

文章编号: 1001-0920(2009)06-0837-06

# 具有数据包丢失的奇异网络控制系统指数稳定性

邱占芝<sup>1</sup>, 张庆灵<sup>2</sup>

(1. 大连交通大学 软件学院, 辽宁 大连 116028; 2. 东北大学 系统科学研究所, 沈阳 110004)

**摘要:** 考虑存在时延和数据包丢失的情况, 研究了奇异被控对象的网络控制系统建模与指数稳定性问题. 当时延不大于一个采样周期且数据包丢失率一定时, 将正则、无脉冲的奇异网络控制系统建模为数据包丢失率约束的异步动态切换系统, 给出了状态反馈和动态输出反馈的统一数学模型; 推导出数据包丢失率约束的系统指数稳定的充分条件, 给出了使系统指数稳定的最大允许数据包丢失率. 仿真结果表明了该方法的有效性和可行性.

**关键词:** 网络控制系统; 奇异系统; 指数稳定性; 正则无脉冲; 网络诱导时延; 最大允许数据包丢失率

中图分类号: TP13

文献标识码: A

## Exponential stability for singular networked control systems with packet dropout

QIU Zhan-zhi<sup>1</sup>, ZHANG Qing-ling<sup>2</sup>

(1. Software Technology Institute, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China; 2. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: QIU Zhan-zhi, E-mail: zhanzhiquok@163.com)

**Abstract:** Considering network-induced delay and data packet dropout, the problem of exponential stability and modeling of networked control systems (NCS) based on singular controlled plant is studied in this paper. For network-induced delay less than or equal to one sampling period and certain data packet dropout, singular NCS with a regular and impulse-free are modeled as an asynchronous dynamical-switched systems constrained by data packet dropout rate, and the uniform model for state feedback and dynamic output feedback NCS are established. The sufficient conditions of exponential stability for the NCS are derived, and the maximum allowable dropout rate for stability is presented. A numerical simulation result shows the effectiveness and feasibility of the presented analysis method.

**Key words:** Networked control systems; Singular systems; Exponential stability; Regular and impulse-free; Network-induced delay; Maximum allowable dropout rate

## 1 引言

网络控制系统 (NCS) 以其资源共享、低成本的构建与升级、方便灵活的维护与扩展、分布式控制与诊断、智能高效的控制性能等优势, 已在国家安全、经济建设和国民生活中发挥着不可替代的重要作用. NCS 概念的提出, 至今已经历了近 10 年的历程. 人们针对不同的网络诱导问题, 进行了大量的基础研究, 得到许多有价值的研究成果<sup>[1-5]</sup>, 初步建立了 NCS 的理论基础与控制方法, 极大地促进了控制科学的发展和进步. 然而, 这些成果的研究对象几乎都是针对线性/非线性正常系统. 在科学技术的不断发展和应用中, 有许多领域和行业的控制系统的被控对象呈现奇异系统模型<sup>[6]</sup>. 有关奇异被控对

象的 NCS 研究并不多见. 文献[7]研究了被控对象为奇异系统且具有分布时延、无数据包丢失的 NCS 的建模问题, 建立了传感器和控制器时钟驱动、执行器事件驱动的输出反馈 NCS 的数学模型. 文献[8]研究了奇异对象具有时延和控制约束、无数据包丢失的 NCS 的稳定性问题, 给出了系统稳定的条件.

本文将针对奇异被控对象, 同时考虑时延和数据包丢失因素, 研究奇异 NCS 的建模、指数稳定的条件以及确保系统指数稳定的最大数据包丢失率的关系, 并通过例子说明分析方法和研究成果的有效性和可行性.

## 2 奇异 NCS 描述

奇异 NCS 无论如何复杂, 总可以简化为图 1 所

收稿日期: 2008-05-29; 修回日期: 2008-08-20.

基金项目: 辽宁省自然科学基金项目(20072157); 辽宁省教育厅计划项目(20060107).

作者简介: 邱占芝(1960—), 女, 辽宁朝阳人, 教授, 博士, 从事网络控制系统、广义系统等研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事网络控制系统、广义系统等研究.

示的结构.

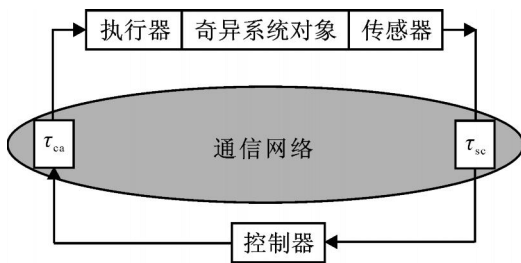


图1 奇异 NCS 结构

在图1所示的系统中,控制器通过网络与奇异被控对象的传感器和执行器交换信息.线性时不变奇异被控对象的状态空间描述形式为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  和  $y(t) \in R^l$  分别表示被控对象的状态、控制输入和输出;  $E, A \in R^{n \times n}$ ,  $E$  为奇异矩阵,一般地,  $\text{rank}(E) = q < n$ ;  $B \in R^{n \times m}$ ;  $\tau = \tau_{sc} + \tau_{ca}$ , 为整个闭环回路的网络诱导时延,时延可以是恒定、随机、有界,甚至具有马尔可夫链等特性,这取决于通信网络所采用的通信协议.网络传输数据的数据包丢失率可以是恒定或随机的.

奇异被控对象 NCS 与线性正常对象 NCS 的区别是:奇异 NCS 状态响应不仅包含正常系统所具有的指数解,而且包含正常系统所不具有的脉冲解、静态解和输入导数项,这将使系统出现正常系统所不具有的脉冲行为.脉冲不仅会降低系统性能使系统不稳定,而且具有很大的破坏性.

在被控对象为奇异系统的 NCS 中,除了奇异系统本身所具有的特性外,通信网络给系统带来的不确定性问题包括:网络诱导时延  $\tau_{sc}$  和  $\tau_{ca}$ ,数据包丢失,噪声扰动,异地节点的时钟同步困难、时变采样周期和信号跳变等.其中,影响整个 NCS 性能最主要的问题是网络诱导时延和数据包的丢失.时延会降低系统的性能,严重时甚至使系统失稳.数据包丢失在一定程度上将使时延增大,甚至使系统变成动态切换系统<sup>[9]</sup>.

为便于分析,首先给出如下合理化假定:

1) 被控对象正则,即满足  $\det(sE - A)$  不恒等于零.

2) 不考虑网络因素时,被控系统稳定且无脉冲,即满足下面条件之一:

$\deg \det(sE - A) = \text{rank}(E)$  ( $\deg \det(\cdot)$  表示行列式的次数,  $\text{rank}(\cdot)$  表示秩);

受限等价变换式中,  $N = 0$ ;

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E).$$

3) 传感器时钟驱动,以恒定周期  $T$  采样测量数据,并经网络发送给控制器;控制器接收到采样数据立即进行计算,并输出控制信号给执行器;执行器接收到控制信号,按零阶保持立即恢复成连续控制信号,驱动被控对象进行相应操作.

4) 将传感器的采样时间, A/D 转换和数据打包时间以及传感器到控制器的信息传输时延合并到一起考虑,记为  $\tau_{sc}$ ;将控制器计算时间、控制器到执行器的数据传输时延以及执行器的 D/A 转换时间合并到一起考虑,记为  $\tau_{ca}$ ,整个闭环回路的网络诱导时延不超过一个采样周期,即满足  $\tau = \tau_{sc} + \tau_{ca} < T$ .

5) 数据单包传输,无时序错乱,数据包丢失率  $r$  一定,将发送的数据出错、一个周期内没到达目的的数据包等视为数据包丢失.

### 3 奇异 NCS 建模分析

对于图1所示系统,考虑被控对象(1),由假设条件1)和2),对于正则、无脉冲的被控奇异系统,总存在非奇异矩阵  $P$  和  $Q$ ,使得

$$\begin{aligned} \overbrace{PEQ} &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overbrace{PAQ} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \\ \overbrace{PB} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \overbrace{CQ} = [C_1 \quad C_2], \end{aligned}$$

其中  $A_1 \in R^{r \times r}$ . 令

$$\overbrace{Q}^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in R^r, x_2 \in R^{n-r},$$

则奇异系统(1)可等价变换为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t - \tau), \\ 0 = \dot{x}_2(t) + B_2 u(t - \tau), \\ y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

根据假设3)和4),当时延不超过一个采样周期时,系统结构可等效变换为图2形式<sup>[10]</sup>,其中  $\tau_k$  为  $k$  周期整个闭环回路的网络诱导时延.

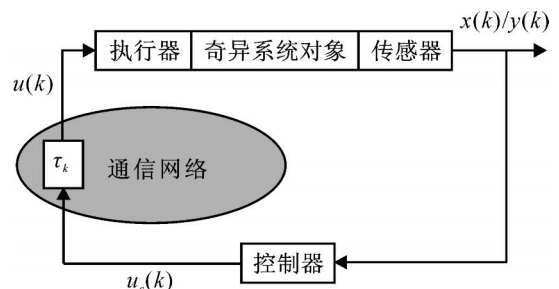


图2 NCS 等效结构

由于  $\tau_k \in [0, T]$ , 执行器经零阶保持后,控制输入  $u(t)$  在一个周期内分段连续,可以描述为

$$u(t) = \begin{cases} u(k-1), & t_k < t < t_k + \tau_k; \\ u(k), & t_k + \tau_k < t < t_k + T. \end{cases} \quad (3)$$

考虑控制输入(3),被控系统(2) 在一个周期内离散化为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A_{d1} x_1(k) + B_{10}(k) u(k) + B_{11}(k) u(k-1), \\ 0 = x_2(k) + B_2 u(k-1), \\ y(k) = C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k). \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$A_{d1} = e^{A_1 T}, B_{10}(k) = \int_0^{T-k} e^{A_1^t} B_1 dt, \\ B_{11}(k) = \int_{T-k}^T e^{A_1^t} B_1 dt.$$

根据假设 5),当数据成功传输到目的端,即无数据包丢失,此时可视为网络接通;当数据在一个周期内未到达目的端,即数据包发生丢失,此时可视为网络断开.当数据包丢失率  $r$  一定时,一个存在数据包丢失的网络可以视为按丢包率切换的开关.因此,存在数据包丢失的奇异 NCS 结构可用图 3 描述.

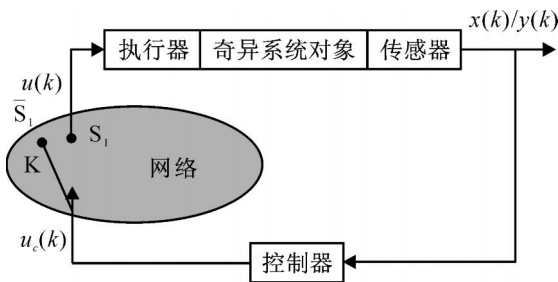


图 3 有数据包丢失的等效 NCS 结构

当网络无数据包丢失时,  $u(k) = u_c(k)$ ; 当网络有数据包丢失时,  $u(k)$  采用前一时刻的值, 即  $u(k) = u(k-1)$ .

如果系统为状态反馈,则控制器模型采用

$$u_c(k) = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}; \quad (5)$$

如果系统为输出反馈,则控制器模型采用

$$\begin{cases} x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c y(k), \\ u_c(k) = C_c x_c(k). \end{cases} \quad (6)$$

综合考虑状态反馈和动态输出反馈两种情况,当网络诱导时延  $k$   $T$ , 通信网络的数据包丢失率为  $r$  时, 状态反馈奇异 NCS 和动态输出反馈奇异 NCS 的统一闭环模型可表示为

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{Z}_i \tilde{x}(k), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

其中:若为状态反馈,则  $\tilde{x}(k) = \bar{x}(k)$ ,  $\tilde{Z}_i = \bar{Z}_i$ ;若为输出反馈,则  $\tilde{x}(k) = \hat{x}(k)$ ,  $\tilde{Z}_i = \mathcal{Z}_i$ .  $\bar{x}(k)$ ,  $\hat{x}(k)$ ,  $\bar{Z}_i$  和  $\mathcal{Z}_i$  分别为

$$\bar{x}(k) = [x_1^T(k) \quad x_2^T(k) \quad u^T(k-1)]^T, \\ \bar{Z}_i = \begin{bmatrix} A_{d1} + B_{10}(k) K_1 & B_{10}(k) K_2 & B_{11}(k) \\ -B_2 K_1 & -B_2 K_2 & 0 \\ K_1 & K_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Z}_2 = \begin{bmatrix} A_{d1} & 0 & B_{10}(k) + B_{11}(k) \\ 0 & 0 & -B_2 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\hat{x} = [x_1^T(k) \quad x_c^T(k) \quad u^T(k-1)]^T,$$

$$\mathcal{Z}_1 = \begin{bmatrix} A_{d1} & B_{10}(k) C_c & B_{11}(k) \\ B_c C_1 & A_c & -B_c C_2 B_2 \\ 0 & C_c & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Z}_2 = \begin{bmatrix} A_{d1} & 0 & B_{10}(k) + B_{11}(k) \\ B_c C_1 & A_c & -B_c C_2 B_2 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

显然,闭环系统特性矩阵  $\tilde{Z}_i$  是随  $i$  值变化的时变矩阵,  $i$  决定于网络数据包是否丢失的状态.

定义 1 有时延和数据包丢失的奇异 NCS 闭环系统的特性矩阵随数据包丢失率而变化的比率定义为统一结构事件率,用  $\tilde{\gamma}_i (i = 1, 2)$  表示,  $\tilde{\gamma}_i$  满足  $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 = 1$ .

由文献[7]可知,奇异 NCS 闭环系统的统一结构事件率  $\tilde{\gamma}_i$  和网络数据包丢失率  $r$  之间的关系为  $\tilde{\gamma}_1 = 1 - r, \tilde{\gamma}_2 = r$ . 因此,当网络时延  $k$  和数据包丢失率  $r$  一定时,具有时延和数据丢失的奇异 NCS 闭环系统可以视为由  $\tilde{Z}_i$  的结构事件率  $\tilde{\gamma}_i$  约束的异步动态切换系统. 结构事件率  $\tilde{\gamma}_i$  决定于网络的数据包丢失率  $r$ , 所以,系统的稳定性也将主要取决于网络数据包丢失率.

#### 4 稳定性分析

引理 1<sup>[9]</sup> 由事件率  $\tilde{\gamma}_i$  约束的异步动态系统  $x(k+1) = f_i(x(k)) (i = 1, \dots, m, m$  是系统状态矩阵的离散状态数), 如果存在  $R^n \rightarrow R_+$  域的满足  $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = 0$  ( $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = 0$ ) 的 Lyapunov 函数  $V(x)$  及标量  $a$  和  $a_i > 0$ , 满足条件  $V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq (a_i^2 - 1)V(x(k))$ ,

$$\prod_{i=1}^m a_i^{\tilde{\gamma}_i} > 1, \quad (9)$$

则该系统指数稳定, 衰减率为  $\prod_{i=1}^m a_i^{\tilde{\gamma}_i}$ .

定理 1 当时延  $k$   $T$  且数据包丢失率  $r$  一定时,被控对象(1) 在状态反馈控制器(5) 控制下, 如果存在正定矩阵  $\bar{P}, \bar{Q}$  和  $\bar{S}$ , 标量  $a_i > 0 (i = 1, 2)$ , 满足条件

$$a_i^{1-r} a_i^r > 1, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -a_i^2 \bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & -a_i^2 \bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & -a_i^2 \bar{S} \\ A_{d1} \bar{P} + B_{10} K_1 \bar{P} & B_{10} K_2 \bar{Q} & B_{11} \bar{S} \\ B_2 K_1 \bar{P} & B_2 K_2 \bar{Q} & 0 \\ K_1 \bar{P} & K_2 \bar{Q} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}A_{d1}^T + \bar{P}(B_{10} K_1)^T & \bar{P}(B_2 K_1)^T & \bar{P}K_1^T \\ \bar{Q}(B_{10} K_2)^T & \bar{Q}(B_2 K_2)^T & \bar{Q}K_2^T \\ \bar{S}B_{11}^T & 0 & 0 \\ -\bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{S} \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} -a_2^2 \bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^2 \bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S} - a_2^2 \bar{S} \\ A_{d1} \bar{P} & 0 & (B_{10} + B_{11}) \bar{S} \\ 0 & 0 & B_2 \bar{S} \\ \bar{P}A_{d1}^T & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{S}(B_{10}^T + B_{11}^T) & \bar{S}B_{11}^T \\ -\bar{P} & 0 \\ 0 & -\bar{Q} \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

则其闭环系统(7)指数稳定,衰减率为  $a_1^{1-r} a_2^r$ ,其指数稳定的最大允许数据包丢失率由下式决定:

$$\begin{cases} r \lg \frac{a_2}{a_1} + \lg a_1 > 0, \\ 0 < r < 1. \end{cases} \tag{13}$$

证明 由引理 1 可知,当  $a_1^{1-r} a_2^r > 1$  时,  $V(x(k+1)) - a_i^2 V(x(k)) < 0$  时,闭环系统(7)指数稳定,其中  $i = 1, 2$ .

选择对称正定矩阵  $P, Q$  和  $S$ , 定义 Lyapunov 函数为

$$V(k) = x_1^T(k) P x_1(k) + x_2^T(k) Q x_2(k) + u^T(k-1) S u(k-1) > 0.$$

当无数据包丢失时,  $\bar{Z}_i = \bar{Z}_1$ , 考虑闭环模型有

$$V(x(k+1)) - a_i^2 V(x(k)) = \bar{x}(k)^T \bar{\Gamma}_1 \bar{x}(k).$$

其中

$$\bar{x} = [x_1^T(k) \quad x_2^T(k) \quad u^T(k-1)]^T, \quad \bar{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2^T & N_4^T \\ N_2 & N_3 & (B_1 K_2)^T P B_{11} \\ N_4 & B_{11}^T P B_1 K_2 & B_{11}^T P B_{11} - a_1^2 S \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$N_1 = (A_{d1} + B_{10} K_1)^T P (A_{d1} + B_{10} K_1) + (B_2 K_1)^T Q B_2 K_1 + K_1^T S K_1 - a_1^2 P,$$

$$N_2 = (B_1 K_2)^T P (A_{d1} + B_{10} K_1) + (B_2 K_2)^T Q B_2 K_1 + K_2^T S K_1,$$

$$N_3 = (B_1 K_2)^T P B_1 K_2 + (B_2 K_1)^T Q B_2 K_2 + K_2^T S K_2 - a_1^2 Q,$$

$$N_4 = B_{11}^T P (A_{d1} + B_{10} K_1).$$

根据引理 1, 当  $\bar{\Gamma}_1 < 0$  时, 对于任意  $k \in T$  的时

延, 在无数据包丢失状态下, 该系统指数稳定, 由此可推出系统指数稳定的条件为

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2^T & N_4^T \\ N_2 & N_3 & (B_1 K_2)^T P B_{11} \\ N_4 & B_{11}^T P B_1 K_2 & B_{11}^T P B_{11} - S \end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

通过矩阵变换, 并利用 Schur 补性质, 上式可变换为

$$\begin{bmatrix} -a_1^2 P & 0 & 0 \\ 0 & -a_1^2 Q & 0 \\ 0 & 0 & -a_1^2 S \\ A_{d1} + B_{10} K_1 & B_1 K_1 & B_{11} \\ B_2 K_1 & B_2 K_2 & 0 \\ K_1 & K_2 & 0 \\ (A_{d1} + B_{10} K_1)^T & (B_2 K_1)^T & K_1^T \\ (B_1 K_1)^T & (B_2 K_2)^T & K_2^T \\ B_{11}^T & 0 & 0 \\ -P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

式(16)左乘、右乘  $\text{diag}(P^{-1}, Q^{-1}, S^{-1}, I, I, I)$ , 并令  $\bar{P} = P^{-1}, \bar{Q} = Q^{-1}, \bar{S} = S^{-1}$ , 则式(16)等价于式(11).

有数据包丢失时,  $\bar{Z}_i = \bar{Z}_2$ , 由引理 1, 当  $V(x(k+1)) - a_2^2 V(x(k)) = \bar{x}(k)^T \bar{\Gamma}_2 \bar{x}(k) < 0$  时, 系统指数稳定, 因此有  $\bar{\Gamma}_2 < 0$ , 即指数稳定条件为

$$\begin{bmatrix} A_{d1}^T P A_{d1} - a_2^2 P & 0 & A_{d1}^T P (B_{10} + B_{11}) \\ 0 & -a_2^2 Q & 0 \\ (B_{10} + B_{11})^T P A_{d1} & 0 & M \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

其中

$$M = (B_{10} + B_{11})^T P (B_{10} + B_{11}) + B_2^T Q B_2 + S - a_2^2 S.$$

通过变换, 式(17)可变换为

$$\begin{bmatrix} -a_2^2 P & 0 & 0 & A_{d1}^T & 0 \\ 0 & -a_2^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S - a_2^2 S & B_{10}^T + B_{11}^T & B_2^T \\ A_{d1} & 0 & B_{10} + B_{11} & -P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{18}$$

式(18)左乘、右乘  $\text{diag}(P^{-1}, Q^{-1}, S^{-1}, I, I)$ , 即等价于式(12).

由引理 1, 指数衰减率为  $\tilde{a}_1^1 \tilde{a}_2^2$ ; 由事件率与数据包丢失率关系  $\tilde{r}_1 = 1 - r, \tilde{r}_2 = r$ , 有衰减率  $a_1^{1-r} a_2^r$ .

当系统指数稳定时, 对式(10)取对数, 可得

$$(1-r) \lg a_1 + r \lg a_2 > 0.$$

整理有

$$r \lg \frac{a_2}{a_1} + \lg a_1 > 0.$$

根据数据包丢失率的定义, 有  $0 < r < 1$ , 因此有式(13) 成立.

**定理 2** 当时延  $k \leq T$  且数据包丢失率  $r$  一定时, 被控对象(1) 在输出反馈控制下, 如果存在正定矩阵  $P, Q$  和  $S$ , 标量  $b_i > 0 (i = 1, 2)$ , 满足条件

$$b_1^{-1} r b_2^2 > 1, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} -b_1^{-2} P & 0 & 0 \\ 0 & -b_1^{-2} Q & 0 \\ 0 & 0 & -b_1^{-2} S \\ A_{d1} P & B_{10} C_c Q & B_{11} S \\ B_c C_1 P & A_c Q & -B_c C_2 B_2 S \\ 0 & C_c Q & 0 \\ PA_{d1}^T & P(B_c C_1)^T & 0 \\ Q(B_{10} C_c)^T & QA_c^T & QC_c^T \\ SB_{11}^T & -S(B_c C_2 B_2)^T & 0 \\ -P & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix} < 0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} -b_2^{-2} P & 0 & 0 \\ 0 & -b_2^{-2} Q & 0 \\ 0 & 0 & S - b_2^{-2} S \\ A_{d1} P & 0 & (B_{10} + B_{11}) S \\ B_c C_1 P & A_c Q & -B_c C_2 B_2 S \\ PA_{d1}^T & P(B_c C_1)^T & 0 \\ 0 & QA_c^T & 0 \\ S(B_{10} + B_{11})^T & S(B_c C_2 B_2)^T & 0 \\ -P & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{21}$$

则其闭环系统指数稳定, 指数衰减率为  $b_1^{-1} r b_2^2$ , 确保稳定的最大数据包丢失率由下式决定:

$$\begin{cases} r \lg \frac{b_2}{b_1} + \lg b_1 > 0, \\ 0 < r < 1. \end{cases} \tag{22}$$

证明方法同定理 1.

**注 1** 定理 1 和定理 2 的求解, 可事先给定满足  $a_1^{-1} r a_2^2 > 1$  或  $b_1^{-1} r b_2^2 > 1$  关系的一组  $a_i$  或  $b_i$ , 然后利用 LMI 工具箱求解其余线性矩阵不等式组. 若有可行解, 即可判定相应系统的稳定性. 通过 LMI 的可行解, 可求出系统的指数衰减率, 以及确保系统指数稳定的最大允许数据包丢失率  $r_{\text{maxdr}}$ .

### 5 数值例子

考虑如下被控对象:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t).$$

因该被控对象正则、无脉冲, 因此, 存在非奇异矩阵

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

使系统受限等价于

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ 0 = x_2(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \end{cases}$$

假定 NCS 采样周期 0.1 s, 网络诱导时延  $k = 0.01$  s, 数据包丢失率  $r = 0.05$ , 可计算出

$$A_{d1} = e^{A_1 T} = \begin{bmatrix} 0.9002 & -0.0950 \\ 0.0950 & 0.9952 \end{bmatrix},$$

$$B_{10}(k) = \int_0^{T-k} e^{A_1 t} B_1 dt = \begin{bmatrix} 0.0860 \\ 0.0039 \end{bmatrix},$$

$$B_{11}(k) = \int_{T-k}^T e^{A_1 t} B_1 dt = \begin{bmatrix} 0.0091 \\ 0.0009 \end{bmatrix}.$$

采用状态反馈控制, 控制器参数选为  $K_1 = [-0.6 \quad -0.2]$ ,  $K_2 = [-0.05 \quad -0.01]$ .

利用定理 1, 选  $a_1 = 1.0356$ ,  $a_2 = 0.8124$ , 则有  $a_1^{-1} r a_2^2 = 1.0231 > 1$ .

利用 LMI 工具箱, 计算定理 1 的两个矩阵不等式, 可知有可行解, 分别为

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 4.0755 & -1.7381 \\ -1.7381 & 4.0444 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q} = 34.0067, S = 12.4958.$$

可见, 该系统指数稳定, 指数衰减率为  $a_1^{-1} r a_2^2 = 1.0231$ , 确保系统指数稳定的最大数据包丢失率  $r_{\text{maxdr}} = -\log(a_1) / \log(a_2/a_1) = 0.1441$ .

**注 2** 对于系统而言,  $r_{\text{maxdr}}$  越大, 表明系统相对于网络数据包丢失因素的稳定范围越大, 同时还表明系统稳定性受数据包丢失的影响越小, 则系统的平稳性越好.

## 6 结 论

当时延不超过一个采样周期、数据包丢失率一定时,正则无脉冲奇异被控对象的网络控制系统的闭环模型是由数据包丢失率约束的异步动态切换系统,且状态反馈和动态输出反馈闭环 NCS 可用统一模型描述. 系统指数稳定的条件可以用一组不等式描述,在给定其中一组参数的前提下,可用 LMI 工具箱求解另一组矩阵不等式,进而可判定系统的稳定性. 数据例子给出了稳定性的判定方法.

### 参考文献(References)

- [1] Wei Zhang, Michael S Branicky, Stephen M Phillips. Stability of networked control systems [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.
- [2] Yue Dong, Han QingLong, James Lam. Network-based robust  $H$  control of systems with uncertainty [J]. Automatica, 2005, 41: 999-1007.
- [3] Fang Huajing, Ye Hao, Zhong Maiying. Fault diagnosis networked control systems [J]. Annual Reviews in Control, 2007, 31: 55-68.
- [4] Huaguang Zhang, Dedong Yang, Tianyou Chai. Guaranteed cost networked control for T-S fuzzy systems with time delays[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Part C, 2007, 37(2): 160-172.
- [5] Gao Huijun, Chen Tongwen.  $H$  estimation for uncertain systems with limited communication capacity [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(1): 2070-2084.
- [6] Dai L. Singular control systems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989: 1-100.
- [7] 邱占芝, 张庆灵, 杨春雨. 基于广义系统的网络控制系统的分析与建模 [J]. 东北大学学报, 2005, 26(5): 409-412.  
(Qiu Z Z, Zhang Q L, Yang C Y. Modeling and analysis for networked control systems based singular systems[J]. J of Northeastern Unerveisity, 2005, 26(5): 409-412.)
- [8] Qiu Zhanzhi, Zhang Qingling, Zhao Zhiwu. Stability of singular networked control systems with control constraint [J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2007, 18(2): 290-296.
- [9] Rabello A, Bhaya A. Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications [J]. IEE Proc of Control Theory Application, 2003, 150(5): 546-550.
- [10] 朱其新, 胡寿松. 网络控制系统的分析与建模 [J]. 信息与控制. 2003, 21(1): 5-8.  
(Zhu Q X, Hu S S. Modeling and analysis of networked control systems [J]. Information and Control, 2003, 21(1): 5-8.)
- [5] Zhu X D, Huang Z Q. Conceptual modeling rules extracting for data streams [J]. Knowledge-based System, 2008, 21(8): 934-940.
- [6] Chang J H, Lee W S, Zhou A. Finding recent frequent itemsets adaptively over online data streams[C]. ACM SIGKDD Int Conf on Knowledge Discovery and Data Mining. San Diego, 2003: 487-492.
- [7] Jin R M, Agrawal G. Frequent pattern mining in data streams[M]. New York: Springer, 2007: 61-84.
- [8] Lin C-H, Chiu D-Y, Wu Y-H, et al. Mining frequent itemsets from data streams with a time-sensitive sliding window[C]. SIAM Int Conf on Data Mining. Newport Beach, 2005: 59-66.
- [9] Giannella C, Han J, Pei J, et al. Mining frequent patterns in data streams at multiple time granularities [M]. Cambridge: AAAI/MIT Press, 2003: 191-212.
- [10] Borgelt C. Finding frequent itemsets by recursive elimination[C]. Workshop Open Source Data Mining Software. Chicago, 2005: 66-70.
- [11] Sivanandam S N, Sumathi D, Hamsapriya T, et al. A hybrid parallel frequent itemset mining algorithm for very large databases [J]. Academic Open Internet Journal, <http://www.acadjournal.com>, 2004, 13.

(上接第 836 页)