第 24 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2009 年 5 月
Vol. 24 No. 5 Control and Decision May 2009

文章编号: 1001-0920(2009)05-0641-07

一类不确定系统鲁棒容错 D-稳定性分析

陈 明, 童朝南
(北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083)

摘 要: 研究不确定系统 D-稳定鲁棒容错 H_∞控制问题. 基于连续型执行器故障模式,利用线性矩阵不等式(LMI)给出了系统 D-稳定的鲁棒容错输出反馈控制器存在的充分条件,并将动态输出反馈控制器设计方法归结为求解一族线性矩阵不等式组. 仿真示例表明,无论执行器是否发生故障,所得到的动态输出反馈控制器不仅保证闭环系统是 D-稳定的,而且满足给定的 H_∞干扰指标,从而验证了所提出的控制器设计方法的有效性.

关键词: D-稳定性; 线性矩阵不等式; 容错控制; 输出反馈; 鲁棒性
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Robust fault-tolerant D-stability analysis for a class of uncertain systems

CHEN Ming, TONG Chao-nan
(School of Information and Engineering, Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083, China. Correspondent: CHEN Ming, E-mail: cm8061@sina.com)

Abstract: The problem of robust fault-tolerant H_∞ control with D-stability for systems with parameter uncertainty is considered. A sufficient condition for the existence of robust fault-tolerant H_∞ output feedback controller with D-stability is derived by means of linear matrix inequality approach. The dynamic output feedback controller is designed by solving a set of linear matrix inequalities. A numerical example is given to show that the obtained controller not only guarantees the closed-loop system to be D-stable but also achieves the given H_∞ disturbance index regardless of the actuator faults or not, which illustrates the effectiveness of the proposed method.

Key words: D-stability; Linear matrix inequality; Fault-tolerant control; Output feedback; Robustness

1 引 言

随着人们对系统可靠性和安全性的要求不断提高,鲁棒容错控制已经成为容错控制理论中的研究热点之一. 迄今为止,关于该问题的研究已经取得了一定的研究成果[1-3],但其中大部分研究都是针对故障前后系统的完整性问题. 然而,在实际工程中常常要考虑系统的稳定性和收敛的快速性等性能指标. 文献[4]提出了多指标约束条件下容错控制系统的设计概念,其主要思路是在容错控制的研究中,使容错控制系统能够同时满足多个指标约束.

近年来,许多学者一直对系统 D-稳定性进行研究[5]. 这种 D 区域涵盖圆域和左半平面等常见区域,具有广泛性. 文献[6]研究了一类可用线性矩阵不等式刻画的区域——LMI 区域 D-稳定问题,得到了系统 D-稳定的用 LMI 表达的充要条件. 文献[7]研究了具有方差和极点约束的不确定系统 D-稳定性鲁棒控制问题,利用 LMI 给出了具有状态方差和 D 区域极点配置的鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器的设计方法.

本文基于文献[7]的思想,研究线性不确定系统 D-稳定的鲁棒容错 H_∞ 控制问题. 采用连续型执行器故障模式,利用 LMI 给出系统 D-稳定的鲁棒容错控制器存在的充分条件和设计方法. 仿真结果表明,无论执行器是否发生故障,所得到的控制器均能保证闭环系统是 D-稳定的,并满足预先给定的 H_∞干扰衰减指标.

2 问题描述

考虑如下形式的线性不确定系统 Σ:

收稿日期: 2008-05-24; **修回日期**: 2008-07-31.
基金项目: 北京市教委重点学科共建项目(XK100080537).
作者简介: 陈明(1977—),女,辽宁辽阳人,讲师,博士,从事控制系统鲁棒容错控制等研究; 童朝南(1955—),男,安徽无为人,教授,博士生导师,从事智能控制、鲁棒控制及轧钢自动化等研究.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t)+B_1w(t)+\\&\quad(B_2+\Delta B_2)u^F(t),\\z(t)&=C_1x(t)+D_{12}u^F(t),\\y(t)&=C_2x(t)+D_{21}w(t).\end{aligned}\tag{1}$$

其中:$x(t)\in R^n$,$u^F(t)\in R^m$,$z(t)\in R^p$ 和 $y(t)\in R^q$ 分别为系统的状态向量,考虑执行器故障的控制输入向量,控制输出向量和量测输出向量;$w(t)\in R^r$ 为能量有限的外部干扰输入向量;A,B_1,B_2,C_1,C_2,D_{12} 和 D_{21} 为适当维数的常值矩阵;ΔA 和 ΔB_2 分别表示参数的不确定性,且满足以下条件:

$$[\Delta A\quad \Delta B_2]=F\Theta(t)[E_1\quad E_2].\tag{2}$$

式中:F,E_1 和 E_2 为已知矩阵;$\Theta(t)$ 为具有适当维数的未知函数矩阵,其元素是 Lebesgue 可观测的,且满足 $\Theta^{\mathrm T}(t)\Theta(t)\leq I$.

考虑执行器故障的控制输入向量 $u^F(t)=Mu(t)$. 采用连续型执行器故障模式,定义故障阵 $M=\mathrm{diag}(m_1,m_2,\cdots,m_m)$,$0\leq m_{li}\leq m_i\leq m_{ui}$,$i=1,2,\cdots,m$. $m_i=0$ 表示系统执行器完全失效;$m_i=1$,表示执行器正常;$0\leq m_{li}<m_i<m_{ui}$,$m_{ui}\geq 1$,表示执行器部分失效. 引入如下矩阵:

$$M_0=\mathrm{diag}(m_{01},m_{02},\cdots,m_{0m}),$$
$$J_1=\mathrm{diag}(j_1,j_2,\cdots,j_m),$$
$$L_1=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_m).$$

式中

$$m_{0i}=\frac{m_{ui}+m_{li}}{2},\ j_i=\frac{m_{ui}-m_{li}}{m_{ui}+m_{li}},$$
$$l_i=\frac{m_i-m_{0i}}{m_{oi}},\ i=1,2,\cdots,m.$$

由此得 $M=M_0(I+L_1)$,$|L_1|\leq J_1\leq I$.

对于系统 Σ,设其动态输出反馈控制器为

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_cy(t),\\u(t)=C_cx_c,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $x_c(t)$ 为控制器状态. 由式(1) 和(3) 构成的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_{cl}(t)=A_{cl}\bar{x}_{cl}(t)+B_{cl}w(t),\\z(t)=C_{cl}\bar{x}_{cl}.\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$\bar{x}_{cl}(t)=[x^{\mathrm T}(t)\quad x_c^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T},$$
$$\begin{bmatrix}A_{cl}&B_{cl}\\C_{cl}&0\end{bmatrix}=$$
$$\left[\begin{array}{c:c}\begin{bmatrix}A+\Delta A&(B_2+\Delta B_2)MC_c\\B_cC_2&A_c\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}B_1\\B_cD_{21}\end{bmatrix}\\\hdashline[C_1\quad D_{12}MC_c]&0\end{array}\right].$$

本文考虑复平面中的一类特殊区域 ——LMI 区域,其定义如下:

定义 1[6] 对于复平面上的某一区域 D,若存在对称矩阵 $R_D=\begin{bmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{12}^{\mathrm T}&R_{22}\end{bmatrix}$,满足

$$D=\{z\in C:f_D(z)=R_{11}+R_{12}z+R_{12}^{\mathrm T}\bar{z}+R_{22}z\bar{z}<0\}.\tag{5}$$

其中:R_{11} 和 R_{22} 为对称矩阵,$R_{22}=LL^{\mathrm T}$ 为半正定矩阵,$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数. 则当 $L=0$ 时,区域 D 称为一个 LMI 区域.

注 1 D 区域是关于实轴对称的区域,$f_D(z)=R_{11}+R_{12}z+R_{12}^{\mathrm T}\bar{z}+R_{22}z\bar{z}$ 称为区域 D 的特征函数,$f_D(z)<0$ 表示矩阵 $f_D(z)$ 是负定的.

注 2 许多常见的区域,例如圆盘、半平面、椭圆形、扇形和抛物形等区域均是 LMI 区域.

定义 2 矩阵 A 称为 D- 稳定的,当且仅当 A 的特征值位于复平面上的区域 D 中,并称系统 $\dot{x}=Ax$ 也是 D- 稳定的.

引理 1[8] 设 $E,F,\Delta(t)$ 为具有适当维数的矩阵,且满足 $\Delta^{\mathrm T}(t)\Delta(t)\leq I$,那么对于任意实数 $\alpha>0$,有 $E\Delta(t)F+(E\Delta(t)F)^{\mathrm T}\leq\alpha EE^{\mathrm T}+\alpha^{-1}F^{\mathrm T}F$.

引理 2[9] 设 R_1 和 R_2 为具有适当维数的矩阵,U 为正定对角矩阵,$\Sigma(t)$ 为时变适维对角矩阵,且满足 $|\Sigma(t)|\leq U$,则

$$R_1\Sigma(t)R_2+R_2^{\mathrm T}\Sigma(t)^{\mathrm T}R_1^{\mathrm T}<\beta R_1UR_1^{\mathrm T}+\beta^{-1}R_2^{\mathrm T}UR_2.$$

其中:$\beta>0$,$\Sigma=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q\}$.

引理 3[5] 矩阵 A 是 D- 稳定的,当且仅当存在对称矩阵 P,使得

$$R_{11}\otimes P+R_{12}\otimes(PA)+R_{12}^{\mathrm T}\otimes(A^{\mathrm T}P)+R_{22}\otimes(A^{\mathrm T}PA)<0,$$

其中 $\otimes$ 表示两个矩阵的 Kronecker 乘积,即若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}\in R^{m\times n}$,$B\in R^{p\times q}$,则 $A\otimes B=[a_{ij}B]_{mp\times nq}$.

引理 4[10] 对于任意适当维数的实矩阵 A,B,C,D,矩阵 Kronecker 乘积具有以下性质:

1) $A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$;

2) $(A\otimes B)^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}\otimes B^{\mathrm T}$;

3) $(AC)\otimes(BD)=(A\otimes B)(C\otimes D)$.

本文的目的是为故障系统 Σ 设计严格真的动态输出反馈控制器,使闭环系统满足如下约束条件:

1) 对于容许的执行器故障,闭环系统的所有极点均位于指定的 LMI 区域 D 中;

2) 从扰动输入 $w(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的传递函数满足 $\|G_{zw}(s)\|<\gamma$.

3 主要结果

定理 1 设 D 是左开平面中由式(5) 描述的 LMI 区域,则闭环系统(4) 是 D 稳定的一个充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X,使得

$$\begin{bmatrix} R_{11}\otimes X + R_{12}\otimes(X_d A_d) + R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes(A_d^{\mathrm{T}}X) & 0 \\ 0 & -I\otimes X \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

证明略.

定理 2　对于故障系统(4),给定区域 D,若使得具有未知变量 $(X,Y,\overline{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的如下线性矩阵不等式是可行的,则系统(4) 是动态输出反馈 D- 稳定的容错控制系统.

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \tag{7}$$

$$\Psi(X,Y,\overline{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\varepsilon_1,\varepsilon_2) =$$

$$\begin{bmatrix} R_{11}\otimes\Pi_1 + R_{12}\otimes\Pi_2 + R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes\Pi_2^{\mathrm{T}} & * & * & * & * & * \\ 0 & -I\otimes\Pi_1 & * & * & * & * \\ I\otimes\Pi_3 + \varepsilon_2 R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes\Pi_6^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon_1 I + (\varepsilon_2 I)\otimes(E_2 M_0 J_1 M_0 E_2^{\mathrm{T}}) & * & * & * \\ I\otimes\widetilde{C} & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * & * \\ R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes\Pi_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I & * \\ R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes\Pi_5^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

其中: * 代表由矩阵的对称性得到的矩阵子块,而

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} AX + B_2 M_0 \widetilde{C} & A \\ \overline{A} & YA + \widetilde{B} C_2 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_3 = [(E_1 X + E_2 M_0 \widetilde{C}) \quad E_1],\ \Pi_4 = \begin{bmatrix} F \\ YF \end{bmatrix},$$

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix} B_2 M_0 J_1^{1/2} \\ YB_2 M_0 J_1^{1/2} \end{bmatrix},\ \Pi_6 = \begin{bmatrix} B_2 M_0 J_1 M_0 E_2^{\mathrm{T}} \\ YB_2 M_0 J_1 M_0 E_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

若上述矩阵不等式组的可行解为 $X^*, Y^*, \overline{A}^*, \widetilde{B}^*, \widetilde{C}^*$,则动态输出反馈控制器各参数如下:

$$A_c = V^{-1}(\overline{A}^* - Y^* A X^* - \widetilde{B}^* C_2 X^* - Y^* B_2 M_0 \widetilde{C}^*) U^{-\mathrm{T}},$$

$$B_c = V^{-1}\widetilde{B}^*,\ C_c = \widetilde{C}^* U^{-\mathrm{T}}. \tag{9}$$

证明　根据定理 1,故障系统(4) 为 D- 稳定的充分必要条件是存在一正定对称矩阵 $X_d > 0$,满足

$$\begin{bmatrix} R_{11}\otimes X_d + R_{12}\otimes(X_d A_d) + R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes(A_d^{\mathrm{T}} X_d) & 0 \\ 0 & -I\otimes X_d \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

设 X_d 具有如下形式:

$$X_d = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix},\ X_d^{-1} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^{\mathrm{T}} & ** \end{bmatrix}.$$

令变换矩阵

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ U^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},\ \Xi_2 = X_d \Xi_1 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

将式(10) 两边分别左乘 $\mathrm{diag}(I\otimes\Xi_1^{\mathrm{T}}, I\otimes\Xi_1^{\mathrm{T}})$ 和右乘 $\mathrm{diag}(I\otimes\Xi_1, I\otimes\Xi_1)$,整理得

$$\Psi = \begin{bmatrix} R_{11}\otimes\Pi_1 + R_{12}\otimes\bar{\Upsilon} + R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes\bar{\Upsilon}^{\mathrm{T}} & * \\ 0 & -I\otimes\Pi_1 \end{bmatrix} < 0.$$

其中

$$\bar{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} + \Delta_{11} & A + \Delta A \\ \Phi_{21} + \Delta_{21} & \Phi_{22} + \Delta_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{11} = AX + B_2 M C_c U^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi_{21} = YAX + VB_c C_2 X + YB_2 M C_c U^{\mathrm{T}} + VA_c U^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi_{22} = YA + VB_c C_2,\ \Delta_{11} = \Delta AX + \Delta B_2 M C_c U^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta_{21} = Y\Delta AX + Y\Delta B_2 M C_c U^{\mathrm{T}},\ \Delta_{22} = Y\Delta A.$$

定义一组新的矩阵变量

$$A = YAX + VB_c C_2 X + VA_c U^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{B} = VB_c,\ \widetilde{C} = C_c U^{\mathrm{T}}.$$

根据矩阵 Kronecker 乘积性质,得

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \left(R_{12}\otimes\begin{bmatrix} F \\ YF \end{bmatrix}\right) \\ 0 \end{bmatrix} (I\otimes\Theta(t))[I\otimes[(E_1X + E_2M\widetilde{C}) \quad E_1] \quad 0] + \left(\begin{bmatrix} \left(R_{12}\otimes\begin{bmatrix} F \\ YF \end{bmatrix}\right) \\ 0 \end{bmatrix} (I\otimes\Theta(t))[I\otimes[(E_1X + E_2M\widetilde{C}) \quad E_1] \quad 0]\right)^{\mathrm{T}} < 0.$$

其中

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} R_{11}\otimes\Pi_1 + R_{12}\otimes\begin{bmatrix} \Phi_{11} & A \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} + R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes\begin{bmatrix} \Phi_{11}^{\mathrm{T}} & \Phi_{21}^{\mathrm{T}} \\ A^{\mathrm{T}} & \Phi_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} & * \\ 0 & -I\otimes\Pi_1 \end{bmatrix}.$$

根据引理 1, $\exists\varepsilon_1 > 0$, 满足

$$
\begin{aligned}
\Psi \le\ & \Psi_1 + \varepsilon_1\begin{bmatrix} (R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes\Pi_4\Pi_4^{\mathrm T} & * \\ 0 & 0\end{bmatrix} + \\
& \varepsilon_1^{-1}\begin{bmatrix} I\otimes[(E_1X + E_2M\widetilde{C})\quad E_1]^{\mathrm T} \\ 0\end{bmatrix}[I\otimes \\
& [(E_1X + E_2M\widetilde{C})\quad E_1]\quad 0] = \\
& \begin{bmatrix}
R_{11}\otimes\Pi_1 + R_{12}\otimes\begin{bmatrix}\Phi_{11} & A\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix} + & \\
R_{12}^{\mathrm T}\otimes\begin{bmatrix}\Phi_{11}^{\mathrm T} & \Phi_{21}^{\mathrm T}\\ A^{\mathrm T} & \Phi_{22}^{\mathrm T}\end{bmatrix} + & * \\
(\varepsilon_1R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes(\Pi_4\Pi_4^{\mathrm T}) & \\
0 & -I\otimes\Pi_1
\end{bmatrix} + \\
& \varepsilon_1^{-1}\begin{bmatrix} I\otimes\Pi_3^{\mathrm T} \\ 0\end{bmatrix}[I\otimes\Pi_3\quad 0].
\end{aligned}
$$

所以, 根据矩阵 Schur 补性质, 上式可以等价写成

$$
\Psi_2 = \begin{bmatrix}
R_{11}\otimes\Pi_1 + & & \\
R_{12}\otimes\begin{bmatrix}\Phi_{11} & A\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix} + & & \\
R_{12}^{\mathrm T}\otimes\begin{bmatrix}\Phi_{11}^{\mathrm T} & \Phi_{21}^{\mathrm T}\\ A^{\mathrm T} & \Phi_{22}^{\mathrm T}\end{bmatrix} + & * & * \\
(\varepsilon_1R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes(\Pi_4\Pi_4^{\mathrm T}) & & \\
0 & -I\otimes\Pi_1 & * \\
I\otimes\Pi_3 & 0 & -\varepsilon_1 I
\end{bmatrix} < 0.
$$

定义如下矩阵:

$$
\Psi_3 = \begin{bmatrix}
R_{11}\otimes\Pi_1 + R_{12}\otimes & & \\
\Pi_2 + R_{12}^{\mathrm T}\otimes\Pi_2^{\mathrm T} + & * & * \\
(\varepsilon_1R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes(\Pi_4\Pi_4^{\mathrm T}) & & \\
0 & -I\otimes\Pi_1 & * \\
I\otimes\Pi_3 & 0 & -\varepsilon_1 I
\end{bmatrix}.
$$

设 $\overline{A} = A + YB_2M_0\widetilde{C}$. 考虑执行器故障阵, 根据引理 2, 有

$$
\begin{aligned}
\Psi_2 =\ & \Psi_3 + \begin{bmatrix}\left(R_{12}\otimes\begin{bmatrix}B_2M_0\\ YB_2M_0\end{bmatrix}\right)\\ 0 \\ I\otimes[E_2M_0]\end{bmatrix}(I\otimes \\
& L_1)[[I\otimes\widetilde{C}\quad 0]\quad 0\quad 0] + \\
& \left[\begin{bmatrix}\left(R_{12}\otimes\begin{bmatrix}B_2M_0\\ YB_2M_0\end{bmatrix}\right)\\ 0 \\ I\otimes[E_2M_0\quad 0]\end{bmatrix}(I\otimes L_1)[I\otimes\widetilde{C}\quad 0\quad 0]\right]^{\mathrm T} \le \\
& \Psi_3 + \varepsilon_2\begin{bmatrix}
(R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes(\Pi_5\Pi_5^{\mathrm T}) & * & * \\
0 & 0 & * \\
R_{12}^{\mathrm T}\otimes\Pi_6^{\mathrm T} & 0 & I\otimes(E_2M_0J_1M_0E_2^{\mathrm T})
\end{bmatrix} + \\
& \varepsilon_2^{-1}\begin{bmatrix} I\otimes\widetilde{C}^{\mathrm T}\\ 0 \\ 0\end{bmatrix}[I\otimes\widetilde{C}\quad 0\quad 0] < 0.
\end{aligned}
$$

上式可以写成

$$
\begin{bmatrix}
\Phi_{11} & * & * & * \\
0 & \Phi_{22} & * & * \\
I\otimes\Pi_3 + \varepsilon_2R_{12}^{\mathrm T}\otimes\Pi_6^{\mathrm T} & 0 & \Phi_{33} & * \\
I\otimes\widetilde{C} & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I
\end{bmatrix} < 0. \tag{12}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11} =\ & R_{11}\otimes\Pi_1 + R_{12}\otimes\Pi_2 + R_{12}^{\mathrm T}\otimes \\
& \Pi_2^{\mathrm T} + (\varepsilon_1R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes(\Pi_4\Pi_4^{\mathrm T}) + \\
& (\varepsilon_2R_{12}R_{12}^{\mathrm T})\otimes(\Pi_5\Pi_5^{\mathrm T}), \\
\Phi_{22} =\ & -I\otimes\Pi_1, \\
\Phi_{33} =\ & -\varepsilon_1 I + (\varepsilon_2 I)\otimes(E_2M_0J_1M_0E_2^{\mathrm T}).
\end{aligned}
$$

利用 Schur 补性质, 引入变量代换, 便可将式 (12) 等价地表示成式 (8). □

注 3 式 (7) 和 (8) 关于变量 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 不是线性关系, 所以在设计控制器时, 可以预先给定 ε_1 和 ε_2 的值, 使式 (7) 和 (8) 成为标准的 LMI. 这样便可以利用 LMI 工具箱中的 feasp 进行求解, 从而达到判别系统是否是 D 稳定的目的. 若不等式 (7) 和 (8) 可解, 则可从任意一个可行解出发, 通过 SVD 技术对矩阵 $UV^{\mathrm T} = I - XY$ 进行奇异值分解, 确定两个满秩矩阵 U 和 V; 然后利用式 (9) 求得动态输出反馈控制器各参数.

定理 3 对于系统 (4), 存在一个动态输出反馈控制器, 使得系统在容许的执行器故障为 H_∞ 指标约束鲁棒容错镇定的充分必要条件是: 对于给定的任意常数 $\gamma > 0$, 若存在正常数 $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ 以及对称正定矩阵 X, Y 和矩阵 $\overline{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$, 使得矩阵不等式 (7) 和如下矩阵不等式存在可行解:

$$
\begin{bmatrix}
\pi_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\
A^{\mathrm{T}} + \widetilde{A} + \varepsilon_4 YB_2M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & \pi_{22} & * & * & * & * & * & * \\
0 & F^{\mathrm{T}}Y & -\frac{1}{2}\varepsilon_3^{-1}I & * & * & * & * & * \\
0 & J_1^{1/2}M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}Y & 0 & -\varepsilon_4^{-1}I & * & * & * & * \\
B_1^{\mathrm{T}} & (YB_1 + \widetilde{B}D_{21})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & * & * & * & * \\
C_1X + D_{12}M_0\widetilde{C} + \varepsilon_4 D_{12}M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & C_1 + \varepsilon_4 D_{12}M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}Y & 0 & 0 & -\gamma I + \varepsilon_4 D_{12}M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} & * & * & * \\
\pi_{71} & \varepsilon_4 E_2M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}Y & 0 & 0 & \varepsilon_4 E_2M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} & \pi_{77} & * & * \\
0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I & * \\
J_1^{1/2}\widetilde{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I
\end{bmatrix} < 0, \tag{13}
$$

则故障系统(4) 为输出反馈 H_∞ 鲁棒容错控制系统.

其中

$$\pi_{11} = AX + XA^{\mathrm{T}} + B_2M_0\widetilde{C} + (B_2M_0\widetilde{C})^{\mathrm{T}} + 2\varepsilon_3FF^{\mathrm{T}} + \varepsilon_4B_2M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}},$$

$$\pi_{22} = YA + A^{\mathrm{T}}Y + \widetilde{B}C_2 + (\widetilde{B}C_2)^{\mathrm{T}},$$

$$\pi_{71} = (E_1 + E_2M_0\widetilde{C}) + \varepsilon_4E_2M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}},$$

$$\pi_{77} = -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I + \varepsilon_4E_2M_0J_1M_0^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}.$$

证明　根据有界实引理, 系统渐近稳定且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件是存在一个正定对称矩阵 $X_d > 0$, 满足如下不等式:

$$
\begin{bmatrix}
A_d^{\mathrm{T}}X_d + X_dA_d & X_dB_d & C_d^{\mathrm{T}} \\
B_d^{\mathrm{T}}X_d & -\gamma I & 0 \\
C_d & 0 & -\gamma I
\end{bmatrix} < 0. \tag{14}
$$

将式(14) 两边分别左乘 $\mathrm{diag}(\Xi_1^{\mathrm{T}}, 0, 0)$ 和右乘 $\mathrm{diag}(\Xi_1, 0, 0)$. 经推导可得到

$$
\Psi_0 = \left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{bmatrix} \Phi_{11} + \Delta_{11} & * \\ \Phi_{21} + \Delta_{21} & \Phi_{22} + \Delta_{22} \end{bmatrix} & * & * \\
\hline
[B_1^{\mathrm{T}} \quad (YB_1 + VB_cD_{21})^{\mathrm{T}}] & -\gamma I & * \\
\hline
[C_1X + D_{12}MC_cU^{\mathrm{T}} \quad C_1] & 0 & -\gamma I
\end{array}\right]. \tag{15}
$$

其中

$$\Phi_{11} = AX + XA^{\mathrm{T}} + B_2MC_cU^{\mathrm{T}} + (B_2MC_cU^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi_{21} = A^{\mathrm{T}} + YAX + VB_cC_2X + YB_2MC_cU^{\mathrm{T}} + VA_cU^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi_{22} = YA + A^{\mathrm{T}}Y + VB_cC_2 + (VB_cC_2)^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta_{11} = \Delta AX + X\Delta A^{\mathrm{T}} + \Delta B_2MC_cU^{\mathrm{T}} + (\Delta B_2MC_cU^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta_{21} = \Delta A^{\mathrm{T}} + Y\Delta AX + Y\Delta B_2MC_cU^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta_{22} = Y\Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}}Y.$$

定义

$$
\Psi_1 = \left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{bmatrix} \widetilde{\Phi}_{11} & * \\ \widetilde{\Phi}_{21} & \widetilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} & * & * \\
\hline
[B_1^{\mathrm{T}} \quad (YB_1 + VB_cD_{21})^{\mathrm{T}}] & -\gamma I & * \\
\hline
[C_1X + D_{12}M\widetilde{C} \quad C_1] & 0 & -\gamma I
\end{array}\right].
$$

其中

$$\widetilde{\Phi}_{11} = AX + XA^{\mathrm{T}} + B_2M\widetilde{C} + (B_2M\widetilde{C})^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\Phi}_{21} = A^{\mathrm{T}} + \overline{A} + YB_2M\widetilde{C},$$

$$\widetilde{\Phi}_{22} = YA + A^{\mathrm{T}}Y + \widetilde{B}C_2 + (\widetilde{B}C_2)^{\mathrm{T}}.$$

根据式(2), Ψ_0 可以改写成

$$\Psi_0 = \Psi_1 + T_1\Theta(t)T_2^{\mathrm{T}} + T_2\Theta^{\mathrm{T}}(t)T_1^{\mathrm{T}} + T_1\Theta(t)T_2^{\mathrm{T}} + T_3\Theta^{\mathrm{T}}(t)T_1^{\mathrm{T}} + T_4\Theta(t)T_2^{\mathrm{T}} + T_2\Theta^{\mathrm{T}}(t)T_4^{\mathrm{T}} + T_4\Theta(t)T_3^{\mathrm{T}} + T_3\Theta^{\mathrm{T}}(t)T_4^{\mathrm{T}} < 0.$$

其中

$$T_1 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad T_2 = \begin{bmatrix} (E_1 + E_2M\widetilde{C})^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad T_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ YF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由引理 1 得

$$
\Psi_0 \le \begin{bmatrix}
\widetilde{\Phi}_{11} + 2\varepsilon_3FF^{\mathrm{T}} & * \\
\widetilde{\Phi}_{21} & \widetilde{\Phi}_{22} + 2\varepsilon_3YFF^{\mathrm{T}}Y \\
B_1^{\mathrm{T}} & (YB_1 + \widetilde{B}D_{21})^{\mathrm{T}} \\
C_1X + D_{12}M\widetilde{C} & C_1 \\
(E_1 + E_2M\widetilde{C}) & 0 \\
0 & E_1
\end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix}
\cdots & * & * & * & * \\
\cdots & * & * & * & * \\
\cdots & -\gamma I & * & * & * \\
\leftarrow & 0 & -\gamma I & * & * \\
& 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I & * \\
& 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I
\end{bmatrix} = \Psi_2 .
$$

设

$$
\Psi_3 = \begin{bmatrix}
AX + XA^{\mathrm T} + B_2M_0\tilde C + (B_2M_0\tilde C)^{\mathrm T} + 2\varepsilon_3 FF^{\mathrm T} & \rightarrow \\
A^{\mathrm T} + \overline{A} \\
B_1^{\mathrm T} \\
C_1X + D_{12}M_0\tilde C \\
(E_1 + E_2M_0\tilde C) \\
0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\leftarrow & * & * & * & * & * \\
& \tilde\Phi_{22} + 2\varepsilon_3 YFF^{\mathrm T}Y & * & * & * & * \\
& (YB_1 + \tilde BD_{21})^{\mathrm T} & -\gamma I & * & * & * \\
& C_1 & 0 & -\gamma I & * & * \\
& 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I & * \\
& E_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I
\end{bmatrix}.
$$

进一步考虑执行器故障 $M = M_0(I + L_1)$,有

$$
\Psi_2 = \Psi_3 + \overline{T_1}L_1\overline{T_2^{\mathrm T}} + \overline{T_2}L_1^{\mathrm T}\overline{T_1^{\mathrm T}} .
$$

其中

$$
\overline{T_1} = \begin{bmatrix} B_2M_0 \\ YB_2M_0 \\ 0 \\ D_{12}M_0 \\ E_2M_9 \\ 0 \end{bmatrix},\quad
\overline{T_2} = \begin{bmatrix} \tilde C^{\mathrm T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

根据引理 2,有

$$
\Psi_2 = \begin{bmatrix}
AX + XA^{\mathrm T} + B_2M_0\tilde C + (B_2M_0\tilde C)^{\mathrm T} + 2\varepsilon_3 FF^{\mathrm T} + \varepsilon_4 B_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} & \rightarrow \\
A^{\mathrm T} + \overline{A} + YB_2M_0\tilde C + \varepsilon_4 YB_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} \\
B_1^{\mathrm T} \\
C_1X + D_{12}M_0\tilde C + \varepsilon_4 D_{12}M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} \\
(E_1 + E_2M_0\tilde C) + \varepsilon_4 E_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} \\
0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\leftarrow & * & * & \rightarrow \\
& \tilde\Phi_{22} + 2\varepsilon_3 YLL^{\mathrm T}Y + \varepsilon_4 YB_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}Y & * \\
& (YB_1 + \tilde BD_{21})^{\mathrm T} & -\gamma I \\
& C_1 + \varepsilon_4 D_{12}M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}Y & 0 \\
& \varepsilon_4 E_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}Y & 0 \\
& E_1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\leftarrow & * & * & * \\
& * & * & * \\
& * & * & * \\
& -\gamma I + \varepsilon_4 D_{12}M_0J_1M_0^{\mathrm T}D_{12}^{\mathrm T} & * & * \\
& \varepsilon_4 E_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}D_{12}^{\mathrm T} & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I + \varepsilon_4 E_2M_0J_1M_0^{\mathrm T}E_2^{\mathrm T} & * \\
& 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 I
\end{bmatrix} +
$$

$$
\varepsilon_4^{1}\begin{bmatrix} \tilde C^{\mathrm T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J_1[\tilde C \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \tag{16}
$$

利用矩阵 Schur 补性质,可推出式(13). □

综合定理 2 和定理 3,可得到故障系统基于 D-稳定性的 H_∞ 指标约束的鲁棒容错控制. 只要相应的矩阵不等式组有交集,则所得到的控制器就会有满意的动态和稳态性能指标. 因此有如下定理:

定理 4 由定理 2 和定理 3 可知,故障系统(4)满足上述约束条件 1) 和约束条件 2),当且仅当对于给定的任意常数 $\gamma > 0$,若存在正常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 以及对称正定矩阵 X,Y 和矩阵 $\overline{A}$,$\tilde B$,$\tilde C$,使得矩阵不等式(7),(8) 和(13) 存在可行解.

下面根据定理 4,给出系统 D-稳定的鲁棒容错控制器设计步骤:

Step1:给定 H_∞ 干扰指标 $\gamma > 0$,选取适当正常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$,利用 LMI 工具箱中的 feasp 求解矩阵不等式组(7),(8) 和(13);

Step2:若上述不等式组有解,则从任意一个可行解出发,通过 SVD 技术,对矩阵 $UV^{\mathrm T} = I - XY$ 进行奇异值分解,确定 2 个满秩矩阵 U 和 V;

Step3:利用式(9),求得动态输出反馈控制器各参数.

4 仿真示例

考虑如下线性不确定系统:

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.45 \end{bmatrix},
$$

$$
C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix},
$$

$$
E_1 = [1 \quad 0.1],\ C_2 = [1 \quad 1],\ D_{21} = 1,
$$

$$
E_2 = 0.1,\ F = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \Theta = \sin t.
$$

首先给定 D 区域极点指标 $D(-2,1.5)$,即圆心在 $-2+0i$,半径为 $r=1.5$ 的圆域. 考虑执行器故障矩阵,取 $M_U=1.25$, $M_L=0.6$,则直接计算可得 $M_0=0.925$, $J_1=0.351$. 同时考虑系统正常($m_1=1$)及执行器故障($m_1=0.6$)时的闭环系统极点分布,这里取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1$ 和 $\gamma=2$. 根据定理 4 求解不等式组的解,得到控制器各参数如下:

$$A_c=\begin{bmatrix}-1.7299 & -3.8196\\ -0.0726 & -2.2742\end{bmatrix},$$

$$B_c=\begin{bmatrix}-0.4942\\ -0.0312\end{bmatrix},$$

$$C_c=[-0.7289\quad -1.5360].$$

采用如上控制器,求得 H_∞ 干扰衰减指标 γ 的变化范围为 $0.1458\le\gamma\le0.1477$,即 H_∞ 干扰衰减指标小于给定值. 系统正常及执行器故障模式下闭环系统极点的分布情况如图 1 和图 2 所示. 由图可以看出,系统无论发生故障与否,其闭环极点都位于指定圆域内,从而说明本文设计的控制器可以保证系统 D- 稳定.

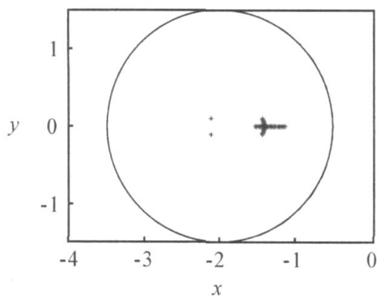

图 1　闭环系统正常情况的闭环极点分布

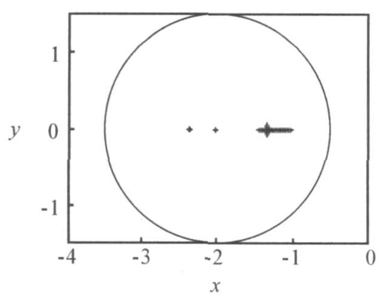

图 2　执行器故障($m_1=0.6$)时闭环极点分布

5　结　论

本文主要研究线性不确定系统 D- 稳定的鲁棒容错控制问题. 利用 LMI 给出了系统 D- 稳定的鲁棒容错输出反馈控制器存在的充分条件和设计方法. 本文所考虑的区域 D 涵盖了圆域和左半平面等常见区域,所以本文的研究成果更具有广泛意义. 仿真结果表明,无论执行器是否发生故障,所得到的动态输出反馈控制器不仅保证闭环系统 D-稳定,而且满足 H_∞ 指标约束,从而验证了本文方法的可行性和有效性.

参考文献(References)

[1] Afef Fekih, Fahmida, Chowdhury N. A robust fault tolerant control strategy for a class of nonlinear uncertain systems [C]. Proc of the 2006 American Control Conf. Minneapolis, 2006: 5474-5480.

[2] Jin X, Yang G. Robust fault-tolerant control via linear fractional transformations[C]. 16th IEEE Int Conf on Control Applications: Part of IEEE Multi-conference on Systems and Control. Singapore, 2007: 640-645.

[3] Lin C M, Chen C H. Robust fault-tolerant control for a biped robot using a recurrent cerebella model articulation controller [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2007, 37(1): 110-123.

[4] Zhang G, Wang Z, Han X, et al. Research on satisfactory control theory and its application in fault-tolerant technology [C]. 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, 2004: 1521-1524.

[5] Peaucelle D, Arzelier D, Bachelier O, et al. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty[J]. Systems and Control Letters, 2003, 40(1): 21-30.

[6] Valter J, Leite S, Pedro L, et al. An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic system[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(3): 500-504.

[7] 周武能, 苏宏业, 褚健. 具有方差和极点约束下的不确定系统鲁棒输出反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 103-108.
(Zhou W N, Su H Y, Chu J. Robust H-infinity output feedback control with variance and pole constraints for time-varying uncertain systems[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(1): 103-108.)

[8] Li Xi, Carlos E De Souza. Delay-dependent stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequalities approach [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1144-1148.

[9] Yao B, Wang F Z, Zhang Q L. LMI-based design of reliable tracking controller[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(6): 863-870.

[10] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
(Huang L. Linear algebra in system and control theory [M]. Beijing: Scientific Publishing House, 1984.)