

文章编号: 1001-0920(2009)07-1028-05

基于扰动观测器和有限时间控制的永磁同步电机调速系统

张小华, 刘慧贤, 丁世宏, 李世华

(东南大学 自动化学院, 南京 210096)

摘要: 针对采用矢量控制的永磁同步电机调速系统提出一种复合控制方法: 首先用扰动观测器观测出系统中由于模型参数变化, 负载改变等产生的扰动, 并用此观测值作为前馈量补偿到输入端; 然后运用有限时间控制方法设计系统前向通道中的反馈控制器; 最后给出了控制器参数与速度误差收敛性能之间的数学关系. 仿真表明, 基于扰动观测器的有限时间控制具有更好的抗扰动性能和更优越的收敛性能.

关键词: 永磁同步电机; 速度控制; 扰动观测器; 有限时间控制

中图分类号: TM351

文献标识码: A

PMSM speed-adjusting system based on disturbance observer and finite-time control

ZHANG Xiaohua, LIU Hui-xian, DING Shi-hong, LI Shi-hua

(School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: LI Shi-hua, E-mail: lsh@seu.edu.cn)

Abstract: Based on the vector control speed-regulation system of permanent magnet synchronous motor, a compound control method is proposed. First, a disturbance observer is used to estimate the disturbance value of the system which is caused by model parameters change and load change. Then, this estimated value is used to construct a feedforward compensation which is added to the control input. Subsequently, the finite-time control theory is applied to the feedback control design for the forward channel. Finally, a relationship between the parameters of controller and the convergence performance of speed error is given. Simulation results show that the finite-time controller based on disturbance observer has a stronger anti-disturbance ability and a better convergence performance.

Key words: Permanent magnet synchronous motor; Speed control; Disturbance observer; Finite-time control

1 引言

永磁同步电机因具有体积小、结构简单、转矩惯量比高、可靠性好、伺服性能优良等特点, 在机器人、航空航天、数控等领域受到越来越多的关注^[1]. 然而, 永磁同步电机是一个复杂的非线性系统, 在运行过程中参数会变化, 而且还存在不确定性和严重的外部干扰^[2], 要实现高性能调速控制, 必须克服这些因素对系统性能的影响. 传统的控制策略, 如 PI 控制方法, 具有结构简单、易实现等优点, 通常在参数匹配的情况下可获得较好的性能, 但在系统参数变化或负载扰动情况下往往无法保证理想的闭环控制性能^[3]. 近几年出现许多将非线性控制技术应用于永磁同步电机系统的研究, 如滑模控制、自抗扰控

制、模型参考自适应控制和智能控制^[4-9]等.

在永磁同步电机控制系统中, 扰动是造成系统控制性能下降的主要因素, 必须加以抑制. 而实际工程中, 扰动往往不可避免, 并且扰动的形式复杂, 其精确模型很难得到. 扰动观测器 (DOB) 因具有结构简单、计算量小、不依赖于精确模型等特点, 已被广泛应用于运动控制系统中, 如电机伺服控制^[10-13]、硬盘驱动^[14,15]、机器人控制^[16,17]、气压控制^[18]等. 文献 [19] 指出, 扰动观测器的本质相当于在速度环和电流环之间引入了一个加速度负反馈环, 该环能够抑制扰动. [20] 讨论了电流环的截止频率、速度环中断周期、扰动观测器中名义模型与实际模型匹配情况对扰动观测性能的影响. [21] 就数字控制时延对扰

收稿日期: 2008-06-22; 修回日期: 2008-12-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60504007); 江苏省自然科学基金项目 (BK2008295).

作者简介: 张小华 (1983—), 男, 湖北黄冈人, 硕士生, 从事交流伺服控制系统的研究; 李世华 (1975—), 男, 江西萍乡人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制系统的研究.

动观测器性能的影响进行了探讨,并给出了扰动观测器参数选取的一般规律.

有限时间控制方法是一种先进的非线性控制方法.与传统方法相比,有限时间稳定系统有如下两个特点:1)它们在平衡点附近有更好的收敛性;2)它们有更好的抗负载特性.由于上述优越性,近年来有限时间控制问题受到了广泛的关注^[22-28].

本文综合考虑了有限时间控制与扰动观测技术的优点,针对永磁同步电机调速系统,提出了基于扰动观测器前馈补偿和有限时间反馈控制的复合控制方法(FTC+DOB),该方法能够进一步提高系统的抗扰动性能.通过严格的数学分析,给出了有界扰动情况下,系统稳态速度误差的界与控制器参数之间的关系.仿真结果表明了方法的有效性.

2 永磁同步电机模型及矢量控制

本文研究的是面装式永磁同步电机,在随转子旋转的 $d-q$ 坐标系上,其理想数学模型为^[1]

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s/L_d & p_n & 0 \\ -p_n & -R_s/L_q & -p_n f/L_q \\ 0 & p_n f/J & -B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_d/L_d \\ u_q/L_q \\ -T_L/J \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中: $u_d, u_q, i_d, i_q, L_d, L_q$ 分别为定子在 $d-q$ 坐标系上 d 轴和 q 轴的电压、电流、等效电感;对于面装式永磁同步电机 $L_d = L_q = L$; R_s 为定子电阻; p_n 为磁极对数; f 为转子机械角速度; f 为转子磁链; T_L 为负载转矩; B 为粘滞摩擦系数; J 为转子惯量与负载转动惯量之和.

由状态方程可知,电流 i_d 和 i_q 之间存在耦合,不便于实现对转矩的线性化控制.在实际工程中,常采用 $\dot{i}_d^* = 0$ 的控制策略:采用 PI 控制器作为 d 轴和 q 轴电流调节器,使 d 轴参考输入指令 $i_d^* = 0$. 选取恰当的 PI 参数,一般能够实现 $i_d \approx i_d^* = 0$,从而实现 PMSM 调速系统的近似解耦.图 1 为永磁同步电机基于矢量控制的双闭环解耦控制结构.

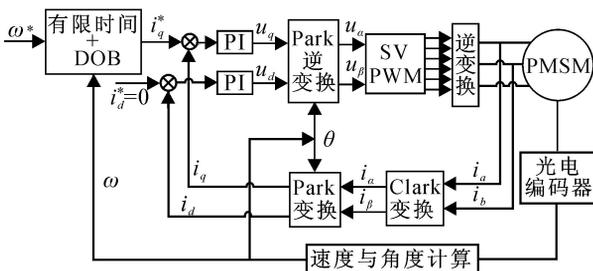


图 1 永磁同步电机速度控制框图

由永磁同步电机模型(1),得输出方程为

$$\dot{y} = bi_q + w. \quad (2)$$

其中: $b = p_n f/J, w = -(T_L + B)/J$ 为摩擦力矩和外加负载组成的扰动.

3 复合控制器设计

3.1 扰动观测器

扰动观测器的基本思想是,将外部力矩干扰及模型参数变化造成的实际对象与名义模型输出的误差等效到控制输入端.在控制中引入相应的补偿,实现对扰动的完全抑制.其基本结构如图 2 所示^[12].图中: u_0 是输入, y 是输出, d 是干扰输入, \hat{d} 是扰动的估计值, $G_p(s)$ 为被控对象, $G_n(s)$ 为名义模型, $Q(s)$ 为低通滤波器.

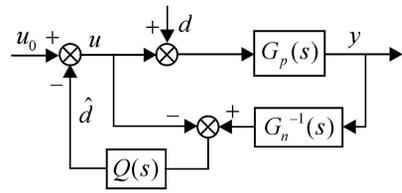


图 2 DOB 结构图

设计扰动观测器,就是要合理设计 $G_n(s)$ 和 $Q(s)$.一般情况下,被控对象 $G_p(s)$ 是严格有理分式,所以 $G_n^{-1}(s)$ 为非真有理分式,在物理上不可实现.因此,引入严格真有理分式 $Q(s)$ 使得 $G_n(s)^{-1}Q(s)$ 为真有理分式.在设计 $Q(s)$ 时考虑系统对负载扰动 d 的抑制能力.

在设计过程中,可以将电流环等效成增益固定的比例环节,不考虑电流响应过程和延迟^[29].本文中电流环传递函数等效为常数 1.根据式(2)取名义模型 $G_n(s) = p_n f/(Jns)$,此处滤波器取为一阶形式 $Q(s) = 1/(s+1)$.记 $b_0 = p_n f/Jn$.根据速度环控制器设计需要,将式(2)改写为

$$\dot{y} = b_0 i_q^* + bi_q - b_0 i_q^* + w = b_0 i_q^* + d. \quad (3)$$

其中: $d = bi_q - b_0 i_q^* + w$,包含摩擦力矩,外加负载以及名义模型与实际模型失配误差引起的扰动.

根据图 2 可知,扰动观测器输出为

$$\hat{d} = (y G_n^{-1}(s) - u)/(s+1). \quad (4)$$

由式(2)和(3)知,在永磁同步电机调速系统中 $G_p(s) = b/s, G_n(s) = b_0/s, y = \dot{y}, u = i_q^*$.将这些代入式(4)中,整理后可得到扰动估计式为

$$\hat{d} = s/(s+1) - b_0 i_q^*/(s+1) = d/(s+1).$$

显然,要实现扰动观测,即实现 $\hat{d}(t) \approx d(t)$,要求滤波时间常数足够小.

3.2 带有扰动观测器的有限时间控制系统设计

本文的目标是:在永磁同步电机调速系统中,设计一个基于扰动观测器的有限时间控制器,使系统

实际输出速度跟踪给定速度 r 。令 $e = r - \dot{\theta}$ ，对 e 求导，并将式(2)代入得

$$\dot{e} = -b_0 \dot{i}_q^* - d + \dot{r}. \quad (5)$$

设计速度环控制输出表达式如下：

$$i_q^* = (k \operatorname{sign}(e) |e| - \dot{r} - d) / b_0, \quad (6)$$

将式(6)代入(5)中，速度误差方程为

$$\dot{e} = -k \operatorname{sign}(e) |e| + a(t), \quad (7)$$

其中 $a(t) = d - \dot{r}$ 可以看成系统的总扰动。

假设1 $a(t)$ 是有界的，即满足 $|a(t)| \leq l, l > 0$ 。

定理1 若式(7)满足假设1，系统(5)在复合控制器(6)作用下速度误差将会收敛到区域

$$Q_1 = \{e \mid |e| \leq ((l + c_1)/k)^{1/\nu}\}.$$

其中 $k > 0, 0 < \nu < 1, c_1 > 0$ 是任意正常数。

证明 选Lyapunov函数为 $V_1(e) = e^2/2$ 。由式(7)有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e) &= -k |e|^{1+\nu} + ea(t) \\ &\leq -(k |e| - l) |e|. \end{aligned} \quad (8)$$

记 $Q_1 = \{e \mid |e| \leq ((l + c_1)/k)^{1/\nu}\}$ ，其中 $c_1 > 0$ 为常数。对于 $e \in R - Q_1$ ，则 $|e| > ((l + c_1)/k)^{1/\nu}$ 。由式(8)可以看出，若 $e \in R - Q_1$ ，则有

$$\dot{V}_1(e) < -c_1 ((l + c_1)/k) < 0.$$

误差 e 的初态分两种情况：1) 初始状态在 Q_1 外，即 $e \in R - Q_1$ 。由于 $\dot{V}_1(e) < 0$ ，存在 $t_1 > 0$ ，使得 $e(t_1) \in bdQ_1$ ， bdQ_1 表示 Q_1 的边界。2) $e \in Q_1$ ，如果 e 一直处于 Q_1 中，且不逃离收敛域 Q_1 ，则无需证明。本文考虑 e 会逃离 Q_1 的情况。这时，同样存在 $t_1 > 0$ ，满足 $e(t_1) \in bdQ_1$ 。

下面证明对任意的 $t \in [t_1, +\infty)$ ， $e(t) \in Q_1$ 。参考文献[28]的引理4，记 $m_1 = \inf_{e \in bdQ_1} |e|$ 且 $p_1(e) = k |e|^{1+\nu} - l |e|$ 。这时有 $m_1 = ((l + c_1)/k)$ 且 $p_1(m_1) = ((l + c_1)/k)$ 。注意，对所有 $e \in bdQ_1$ ，有 $\dot{V}_1(e) - p_1(m_1) < 0$ 。由于 $V_1(e), p_1(e)$ 是连续的，存在 $s_1 > 0$ 使得 $t \in [t_1, t_1 + s_1)$ ，有 $e(t) \in Q_1$ 。

设存在 $t_1 \in (t_1, +\infty)$ 满足 $e(t_1) \in Q_1$ ，则有 (t_1, t_1) 使得 $e(t_1) \in bdQ_1$ 成立。因 $\dot{V}_1(e(t_1)) - p_1(m_1) < 0$ 且 $V_1(e), p_1(e)$ 连续，故存在 $s_2 > 0$ 使得 $V_1(e(t))$ 在区域 $[1 - s_2, 1)$ 内是非增的。因此 $m_1 = |e(t_1)| - |e(t_1 - s_2)| < m_1$ ，该式是矛盾的。则对任意 $t \in [t_1, +\infty)$ ， $e(t)$ 满足 $|e(t)| \leq ((l + c_1)/k)^{1/\nu}$ 。

注1 当 $\nu = 1$ 时，式(7)控制律退化如下基于扰动观测补偿和比例反馈控制的复合控制(P + DOB)：

$$u = i_q^* = (ke - \dot{r} - d) / b_0. \quad (9)$$

此时，由类似本文的分析证明方法同样可得，闭环系统的速度跟踪误差将收敛到如下区域：

$$Q_0 = \{e \mid |e| \leq ((l + c_1)/k)\}.$$

对这两种情况，都可以选取较大的 k 值，满足 $k(l + c_1)$ ，使得误差收敛到零点附近的小区域。理论上，若将 k 值取得足够大，这两种情况下系统的稳态误差将任意小。然而考虑到系统稳定性等因素， k 不能取很大，但基于有限时间反馈控制的方法却可以通过减小分数幂使 Q_1 任意小。因此，与P + DOB方案相比，本文的FTC + DOB方案进一步提高了闭环系统的抗扰动能力。

4 仿真及结果

本文在Matlab 7.0.4中Simulink环境下进行了仿真研究。仿真中采用的永磁同步电机参数为：功率 $P = 0.75$ kW，额定转速 $n_N = 3000$ rpm，额定力矩 $T_N = 2.387$ N·m，额定线电流 $I_N = 4.71$ A，额定线电压 $V_N = 103$ V，电枢绕组电阻 $R = 1.75$ Ω，电枢绕组电感 $L = 4$ mH，惯量 $J = 1.78 \times 10^{-4}$ kg·m²，阻尼系数 $B = 7.403 \times 10^{-5}$ N·ms/rad，极对数 $p_n = 4$ ，永磁磁链 $\psi_f = 0.1267$ Wb。考虑到实际工程情况，对速度环输出限幅值取 ± 12 A。

永磁同步电机速度环分别采用了FTC + DOB复合控制和P + DOB复合控制方法。扰动观测器中名义模型参数与实际电机参数相同，滤波时间常数 $\tau = 0.0004$ s。为了对比客观，两种控制器参数的选取基于以下原则：1) 控制量大小在同一个级别；2) 调节控制参数使得两种情况下闭环系统的性能相对最优。多次调试后得到参数如下：对本文提出的复合控制律(6)，参数 $\nu = 0.5, k = 3.6$ ；对于复合控制律(9)，参数 $k = 0.28$ 。速度给定为阶跃信号 $r = 500$ rpm，干扰信号为 $0.4 \sin(40t)$ ，在 0.2 s时突加负载转矩 $T_L = 4$ N·m。

从图3和图5可以看出，在相同级别控制量下，FTC + DOB复合控制方法的闭环过渡时间稍短，响应较快，动态性能好。单从这个仿真结果来看，FTC + DOB复合控制方法对动态性能的改进效果不是很明显。究其原因，这两种方法都采用了扰动观测补偿，差别只在反馈调节方面。虽然有限时间反馈控制在平衡点附近具有更快的收敛速度，但是为了保证闭环响应的快速性，一般调参会使得在曲线的上升阶段的大部分时间内两种控制器的输出都处于饱和状态(从图5的 $0 \sim 0.02$ s段可看出，大部分时间的输出都是饱和值12 A)。

这两种控制器都有对扰动的观测补偿作用，因此抗扰动性能都较强。但从图4可以看出，FTC + DOB方法的突加负载速度掉落为 1.4 rpm，恢复给

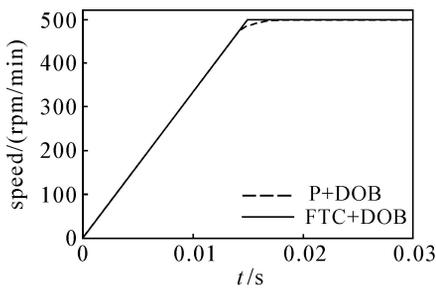


图 3 速度阶跃响应曲线

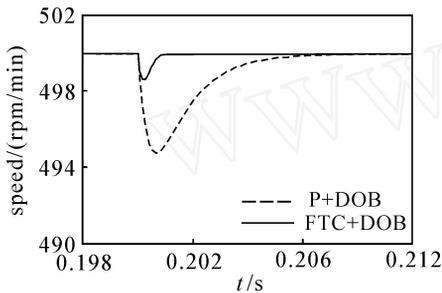


图 4 突加负载响应图

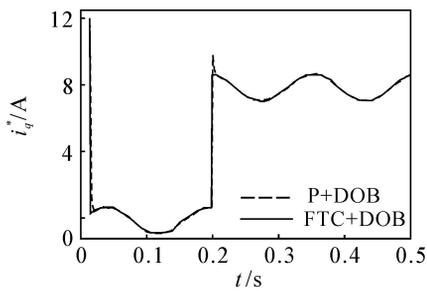


图 5 速度控制器控制量输出 i_q^*

定转速所用时间小于 2 ms;而 P + DOB 控制方案在突加负载时速度掉落约 5.2 rpm,恢复到给定速度约用 8 ms. 因此,本文方法在加载时速度降落更小,恢复到稳态时间更短,抗干扰性能更强.

5 结 论

本文针对永磁同步电机调速系统,提出了基于扰动观测补偿和有限时间反馈控制的复合控制方法.通过严格的数学分析,给出了有界干扰情况下闭环系统稳态速度误差的界与控制器参数的关系.仿真表明,本文的控制方法可以进一步提高闭环系统的抗干扰能力.

参考文献(References)

[1] 唐任远. 现代永磁同步电机理论与设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
(Tang R Y. Modern permanent magnet synchronous motor theory and design [M]. Beijing: Machinery Industry Press, 1997.)

[2] 黄济荣. 现代控制理论与交流电机调速[J]. 机车电传动, 2005, (1): 1-7.
(Huang J R. Modern control theory and speed

adjustment of AC motor [J]. Electric Drive for Locomotives, 2005, (1): 1-7.)

[3] 杨文强, 蔡旭, 姜建国. 矢量控制系统的积分型滑模变结构速度控制[J]. 上海交通大学学报, 2005, 39(3): 426-433.
(Yang W Q, Cai X, Jiang J G. Sliding-mode variable structure speed control with integral action for vector controlled asynchronous motor [J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2005, 39(3): 426-433.)

[4] Lai C K, Shyu K K. A novel motor drive design for incremental motion system via sliding-mode control method [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2005, 52(2): 499-507.

[5] 孙凯, 许镇琳, 盖廓, 等. 基于自抗扰控制器的永磁同步电机位置伺服系统[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(15): 1-7.
(Sun K, Xu Z L, Gai K, et al. A novel position controller of PMSM servo system based on active disturbance rejection controller [J]. Proc of the CSEE, 2007, 27(15): 1-7.)

[6] 陈诚, 李世华, 田玉平. 永磁同步电机调速系统的自抗扰控制[J]. 电气传动, 2005, 35(9): 13-16.
(Chen C, Li S H, Tian Y P. Active disturbance rejection control of PMSM speed-adjusting system [J]. Electric Drive, 2005, 35(9): 13-16.)

[7] 刘志刚, 李世华. 基于永磁同步电机模型辨识与补偿的自抗扰控制器[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(24): 118-123.
(Liu Z G, Li S H. Active disturbance rejection based on permanent magnetic synchronous motor model identification and compensation [J]. Proc of the CSEE, 2008, 28(24): 118-123.)

[8] Wang G J, Fong C T, Chang K J. Neural-network-based self tuning PI controller for precise motion control of PMAC motors [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2001, 48(2): 408-415.

[9] 许强, 贾正春, 李朗如. 带负载转矩补偿的 PMSM 交流伺服系统自适应控制[J]. 电工技术学报, 1997, 12(5): 1-4.
(Xu Q, Jia Z C, Li L R. Adaptive controller of PMSM servo drives with load torque disturbance compensation [J]. Trans of China Electrotechnical Society, 1997, 12(5): 1-4.)

[10] 赵希梅, 郭庆鼎. 为提高轮廓加工精度采用 DOB 和 ZPETC 的直线伺服鲁棒跟踪控制[J]. 电工技术学报, 2006, 21(5): 111-114.
(Zhao X M, Guo Q D. Linear servo robust tracking control based on DOB and ZPETC to improve the contour machining precision [J]. Trans of China Electrotechnical Society, 2006, 21(5): 111-114.)

[11] 孙立宁, 崔晶, 曲东升, 等. 基于离散型扰动观测器的

- 直线电机控制研究[J]. 机械工程学报, 2004, 40(12): 164-167.
(Sun L N, Cui J, Qu D S. Research of discrete-time disturbance observer for linear motor[J]. Chinese J of Mechanical Engineering, 2004, 40(12): 164-167.)
- [12] Umeno T, Hori Y. Robust speed control of DC servomotors using modern two degrees-of-freedom controller design [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1991, 38(5): 363-368.
- [13] Kim B K, Chung W K. Advanced design of disturbance observer high performance motion control systems [C]. Proc of the American Control Conf. Anchorage, 2002: 2112-2117.
- [14] Ishikawa J, Tomizuka M. A novel add-on compensator for cancellation of pivot nonlinearities in hard disk drives[J]. IEEE Trans on Magnetics, 1998, 34(4): 1895-1897.
- [15] Ryoo J R, Jin K B, Moon J H, et al. Track-following control using a disturbance observer with asymptotic disturbance rejection in high-speed optical disk drivers [J]. IEEE Trans on Consumer Electronics, 2003, 49(4): 1178-1185.
- [16] 梅志千, 刘有德, 李向国. SCARA 机器人关节伺服系统中的干扰补偿控制[J]. 机床与液压, 2007, 35(7): 149-152.
(Mei Z Q, Li Y D, Li X G. Disturbance compensation to the joint servo system of SCARA-type manipulator [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2007, 35(7): 149-152.)
- [17] Komada S, Machii N, Hori T. Control of redundant manipulators considering order of disturbance observer [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2000, 47(2): 413-420.
- [18] 王祖温, 詹长书, 杨庆俊, 等. 气压伺服系统高性能鲁棒控制器的设计[J]. 机械工程学报, 2005, 41(11): 15-19.
(Wang Z W, Zhang C S, Yang Q J, et al. Design of high performance robust controller of pneumatic servo system [J]. Chinese J of Mechanical Engineering, 2005, 41(11): 15-19.)
- [19] Ohnishi K, Matsui N, Hori Y. Estimation, identification, and sensorless control in motion control system[J]. Proc of the IEEE, 1994, 82(8): 1253-1265.
- [20] Bertoluzzo M, Buja G S, Stampacchia E. Performance analysis of a high-bandwidth torque disturbance observer [J]. IEEE/ASME Trans on Mechatronics, 2002, 9(4): 653-660.
- [21] 黎坚, 杨耕, 窦日轩. 数字控制时延对扰动观测器性能的影响[J]. 电气传动, 2003, 33(2): 18-20.
(Li J, Yang G, Dou Y X. The effect of time delay on the performance of disturbance observer in digital control[J]. Electric Drive, 2003, 33(2): 18-20.)
- [22] Hong Y G. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems [J]. Systems and Control letter, 2002, 46(2): 231-236.
- [23] Huang X Q, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems [J]. Automatica, 2005, 41(5): 881-885.
- [24] 李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法[J]. 自动化学报, 2007, 33(1): 101-104.
(Li S H, Ding S H, Tian Y P. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear system [J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(1): 101-104.)
- [25] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Mathematics of Control Signals and Systems, 2005, 17(2): 101-127.
- [26] Li S H, Tian Y P. Finite-time stability of cascaded time-varying systems [J]. Int J of Control, 2007, 80(4): 646-657.
- [27] Hong Y G, Wang J K, Xi Z R. Stabilization of uncertain chained form systems within finite settling time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(9): 1379-1384.
- [28] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. SIAM J on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [29] Godler I, Honda H, Ohnishi K. Design guidelines for disturbance observers filter in discrete time [C]. 7th Int Workshop on Advanced Motion Control. Piscataway: IEEE Press, 2002: 390-395.

(上接第 1027 页)

- [8] 申铁龙. H 控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
(Sheng T L. The theory and application of H control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.)
- [9] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu L. Robust control — Linear matrix inequality method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)