

文章编号: 1001-0920(2009)05-0785-04

一种新的量化反馈控制系统稳定性分析方法

冯宜伟, 郭 戈

(大连海事大学 信息科学技术学院, 辽宁 大连 116026)

摘 要: 针对一类量化反馈控制系统, 在考虑量化范围和量化误差的情况下, 建立该系统的动态数学模型. 利用 Lyapunov 稳定性理论, 结合线性矩阵不等式 (LMI), 给出了基于 LMI 和时变 Lyapunov 函数的渐近稳定性判据. 假设量化器参数满足一定条件, 则通过该判据能分析和判定量化反馈控制系统的渐近稳定性, 并进一步设计相应的量化反馈控制律. 与已有的方法相比, 该方法更加有效且求解方便. 数值仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 量化反馈控制; 线性矩阵不等式; 量化器; 稳定性分析

中图分类号: TP13

文献标识码: A

A new stability analysis approach for quantized feedback control system

FENG Yi-wei, GUO Ge

(School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China. Correspondent: GUO Ge, E-mail: geguo@yeah.net)

Abstract: For a class of quantized feedback control systems (QFCSs) with quantization ranges and quantization errors, a dynamic discrete time model of the QFCSs is proposed. Based on the Lyapunov stability theory combined with linear matrix inequality (LMI) technique, some stability criteria are derived in term of LMI. With the criteria, the asymptotically stability for the QFCSs is analyzed. Furthermore, the design for the corresponding quantized feedback control law is presented. Compared with other methods, the proposed method is more effective and computationally convenient. Numerical example and simulation show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Quantized feedback control; LMI; Quantizer; Stability analysis

1 引 言

近年来, 动态反馈控制系统逐渐由传统的模拟控制方式趋向于数字控制方式, 其主要原因在于低成本数字计算机的涌现, 以及数字信号具有连续信号所无法比拟的优点. 但是, 由于数字计算机本身存在如字长有限等精度问题, 随着其应用领域的日益广泛, 信号量化对动态反馈控制系统的影响已受到许多学者的关注, 尤其是基于网络的动态反馈控制系统 (也称网络控制系统). 一般情况下, 量化级数与传递在通信网络中的信息流和传输该信号所占用的网络资源紧密相关^[1-4]. 而传统控制理论中, 通常假设控制信号的传递是无误差、无时延的, 而且不考虑信道容量. 因此, 对于存在信号量化或容量受限的动态反馈控制系统, 传统的设计和分析方法很难适用,

尤其对于网络控制系统, 必须根据其特点给出控制设计和系统分析的新思想、新方法, 研究开发适合于量化反馈控制系统的先进控制策略.

针对量化反馈控制系统的研究主要有 2 类方法: 1) 考虑静态均匀量化器, 假定信号在 k 时刻的量化值只与 k 时刻的数据有关, 在此规定下设计的编码和解码方案结构较为简单, 但控制效果不理想; 2) 将量化反馈控制器与系统综合考虑, 此时量化器采用时变且动态可调的对数量化器, 该方法能够根据网络环境和控制信号的变化实时调整量化级数, 使得系统的极限环减小, 稳定性增强. 正如文献 [5-10] 所提到的, 现有的大部分有关动态控制系统的研究基本上都是围绕系统的稳定性展开的, 针对量化反馈控制性能的研究还比较少见, 对于较为复

收稿日期: 2008-04-07; 修回日期: 2008-06-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60504017); 霍英东教育基金项目 (111066); 国家新世纪优秀人才支持计划项目 (NCET-04-0982).

作者简介: 冯宜伟 (1973—), 男, 甘肃景泰人, 讲师, 博士生, 从事网络控制、鲁棒控制的研究; 郭戈 (1972—), 男, 甘肃庄浪人, 教授, 博士生导师, 从事网络控制、复杂系统控制理论等研究.

杂的系统尚缺乏统一的研究方法。

本文在文献[7-9]的基础上,分析了量化反馈系统二次稳定性能,指出利用传统的Lyapunov函数(即 $V(x) = x^T Px$,其中 $P > 0$ 为定常阵)虽然可以方便地分析和综合量化反馈控制系统,但由于选取Lyapunov函数时 P 矩阵的选择没有充分考虑量化器的量化范围和量化误差,所得到的结果相对比较保守.本文在Lyapunov函数中考虑了量化范围和量化误差,试图建立一种新的稳定性分析方法,从而对于量化反馈控制系统获得较小的保守性.

2 稳定性分析

考虑被控对象是线性离散时不变连续系统,可描述为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k). \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 和 $u \in R$ 分别为状态矢量和控制输入矢量, G 和 H 为常数矩阵.假设 G 不稳定,而 (G, H) 可控.系统的量化状态反馈描述如下:

$$u(k) = f(v(k)), v(k) = Kx(k). \quad (2)$$

其中: K 为状态反馈增益; $f(\cdot)$ 为量化器,满足 $f(-v) = -f(v)$.本文所讨论的是对数无记忆时不变型量化器,相应的量化级集合为

$$U = \{ \pm u_i : u_i = i u(0), i = \pm 1, \pm 2, \dots \} \cup \{ \pm u_0 \} \cup \{ 0 \}.$$

映射关系 $f(\cdot)$ 满足

$$f_i(x) = \begin{cases} u_i, & \frac{1}{1+\mu_i} \mu_i < x \leq \frac{1}{1-\mu_i} \mu_i, x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -q_i(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mu_i = (1 - \mu_i) / (1 + \mu_i)$, $0 < \mu_i < 1$.

U 将空间 R 分成一系列片段,量化器函数 $f(\cdot)$ 将每个片段映射成集合 U 的一个元素.在进一步分析之前,先引入下面的定义:

定义1^[7,8] 对数无记忆时不变型量化器 $f(\cdot)$ 的密度定义为

$$f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \frac{\#g(\delta)}{-\ln \delta}, \quad (4)$$

其中 $\#g(\delta)$ 表示量化器 $f(\cdot)$ 在区间 $[\delta, 1/\delta]$ 中量化级的数量.

由定义1可知,当 $[\delta, 1/\delta]$ 上升时,一个非零且有限量化密度的量化器 $f(\cdot)$,其量化级数将按对数方式增长.显然, f 越小,量化级数越小,对应的量化器越粗糙;反之,则量化器越精细.如果量化器的量化级数为有限数,则 $f = 0$,而对于一个线性量化器,其密度为 $f = 1$.容易验证,对于一个对数量化器,其密度 $f = 2/\ln(1/\mu)$,即 μ 取得越小,对应的

量化密度 f 越小.因此,为便于量化器的计算,本文将 f 称为量化器的量化密度.

对量化器的有关参数作如下合理的假设:

假设1 量化范围为 $f(\cdot) \in [M_1, M_2]$;

假设2 量化误差范围为 $e(k) \in [e_1, e_2]$;

假设3 $e_1/M_1 = e_2/M_2 = T > 0$,其中 T 为常数.

量化误差定义为

$$\begin{aligned} e(k) &= u(k) - v(k) = \\ &= f(Kx(k)) - Kx(k) = \\ &= e(k) - Kx(k). \end{aligned} \quad (5)$$

系统(1)可重新建模为

$$x(k+1) = (G + (1 - T)HK)x(k). \quad (6)$$

本文的主要任务是解决量化反馈控制系统(6)的渐近稳定性及其反馈控制器设计问题.文献[8]采用二次型Lyapunov函数 $V(x) = x^T Px$ 来分析量化反馈控制系统,其中 P 为对称正定的矩阵.需要注意的是,由于文献[8]得到的稳定性条件是以一个固定的Lyapunov函数为前提,即对整个量化范围 $f(\cdot) \in [M_1, M_2]$ 和量化误差 $e(k) \in [e_1, e_2]$ 仅选定了—个固定的常数矩阵 P ,显然这样的设计所得到的结果相对比较保守.

本文考虑如下一个时变的Lyapunov函数:

$$V(x(k)) = x^T(k) Q(k) x(k). \quad (7)$$

其中 $Q(k)$ 为时变的,且依赖于量化范围 $f(\cdot) \in [M_1, M_2]$ 和量化误差 $e(k) \in [e_1, e_2]$,表示如下:

$$Q(k) = \frac{1 + \mu(k)}{M_1 + M_2} Q_1 + \frac{2 - \mu(k)}{M_1 + M_2} Q_2, \quad (8)$$

其中 Q_1 和 Q_2 为正定对称矩阵.显然,如果令 $Q_1 = Q_2 = P/T$,则式(7)和(8)所定义的Lyapunov函数与文献[8]所定义的Lyapunov函数相同.

定义2 当对数无记忆时不变型量化器的量化范围和量化误差分别取 $f(\cdot) \in [M_1, M_2]$ 和 $e(k) \in [e_1, e_2]$ 时,闭环量化反馈系统(6)是渐近稳定的,如果式(7)和(8)所定义的Lyapunov函数对于任意的 $x(k)$ 满足:

- 1) $V(x(k)) > 0$;
- 2) $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$;
- 3) 当 $x(k) \rightarrow 0$ 时有 $V(x(k)) \rightarrow 0$.

当量化器的参数配置满足假设1~假设3时,量化反馈系统渐近稳定的充分性条件为:

定理1 对于线性离散系统(1),相应地取状态反馈控制律(2)和对数量化器(3),则闭环系统(6)是渐近稳定的,如果存在矩阵 $V_1 > 0, V_2 > 0$,满足

$$\begin{bmatrix} -V_i & V_i(G + (1 + i)HK) \\ * & -V_i \end{bmatrix} < 0, \quad i \in [1, 2]; \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -V_1 & V_2(G + (1 + 1)HK) \\ * & -V_1 \end{bmatrix} < 0; \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -V_2 & V_1(G + (1 + 2)HK) \\ * & -V_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

其中 * 表示矩阵对称部分。

证明 考虑式(7)所定义的 Lyapunov 函数,由定义 2 可知闭环系统(6)是渐近稳定的,如果

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0. \quad (12)$$

其中量化器的量化范围和量化误差分别为

$$f(\cdot) \in [M_1, M_2], \quad \Delta \in [1, 2].$$

结合式(6) ~ (8)及(12),得

$$x^T(k)[(G + (1 + i(k))HK)^T Q((K + 1)(G + (1 + i(k))HK) - Q((K)))]x(k) < 0. \quad (13)$$

上式也可等价地写为

$$(G + (1 + i(k))HK)^T Q((K + 1)(G + (1 + i(k))HK) - Q((K))) < 0. \quad (14)$$

利用 Schur 补,式(14)又可转换为线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ * & 22 \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

其中

$$11 = -\left(\frac{1 + i(k)}{M_1 + M_2} Q_1 + \frac{2 - i(k)}{M_1 + M_2} Q_2\right),$$

$$12 =$$

$$-\left(\frac{1 + i(k+1)}{M_1 + M_2} Q_1 + \frac{2 - i(k+1)}{M_1 + M_2} Q_2\right)(G + (1 + i(k+1))HK),$$

$$22 =$$

$$-\left(\frac{1 + i(k+1)}{M_1 + M_2} Q_1 + \frac{2 - i(k+1)}{M_1 + M_2} Q_2\right).$$

根据量化误差的取值范围,考虑以下 4 种情况:

- 1) $i(k) = 1, i(k+1) = 1;$
- 2) $i(k) = 1, i(k+1) = 2;$
- 3) $i(k) = 2, i(k+1) = 1;$
- 4) $i(k) = 2, i(k+1) = 2.$

对于情况 1) 和 4) 两种情况,根据式(15)有

$$\begin{bmatrix} -V_i & V_i(G + (1 + i)HK) \\ * & -V_i \end{bmatrix} < 0, \quad i \in [1, 2].$$

其中

$$V_1 = \frac{2 - 1}{M_1 + M_2} Q_1 + \frac{2 - 1}{M_1 + M_2} Q_2, \quad V_2 = TQ_1. \quad (16)$$

对于情况 2) 和 3) 两种情况,可将式(15)分别表述

为

$$\begin{bmatrix} -V_1 & V_2(G + (1 + 2)HK) \\ * & -V_2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -V_2 & V_1(G + (1 + 1)HK) \\ * & -V_1 \end{bmatrix} < 0.$$

显然存在矩阵 $V_1 > 0, V_2 > 0$,满足式(9) ~ (11),继而可判定如果式(12)成立,则根据定义 2 可知闭环系统(6)渐近稳定。

注 1 从定理 1 的证明过程可以发现,如果选择 $Q_1 = Q_2 = P/T$,即 $V_1 = V_2 = P$,则条件(9) ~ (11)就是文献[9]所提出的二次稳定性结果.这也证明了定理 1 具有更小的保守性。

3 控制器设计

在定理 1 的证明过程中不难发现,针对量化状态反馈控制系统的稳定性分析,总是假设状态反馈控制器 $v(k) = Kx(k)$ 是存在的.但在许多实际工程应用中,常常需要设计这样一个控制器使得闭环系统是渐近稳定的.因而,基于定理 1,进一步给出状态反馈控制器的设计方法。

定理 2 考虑线性离散系统(1),相应地取对数量化器(3),如果存在矩阵 $\bar{K} > 0, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ 满足

$$\begin{bmatrix} -\tilde{V}_i & \tilde{V}_i(G + (1 + i)H\bar{K}) \\ * & -\tilde{V}_i \end{bmatrix} < 0, \quad i \in [1, 2]; \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{V}_1 & \tilde{V}_2(G + (1 + 2)H\bar{K}) \\ * & -\tilde{V}_2 \end{bmatrix} < 0; \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{V}_2 & \tilde{V}_1(G + (1 + 1)H\bar{K}) \\ * & -\tilde{V}_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

则相应地使系统渐近稳定的控制律为

$$\bar{K} = K^{-1}. \quad (20)$$

证明 根据定理 1 的结论,存在矩阵 $\tilde{V}_1 > 0, \tilde{V}_2 > 0$,使得式(9) ~ (11)成立,则相应的系统(1)是渐近稳定的.分别对式(9) ~ (11)进行合同变换,两边乘以 $\text{diag}\{I, (V_1 V_2)^{-1}\}$,得

$$\begin{bmatrix} -V_i & V_i(G + (1 + i)HK)(V_1 V_2)^{-1} \\ * & -(V_1 V_2)^{-1} V_i (V_1 V_2)^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i \in [1, 2];$$

$$\begin{bmatrix} -V_1 & V_2(G + (1 + 2)HK)(V_1 V_2)^{-1} \\ * & -(V_1 V_2)^{-1} V_2 (V_1 V_2)^{-1} \end{bmatrix} < 0;$$

$$\begin{bmatrix} -V_2 & V_1(G + (1 + 1)HK)(V_1 V_2)^{-1} \\ * & -(V_1 V_2)^{-1} V_1 (V_1 V_2)^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

结合式(15),不妨取 $\tilde{V}_1 = V_1, \tilde{V}_2 = V_2$,并定义 $\bar{K} = K^{-1}$,显然存在矩阵 $\bar{K} > 0, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ 满足式(17) ~ (19).因而给定的控制律(20)能够使系统(1)渐近稳定。

4 仿真算例

考虑如下系统:

$$X(k+1) = GX(k) + Hu(k),$$

$$y(k) = CX(k) + Du(k),$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.008 & -0.0025 & 0 & 0.01 \\ 0.01 & 1 & 0.0101 & 0.01 \\ -0.008 & 0.005 & 1.002 & -0.0103 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.9999 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.0001 \\ 0.011 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 1 \ 0], D = [0].$$

其中: G 的特征值分别为 $1.0023 + 0.0084i, 1.0023 - 0.0084i, 0.9991, 1.0063$. 显然, 这是一个不稳定系统, 但可以检验 (G, H) 是可控的. 假设系统占用 3 bit 的传输信道, 取

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

状态反馈信号(2)采用式(3)所定义的对数量化器 $f(\cdot)$, 利用定理 2 可求得系统的反馈增益为

$$K = [-1.1898 \ 1.0909 \ 0.5949 \ -1.0413].$$

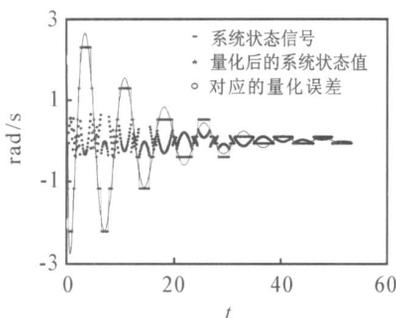


图1 采用常规 Lyapunov 函数系统状态、量化值及其量化误差

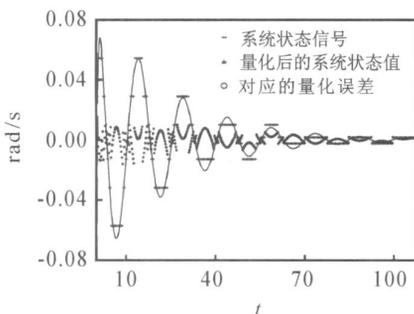


图2 采用时变 Lyapunov 函数系统状态、量化值及其量化误差

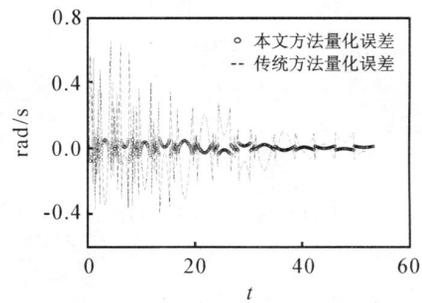


图3 选择不同 Lyapunov 函数的量化误差比较

比较图 1 和图 2 可以发现, 相同条件下系统采用时变的 Lyapunov 函数较固定的 Lyapunov 函数, 运动状况不仅平稳, 而且量化误差明显减少. 图 3 给出了两种情况下, 处于同一坐标下的量化误差. 仿真结果表明, 本文所设计的量化反馈控制充分考虑了量化范围和量化误差的作用, 因而所得到的系统稳定性分析方法是正确而有效的, 而且保守性较小.

5 结论

本文基于线性时不变不稳定的被控对象, 讨论了一种新的量化状态反馈方法, 利用量化范围和量化误差建立了时变的 Lyapunov 函数, 推证了系统的稳定性条件, 并给出了量化反馈控制器的设计方法. 在不考虑噪声因素的情况下, 所设计的量化反馈控制律能使不稳定的系统渐近稳定. 当量化器的有关参数不满足假设条件时, 系统的稳定性以及相应的量化反馈控制律设计尚有待进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Kalman R E. Nonlinear aspect of sampled-data control system[C]. Proc of the Symposium on Nonlinear Circuit Theory. Brooklyn, 1956, 7: 273-313.
- [2] Delchamps D. The stabilization of linear systems with quantized feedback [C]. IEEE Conf Decision and Control. Austin, 1988: 405-410.
- [3] Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(7): 1279-1289.
- [4] Liberzon D, Morse A S, Sontag D. Output-input stability and minimum-phase nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(3): 422-435.
- [5] Liberzon D. On stabilization of linear systems with limited information [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(2): 304-307.
- [6] Liberzon D. Quantization, time delay and nonlinear stabilization [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(7): 1190-1195.
- [7] Elia N, Mitter K. Stability of linear systems with limited information [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(9): 1384-1400.

(下转第 793 页)

动时的闭环系统状态响应曲线和控制输入曲线, 图 3 为名义系统的闭环系统状态响应曲线. 经比较图 1 和图 3 可以看出, 本文方法在同时存在参数摄动和外干扰的情况下, 系统仍能保持较好的性能, 从而表明该控制器具有很强的鲁棒性, 且无抖振.

6 结 论

本文提出了一种针对不确定切换系统的离散滑模控制方法. 新趋近律可在给定切换律作用下, 使系统状态轨迹快速到达准滑动模式区, 并渐近趋近于原点, 有效消除抖振, 回归式切换面可以减小稳态偏差. 针对系统的不确定部分设计的扰动估计器对常值变化或变化律较慢的扰动具有很高的估计精度, 克服了以往控制方法需已知扰动上界的限制. 仿真实例表明, 所提出的方法对于变化率较慢的外界干扰以及参数摄动具有很好的鲁棒性, 而且可以有效消除系统的抖振现象.

参考文献(References)

- [1] Hespanha J P, Morse A S. Switching between stabilizing controllers[J]. Automatica, 2002, 38(11): 1905-1917.
- [2] Hetel L, Daafouz J, Jung C. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time-varying delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(10): 1668-1674.
- [3] Du D S, Jiang B, Shi P, et al. H_∞ filtering of discrete-time switched systems with state delays via switched Lyapunov function approach [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(8): 1520-1525.
- [4] Gao H J, Lam J, Wang C H. Model simplification for switched hybrid systems [J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(12): 1015-1021.
- [5] 吴立刚, 王常虹, 高会军. 不确定线性 2-D 离散系统的鲁棒滑模控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 148-154.
(Wu L G, Wang C H, Gao H J. Robust sliding mode control for a class of uncertain linear 2-D discrete-time systems[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 148-154.)
- [6] Choi H H. Variable structure control of dynamical systems with mismatched norm-bounded uncertainties: An LMI approach[J]. Int J of Control, 2001, 74(13): 1324-1334.
- [7] Wang W, Wu G, Yang D. Variable structure control design for uncertain discrete-time systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(1): 99-102.
- [8] Hui S, Zak S H. On discrete-time variable structure sliding mode control[J]. Systems and Control Letters, 1999, 38(4/5): 283-288.
- [9] Wu L G, Wang C H, Zeng Q S. Observer-based sliding mode control of a class of uncertain nonlinear neutral delay systems [J]. J of Franklin Institute, 2008, 345(3): 233-253.
- [10] Wu L G, Lam J. Sliding mode control of switched hybrid systems with time-varying delay [J]. Int J Adapt Control Signal Process, 2008, 22(10): 909-931.
- [11] Richard P Y, Cormerais H, Buisson J. A generic design methodology for sliding mode control of switched systems [J]. Nonlinear Analysis, 2006, 65(9): 1751-1772.
- [12] Kwan C. Further results on variable output feedback controllers[J]. Trans on Automatic Control, 2001, 46(9): 1505-1508.
- [13] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control system [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [14] Kim J, Cho D. Discrete-time variable structure control using recursive switching function[C]. Proc American Control Conference. Chicago, 2000: 1113-1117.
- [15] Eun Y, Kim J, Kim K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism [J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1999, 7(4): 414-423.

(上接第 788 页)

- [8] Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 46(11): 1698-1711.
- [9] Gao H J, Chen T, Lam J. A new delay system to network-based control [J]. Automation, 2007, 4(20): 1-13.
- [10] Mukaidani H. An LMI approach to decentralized guaranteed cost control for a class of uncertain nonlinear large-scale delay systems [J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 300(1): 17-29.