第 24 卷 第 6 期 控 制 与 决 策 2009 年 6 月
Vol. 24 No. 6 Control and Decision Jun. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)06-0945-04

一类不确定时滞系统的非线性 H∞控制

王天成, 刘小梅, 高 荣
(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘 要: 利用 Lyapunov 稳定性定理和线性矩阵不等式工具,讨论了一类不确定时滞系统的非线性 H_∞控制问题. 设计的非线性 H_∞控制器可由线性矩阵不等式的解给出. 进一步,建立一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,得到了不确定时滞系统的最优状态反馈 H_∞控制律. 仿真示例表明了该方法的可行性.

关键词: Lyapunov 泛函; 线性矩阵不等式; 非线性 H_∞控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Nonlinear H∞ control for a class of uncertain systems with time-delay

WANG Tian-cheng, LIU Xiao-mei, GAO Rong
(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China. Correspondent: WANG Tian-cheng, E-mail: cumt_wtc@163.com)

Abstract: By means of Lyapunov function and linear matrix inequalities (LMIs), the problem of nonlinear H_∞ control for a class of uncertain systems with time-delay is considered. The nonlinear H_∞ control law of systems is presented in terms of the solutions of LMIs. Furthermore, a convex optimization problem with LMIs constraints is formulated, such that the optimal state feedback H_∞ control for uncertain systems with time-delay can be determined. An illustrative example demonstrates the effectiveness of proposed method.

Key words: Lyapunov functional; LMIs; Nonlinear H_∞ control

1 引 言

自 20 世纪 80 年代 Zames[1] 提出著名的 H_∞ 控制问题以来,该问题以其良好的实际背景而引起国内外控制界的广泛关注[2,3]. H_∞ 控制理论已逐渐形成解决鲁棒控制问题比较完善的理论体系,是近年来的一个重要研究方向. 不确定和时滞对于一个实际控制系统是普遍存在的,并且它们往往是导致系统不稳定和性能下降的主要原因,因而许多学者更注重讨论时滞不确定控制系统的 H_∞ 控制问题,并取得了很多重要的研究成果[4-6]. 构造适当的 Lyapunov 泛函, 利用线性矩阵不等式方法和 Lyapunov 定理,得到线性状态反馈 H_∞ 控制律是近年来的主要研究方法[7-9].

目前设计的控制器大都是线性控制器,由于实际控制系统的复杂性,研究不确定时滞系统的非线性控制器具有非常重要的实际意义[10]. 对于不确定时滞系统的非线性 H_∞ 控制问题的研究,目前尚未见到相关报道.

本文利用 Lyapunov 稳定性定理和线性矩阵不等式方法,讨论一类不确定时滞系统的非线性 H_∞ 控制器的设计问题. 得到的非线性状态反馈 H_∞ 控制器既可保持系统的局部渐近稳定性,又可使系统满足一定的 H_∞ 性能界的要求. 最后通过仿真示例说明本文方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下时滞不确定非线性控制系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + \\ &\quad [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t-d) + \\ &\quad b\phi(u) + D\omega(t), \\ z(t) &= Cx(t), \\ x(t) &= \varphi(t),\ t \in [-d, 0]. \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$, $u \in R$, $z(t) \in R^n$ 分别是系统的状态向量、控制输入和系统输出; $A, A_1, C \in R^{n\times n}$; $b \in R^n$; $\phi: R \to R$ 为足够光滑函数且满足[11]: $\phi(0) = 0$,

收稿日期: 2008-06-16; 修回日期: 2008-09-19.
基金项目: 国家自然科学基金项目(10771122, 60774016).
作者简介: 王天成(1967—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士, 从事鲁棒控制理论与应用的研究; 刘小梅(1985—), 女, 山东潍坊人, 硕士生, 从事时滞控制系统的研究.

$\phi'(0)=0,\cdots,\phi^{(m-1)}(0)=0$,而$\phi^{(m)}(0)\neq 0$($m$为正奇数);$\omega(t)$为外界扰动且$\omega(t)\in L_2[0,+\infty)$;$\Delta A(t)$和$\Delta A_1(t)$为具有时变特征的不确定参数矩阵,假设它们范数有界且满足

$$[\Delta A(t)\quad \Delta A_1(t)]=NF(t)[M\quad M_1].$$

这里:$F(t)\in R^{n\times n}$是一个具有Lebesgue可测元的未知函数矩阵且满足$F^{\mathrm T}(t)F(t)\leqslant I$;$N,M,M_1$为适当维数的已知常数矩阵. d为正常数时滞. 为方便,记$\overline{A}=A+\Delta A(t)$,$\overline{A_1}=A_1+\Delta A_1(t)$.

本文研究的系统(1)的非线性H_∞控制问题可描述为:设计一个非线性状态反馈控制律$u=\alpha(x)$,使得:

1) 当外界扰动$\omega(t)=0$时,闭环系统

$$\dot x(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]x(t-d)+b\phi(\alpha(x))$$

的平衡点是局部渐近稳定的;

2) 对于给定的正常数γ,在零初始条件下,当$\omega(t)\in L_2[0,+\infty)$且$\omega(t)\neq 0$时,有$\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega\|_2$,此时称系统(1)具有$H_\infty$性能$\gamma$.

引理1[12] 给定适当维数的实矩阵Σ,H,L,其中Σ为对称矩阵,则对于任意$F^{\mathrm T}(t)F(t)\leqslant I$,不等式$\Sigma+HF^{\mathrm T}(t)L+L^{\mathrm T}F(t)H^{\mathrm T}<0$都成立的充分必要条件为:存在正数$\varepsilon$,使得$\Sigma+\varepsilon L^{\mathrm T}L+\varepsilon^{-1}HH^{\mathrm T}<0$成立.

3 主要结果

定理1 对于不确定非线性时滞系统(1)和给定的正常数γ,如果存在对称正定矩阵P,Q和行向量K,使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} P(\overline{A}+bK)+(\overline{A}+bK)^{\mathrm T}P+Q+Pbb^{\mathrm T}P+s^2K^{\mathrm T}K+C^{\mathrm T}C & P\overline{A_1} & PD\\ * & -Q & 0\\ * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}<0, \tag{2}$$

$$K^{\mathrm T}K\leqslant I, \tag{3}$$

则在非线性状态反馈控制

$$u=\alpha(x)=\Big(\frac{m!Kx}{\phi^{(m)}(0)}\Big)^{\frac{1}{m}} \tag{4}$$

下,系统(1)具有H_∞性能γ. 其中s满足

$$\left|\frac{\phi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\Big(\frac{m!}{\phi^{(m)}(0)}\Big)^{\frac{m+1}{m}}\right|\leqslant s, \tag{5}$$

式中ξ在0与u之间.

证明 考虑$x=0$的邻域$G=\{x:\|x\|\leqslant 1\}$,由式(3)和(4)可知u在G上有界,从而$\phi^{(m+1)}(u)$在G上也有界.

由Taylor展开公式有

$$\phi(u)=\frac{\phi^{(m)}(0)}{m!}u^m+\frac{\phi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}u^{m+1},$$

其中ξ在0与u之间.

构造如下Lyapunov泛函:

$$V(x(t))=x^{\mathrm T}(t)Px(t)+\int_{t-d}^{t}x^{\mathrm T}(s)Qx(s)\mathrm ds,$$

求Lyapunov泛函$V(x(t))$沿系统(1)的解轨线的时间导数. 由式(4)有

$$\begin{aligned}&\dot V(x(t))=\\&x^{\mathrm T}(t)[(\overline{A}+bK)^{\mathrm T}P+P(\overline{A}+bK)+Q]x(t)+\\&2x^{\mathrm T}(t)P\overline{A_1}x(t-d)+2x^{\mathrm T}(t)PD\omega(t)-\\&x^{\mathrm T}(t-d)Qx(t-d)+\\&2x^{\mathrm T}(t)Pb\frac{\phi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\Big(\frac{m!}{\phi^{(m)}(0)}\Big)^{\frac{m+1}{m}}(Kx)^{1+\frac1m}.\end{aligned}$$

考虑上式最后一项,由不等式(3)和(5),当$x\in G$时,可得

$$\begin{aligned}&2x^{\mathrm T}(t)Pb\frac{\phi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\Big(\frac{m!}{\phi^{(m)}(0)}\Big)^{\frac{m+1}{m}}(Kx)^{1+\frac1m}\leqslant\\&x^{\mathrm T}(t)Pbb^{\mathrm T}Px(t)+s^2x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}Kx(t).\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}&\dot V(x(t))\leqslant\\&x^{\mathrm T}(t)[(\overline{A}+bK)^{\mathrm T}P+P(\overline{A}+bK)+Q+\\&Pbb^{\mathrm T}P+s^2K^{\mathrm T}K]x(t)+\\&2x^{\mathrm T}(t)P\overline{A_1}x(t-d)+2x^{\mathrm T}(t)PD\omega(t)-\\&x^{\mathrm T}(t-d)Qx(t-d).\end{aligned} \tag{6}$$

首先证明闭环系统的局部渐近稳定性. 当$x\in G$且$\omega(t)=0$时,由上式得

$$\begin{aligned}&\dot V(x(t))\leqslant\\&[x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-d)]\times\\&\begin{bmatrix}(\overline{A}+bK)^{\mathrm T}P+P(\overline{A}+bK)+Q+Pbb^{\mathrm T}P+s^2K^{\mathrm T}K & P\overline{A_1}\\ * & -Q\end{bmatrix}\times\\&\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由不等式(2),当$x\in G$时,$\dot V(x(t))<0$,由Lyapunov稳定性定理,系统(1)是局部渐近稳定的.

其次对于给定的正常数γ,定义如下泛函:

$$J=\int_0^{+\infty}[z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t)]\mathrm dt.$$

在零初始条件下,对任意非零$\omega(t)\in L_2[0,+\infty)$,当$x\in G$时,由式(6)有

$$\begin{aligned}J&\leqslant\int_0^{+\infty}[z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t)+\\&\quad\dot V(x(t))]\mathrm dt=\\&\quad\int_0^{+\infty}\xi^{\mathrm T}(t)\Omega\xi(t)\mathrm dt.\end{aligned}$$

其中

$$\xi^{\mathrm T}(t)=[x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-d)\quad \omega^{\mathrm T}(t)],$$

$$\Omega=\begin{bmatrix} P(\overline{A}+bK)+(\overline{A}+bK)^{\mathrm T}P+Q+Pbb^{\mathrm T}P+s^2K^{\mathrm T}K+C^{\mathrm T}C & P\overline{A_1} & PD\\ * & -Q & 0\\ * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}.$$

于是,由定理1条件,当$x\in G$时,$J\leqslant 0$,即

$$\int_0^{+\infty} z^{\mathrm{T}}(t)\,z(t)\,\mathrm{d}t \le \gamma^2 \int_0^{+\infty} \omega^{\mathrm{T}}(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

所以 $\|z(t)\| \le \gamma \|\omega(t)\|$. 因此系统(1) 具有 H_∞ 性能 γ. □

注 1　在定理 1 中考虑的 $x = 0$ 的邻域 $G = \{x: \|x\| \le 1\}$ 和 $K^{\mathrm{T}}K \le I$ 具有一般性;而对于 $x = 0$ 的邻域 $G' = \{x: \|x\| \le L\}$ (L 为正常数) 和 $K^{\mathrm{T}}K \le P_0$ (P_0 为已知对称正定矩阵),类似于定理 1 的证明方法,得到的矩阵不等式(2) 略有不同.

注 2　在控制系统(1) 中,若函数 $\phi(u) = u$,则由式(4) 有 $u = Kx$,即本文的结论包含线性 H_∞ 控制器.

由 Schur 补引理,$\Omega < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} P(\bar{A}+bK)+(\bar{A}+bK)^{\mathrm{T}}P+Q+Pbb^{\mathrm{T}}P & P\bar{A}_1 & sK^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} & PD \\ * & -Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

利用引理 1,整理并应用 Schur 补引理可知,不等式(7) 成立当且仅当存在正数 ε,使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} P(A+bK)+(A+bK)^{\mathrm{T}}P+Q+Pbb^{\mathrm{T}}P+\varepsilon PNN^{\mathrm{T}}P & PA_1 & sK^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} & PD & M^{\mathrm{T}} \\ * & -Q & 0 & 0 & 0 & M_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0.$$

对上式左边矩阵分别左乘和右乘对称正定矩阵 $\mathrm{diag}\{P^{-1}\ P^{-1}\ 1\ I\ I\ I\}$,可知上述不等式成立,等价于如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}A^{\mathrm{T}}+W^{\mathrm{T}}b^{\mathrm{T}}+A\bar{P}+bW+\bar{Q}+bb^{\mathrm{T}}+\varepsilon NN^{\mathrm{T}} & A_1\bar{P} & sW^{\mathrm{T}} & \bar{P}C^{\mathrm{T}} & D & \bar{P}M^{\mathrm{T}} \\ * & -\bar{Q} & 0 & 0 & 0 & \bar{P}M_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

其中:$\bar{P} = P^{-1}$,$\bar{Q} = P^{-1}QP^{-1}$,$W = KP^{-1}$. 由

$$\bar{P} \ge I,\ \begin{bmatrix} -I & W^{\mathrm{T}} \\ W & -1 \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

可知,矩阵不等式(3) 成立,即 $K^{\mathrm{T}}K \le I$.

综上,利用线性矩阵不等式,得到不确定时滞系统(1) 的非线性 H_∞ 控制如下:

定理 2　对于不确定时滞系统(1) 和给定正常数 γ,如果存在对称正定矩阵 $\bar{P}$,$\bar{Q}$ 以及行向量 W 和正常数 ε,使得线性矩阵不等式(8) 和(9) 成立,则

$$u = \alpha(x) = \left(\frac{m!W\bar{P}^{-1}x}{\phi^{(m)}(0)}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{10}$$

是不确定时滞系统(1) 的一个非线性 H_∞ 控制律.

进一步,通过求解如下优化问题:

$$\begin{aligned} &\min\ \gamma, \\ &\text{s.t. 式(8),(9) 成立,} \end{aligned} \tag{11}$$

可以求取使得闭环系统的扰动抑制度 γ 最小的最优状态反馈 H_∞ 控制律.

4　仿真示例

考虑时滞不确定非线性控制系统(1),其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -3 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0.2\cos t & 0 \\ 0.1\sin t & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0.3\cos t & 0.1\cos t \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\phi(u) = u^3.$$

取

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \sin t \end{bmatrix}.$$

显然 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I$,此时 $m = 3$,$s = 0$. 利用 Matlab 软件 LMI 工具箱求解优化问题(11),可得不确定时滞控制系统(1) 的非线性最优 H_∞ 控制器 $u = -(0.0444x_1 + 0.0181x_2)^{1/3}$,相应的干扰抑制度 γ 的最小值 $\gamma^* = 0.0457$.

5　结　论

本文给出了一类不确定时滞系统的非线性 H_∞

控制器的设计方法. 文中考虑的控制函数可以是足够光滑的奇函数,它包含了通常的线性函数. 另外,例如函数 $\phi(u) = u + u^2$ 也满足定理 1 的条件,仍可利用本文定理 2 的方法考虑 H_∞ 控制器设计. 因此对此类系统的控制问题研究具有很好的实际意义.

参考文献(References)

[1] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminars and approximation inverses[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1981, 26(1): 301-320.

[2] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307-1317.

[3] Apkarian P, Gahinet P. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controller[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(5): 853-864.

[4] Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay[J]. Automatica, 2004, 40(1): 65-72.

[5] Wu M, He Y, She J H. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.

[6] Jiang X F, Han Q L. On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2099-2106.

[7] Xu S Y, James L, Zou Y. New results on delay-dependent robust H_∞ control for systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2006, 42(2): 343-348.

[8] Chen B, Liu X P. Delay-dependent robust H_∞ control for T-S fuzzy systems with time delay[J]. IEEE Trans on fuzzy system, 2005, 13(4): 544-556.

[9] Xu S Y, James L. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 384-387.

[10] 梅生伟, 申铁龙, 刘志康. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
(Mei S W, Shen T L, Liu Z K. Modern robust control theory and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.)

[11] 哈里尔. 非线性系统[M]. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2005.
(Khalil H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.)

[12] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1999, 63(4): 741-750.

(上接第 944 页)

[6] Yang Guangyou. A modified particle swarm optimizer algorithm[C]. The 8th Int Conf on Electronic Measurement and Instruments. Xi'an, 2007, 2: 675-679.

[7] BajPai P, Singh. Fuzzy adaptive particle swarm optimization for bidding strategy in uniform price spot market[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2007, 22(4): 2152-2160.

[8] Saber A Y, Senjyu T, Yona A, et al. Unit commitment computation by fuzzy adaptive particle swarm optimization[J]. IET Generation Transmission and Distribution, 2007, 1(3): 456-465.

[9] Esmin A A A. Generating fuzzy rules from examples using the particle swarm optimization algorithm[C]. 7th Int Conf on Hybrid Intelligent Systems. Kaiserslautem, 2006: 340-343.

[10] Esmin A A A, Lambert-Torres A G. Fitting fuzzy membership functions using hybrid particle swarm optimization[C]. Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy System. Vancouver, 2006: 2112-2119.

[11] Sufang An, Kunqi Liu, Bo Liu. Improved weighted fuzzy reasoning algorithm based on particle swarm optimization[C]. Proc of 6th Int Conf on Machine Learning and Cybernetics. Hong Kong, 2007: 1304-1308.

[12] Shi Y, Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer[C]. Proc of IEEE Int Conf on Evolutionary Computation. Alaska, 1998: 69-73.

[13] Murata Hideki, Aiyoshi Eitaro. Bifurcation and convergence of particle swarm optimization dynamics embedded into upper and lower bound[J]. IEEE Trans on Electronics, Information and Systems, 2006, 126(7): 904-912.

[14] Jang J S R, Sun C T, Mizutani E. Neuro-fuzzy and soft computing[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[15] van den Bergh F, Engelbrecht A P. A new locally convergent particle swarm optimizer[C]. Proc of IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics. Yasmine Hammamet, 2002: 94-99.

[16] Trelea I C. The particle swarm optimization algorithm: Convergence analysis and parameter selection[J]. Information Processing Letters, 2003, 85(6): 317-325.