alpha_i < \frac{1}{2 + l_i + \bar{g}_i^{-1} l_i}, \quad \alpha_i < \frac{1}{(1 + \bar{g}_i^{-1}) \dots}, \tag{42}$$

那么  $\alpha_i > 0$  且  $(1 - \alpha_i - \bar{g}_i^{-1} l_i) > 0$ . 同理可知, 如果能够保证  $e_{i+1}(k)$  有界, 则  $V_i(k)$ ,  $e_i(k)$  和  $W_i(k)$  均有界, 且  $e_i(k)$  收敛于紧集  $\Omega_i = \{ |e_i| \leq \sqrt{g_i^{-1} + e_{i+1}^2(k)/\dots} \}$ . 下面证明  $e_{i+1}(k)$  有界.

Step  $n$ : 利用中值定理、式(23)和(24)可得

$$\begin{aligned}
& e_n(k+1) = \\
& f_n(\bar{x}_n(k), u(k)) - e_n(k) + \\
& \frac{\partial f_n(\bar{x}_n(k), u(k))}{\partial u(k)} \Big|_{u(k)=u^*(k)} [u(k) - u^*(k)] = \\
& g_n(k) [u(k) - u^*(k)]. \tag{43}
\end{aligned}$$

其中:  $g_n(k) = \frac{\partial f_n(\bar{x}_n(k), u(k))}{\partial u(k)} \Big|_{u(k)=u^*(k)}$ ,  $u^*(k) = nu(k) + (1 - n)u^*(k)$  且  $0 \leq n \leq 1$ . 将式(25)和(26)代入(43), 整理得

$$\tilde{W}_n(k) - \hat{W}_n(z_n(k)) = e_n(k+1)/g_n(k) + z_n, \tag{44}$$

其中  $\tilde{W}_n(k) = W_n(k) - W_n^*$ . 选择 Lyapunov 函数

$$V_n(k) = e_n^2(k)/\bar{g}_n + \tilde{W}_n^T(k) - \hat{W}_n(k), \tag{45}$$

采用类似于 Step1 的推导过程, 可得式(45)的一阶差分为

$$\begin{aligned}
& V_n(k) - e_n^2(k+1)/\bar{g}_n - e_n^2(k)/\bar{g}_n + \dots \\
& (1 - \alpha_n - \bar{g}_n^{-1} l_n) W_n(k) + \dots, \tag{46}
\end{aligned}$$

其中  $\bar{g}_n = 1 - \bar{g}_n l_n - \bar{g}_n^2 l_n$  和  $\bar{g}_n = \bar{g}_n^2 l_n / (1 + \bar{g}_n l_n)$  有界. 如果选择参数满足

$$\bar{g}_n < \frac{1}{1 + l_n + \bar{g}_n l_n}, \quad \bar{g}_n < \frac{1}{(1 + \bar{g}_n) l_n} \quad (47)$$

那么,一旦  $|e_n(k)| > \sqrt{\bar{g}_n}$ , 则  $V_n(k) = 0$ . 说明  $e_n(k), V_n(k)$  和  $W_n(k)$  均有界, 另外,  $e_n(k)$  将渐近收敛于紧集  $\bar{e}_n = \{ |e| \leq \sqrt{\bar{g}_n} \}$ .

由  $e_n(k)$  有界可知, Step  $(n - 1)$  中  $\bar{g}_{n-1} e_n^2(k) / \bar{g}_{n-1}$  有界, 因此  $V_{n-1}(k), e_{n-1}(k)$  和  $W_{n-1}(k)$  均有界. 依此类推, 向后推  $(n - 1)$  步, 可得  $V_i(k), e_i(k)$  和  $W_i(k) (i = 1, 2, \dots, n - 1)$  均有界, 进一步得  $x_i(k) (i = 1, 2, \dots, n - 1)$  有界.

基于上述分析, 如果  $\bar{x}_n(k)$ , 那么  $\bar{x}_n(k + 1)$

且  $u(k)$  有界. 如果系统的初始状态  $\bar{x}_n(0)$ , 参数  $i < 1 / [1 + \bar{g}_i] l_i, j < 1 / (2 + l_j + \bar{g}_j l_j) (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n - 1)$  和  $\bar{g}_n < 1 / (2 + l_n + \bar{g}_n l_n)$ , 存在  $k^* > k_0$ , 使得在所有  $k > k^*$  时刻系统的跟踪误差  $e_i(k)$  和神经网络权值  $W_i(k)$  均有界, 则说明闭环系统半全局一致最终有界.

### 6 系统仿真

为验证本文所提出控制方法的有效性, 将其应用于如下纯反馈离散非线性系统:

$$\begin{cases} x_1(k + 1) = 0.9x_1(k) + 0.2x_1^2(k)x_2(k) + \\ \quad 0.3x_2(k) + 0.1x_1(k)e^{-0.1/(1+5x_2^2(k))}, \\ x_2(k + 1) = \\ \quad 0.5x_2(k) + 0.2\sin(x_1(k)x_2(k)) + 1.2u(k) + \\ \quad 0.1x_1(k)x_2(k)/(10 + u^2(k)), \\ y(k) = x_1(k). \end{cases}$$

控制目标为输出跟踪

$$y_d(k) = 0.5\sin\left(\frac{k}{400}\right) + 0.2\cos\left(\frac{k}{130}\right).$$

虚拟控制输入和实际控制输入分别为

$$\begin{cases} z_2(k) = W_1^T(k) z_1(k), \\ z_1(k) = [x_1(k), x_2(k), y_d(k + 2)]^T, \\ u(k) = W_2^T(k) z_2(k), \\ z_2(k) = [x_1(k), x_2(k), z_2(k)]^T. \end{cases}$$

神经网络权值自适应律为

$$\begin{aligned} W_1(k + 1) &= W_1(k - 1) - \eta_1 [z_1(k - 1) \\ &\quad e_1(k + 1) + \eta_1 W_1(k - 1)], \\ W_2(k + 1) &= W_2(k) - \eta_2 [z_2(k) e_2(k + 1) \\ &\quad + \eta_2 W_2(k)]. \end{aligned}$$

误差为  $e_1(k) = x_1(k) - y_d(k), e_2(k) = x_2(k) - x_1(k - 1)$ . 系统的初始状态为  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , 神经网络的隐层节点数为  $l_1 = l_2 = 13$ , 初始基函数分别选择为  $W_1(0) = W_2(0) = 0$ , 初始权值为

$W_1(0) = W_2(0) = 0$ . 虚拟控制量的初始值为  $z_2(0) = 0$ , 自适应增益矩阵  $\eta_1 = \eta_2 = 0.07I$ , 且  $\eta_1 = 0.002, \eta_2 = 0.0001$ . 仿真结果如图 1 ~ 图 3 所示.

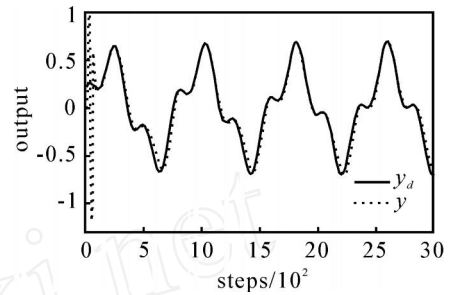


图 1 系统输出

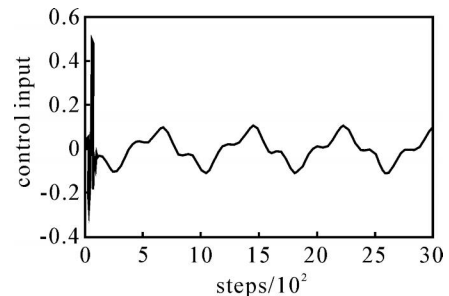


图 2 控制量

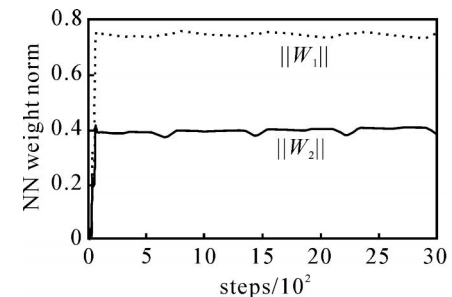


图 3 神经网络权值的模 ( $W_1(k)$  和  $W_2(k)$ )

图 1 给出了系统输出跟踪期望轨迹的跟踪性能, 其中实线表示期望轨迹  $y_d$ , 点线表示系统的输出  $y$ . 从图 1 中可以看出, 在仿真的初始时刻, 系统的跟踪误差较大, 随着时间的推移, 系统输出能够很好地跟踪设定值. 图 2 显示了对应的控制量. 图 3 给出了神经网络权值的模. 从图 2 和图 3 可以看出, 控制量和神经网络权值均有界.

### 7 结 论

本文研究了一类具有纯反馈形式的未知离散非线性系统, 提出了基于反步法的神经网络自适应控制方法. 为避免因果矛盾问题, 首先将被控系统等价变换成适合反步法设计的形式. 应用隐函数定理证实了理想的虚拟控制输入和实际控制输入的存在性, 然后用神经网络估计虚拟控制输入和实际控制输入. 适当选择控制器参数, 闭环系统能够半全局一致最终有界. 仿真研究验证了所提出方法的有效性.

(下转第 498 页)

- Methods-Support Vector Learning. Cambridge: MIT Press, 1998: 185-208.
- [8] 李凯, 黄厚宽. 支持向量机增量学习算法研究[J]. 北方交通大学学报, 2003, 27(5): 34-37.  
(Li K, Huang H K. Research on incremental learning algorithm of support vector machine[J]. J of Northern Jiaotong University, 2003, 27(5): 34-37.)
- [9] Almeida M B, Braga A P, Braga J P. SVM-KM: Speeding SVMs learning with a priori cluster selection and  $k$ -means[C]. Proc of the 6th Brazilian Symposium on Neural Networks. Brazil, 2000: 162-167.
- [10] 焦李成, 张莉, 周伟达. 支撑矢量预选取的中心距离比值法[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 383-386.  
(Jiao L C, Zhang L, Zhou W D. Pre-extracting support vectors for support vector machine[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(3): 383-386.)
- [11] 丁爱玲, 刘芳, 曹伟. 支撑矢量预选取的自适应投影算法[J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(19): 116-118.  
(Ding A L, Liu F, Cao W. Adaptive projective algorithm for selecting support vector beforehand[J]. Computer Engineering and Applications, 2002, 38(19): 116-118.)
- [12] 安全龙, 王正欧. 预抽取支持向量机的支持向量[J]. 计算机工程, 2004, 20(30): 10-11, 48.  
(An J L, Wang Z O. Pre-extracting support vectors for support vector machine[J]. Computer Engineering, 2004, 20(30): 10-11, 48.)
- [13] 廖东平, 魏玺章, 黎湘, 等. 一种新的支持向量机快速训练算法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(11): 1954-1957.  
(Liao D P, Wei X Z, Li X, et al. New fast training algorithm of support vector machine [J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(11): 1954-1957.)
- [14] Meng D Y, Xu Z B, Jing W F. A more efficient preprocessing method for support vector classification [C]. Proc of Int Conf on Neural Networks and Brain 2005. Beijing: IEEE Press, 2005: 1173-1177.
- [15] Du H, Chen Y Q. Rectified nearest feature line segment for pattern classification [J]. Pattern Recognition, 2007, 40(5): 1486-1497.
- [16] Ripley B D. Pattern recognition and neural networks [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

(上接第 493 页)

### 参考文献(References)

- [1] Alanis A Y, Sanchez E N, Loukianov A G. Discrete-time adaptive backstepping nonlinear control via high-order neural networks [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2007, 18(4): 1185-1195.
- [2] Yeh P C, Kokotovic P V. Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems [J]. Int J of Control, 1995, 62(2): 303-324.
- [3] Zhang Y, Wen C Y, Soh Y C. Discrete-time robust backstepping adaptive control for nonlinear time-varying systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(9): 1749-1755.
- [4] Zhang Y, Wen C Y, Soh Y C. Robust adaptive control of nonlinear discrete-time systems by backstepping without overparameterization[J]. Automatica, 2001, 37(4): 551-558.
- [5] Ge S S, Li G Y, Lee T H. Adaptive NN control for a class of strict-feedback discrete-time nonlinear systems [J]. Automatica, 2003, 39(5): 807-819.
- [6] Ge S S, Li G Y, Lee T H. Correction to "adaptive NN control for a class of strict-feedback discrete-time nonlinear systems"[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1930-1931.
- [7] Ge S S, Zhang J, Lee T H. Adaptive neural networks control for a class of MIMO nonlinear systems with disturbances in discrete-time [J]. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics, 2004, 34(4): 1630-1645.
- [8] Zhang J, Ge S S, Lee T H. Output feedback control of a class of discrete MIMO nonlinear systems with triangular form inputs [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2005, 16(6): 1491-1503.
- [9] He P, Jagannathan S. Discrete-time neural network output feedback control of nonlinear systems in non-strict feedback form [C]. Proc of the 2004 American Control Conf. Boston, 2004: 2439-2444.
- [10] Lin Z, Saberi A. Robust semi-global stabilization of minimum-phase input-output linearizable systems via partial state and output feedback [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(6): 1029-1041.
- [11] Ge S S, Zhang J, Lee T H. Adaptive MNN control for a class of non-affine NARMAX systems with disturbance [J]. Systems and Control Letters, 2004, 53(1): 1-12.