文章编号: 1001-0920(2009)07-1055-04

基于单调函数的新弱化缓冲算子研究

吴正朋[1,2], 刘思峰[2], 崔立志[2], 米传民[2], 王建玲[2]
(1. 中国传媒大学 应用数学系, 北京 100024; 2. 南京航空航天大学 经济管理学院, 南京 210016)

摘　要: 在灰色系统缓冲算子公理体系下,构造了 2 类新弱化缓冲算子,并将其与党氏弱化缓冲算子进行比较,论证了党氏弱化缓冲算子为新算子的特例,从而大大地拓广了弱化缓冲算子的应用范围. 对序列前一部分增长(衰减)速度过快,而后一部分增长(衰减)速度过慢的冲击扰动系统数据序列,在建模预测过程中常常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题,提供了多种解决方案,首次将缓冲算子的构造与函数联系起来,从而为缓冲算子的构造开辟了新方向.

关键词: 灰色系统; 缓冲算子; 弱化缓冲算子; 单调函数
中图分类号: N94　　**文献标识码**: A

Study on weakening buffer operator based on strictly monotone function

WU Zheng-peng[1,2], *LIU Si-feng*[2], *CUI Li-zhi*[2], *MI Chuan-min*[2], *WANG Jian-ling*[2]
(1. Applied Mathematics Department, Communication University of China, Beijing 100024, China; 2. College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: WU Zheng-peng, E-mail: wuzhengpeng@126.com)

Abstract: Based on the present theories of buffer operators, two kinds of buffer operators based on the strictly monotone function are proposed, which all have the universality and practicability. Dang's weakening buffer operators are proved to be special examples, so it expands applied range about buffer operators. The problem of some contradictions between qualitative analysis and quantiative forecast in pretreatment for vibration data sequences is resolved effectively. Some contradictions between buffer operatores and function are given. Which provides a new method about the buffer operator.

Key words: Grey system; Buffer operator; Weakenin buffer operator; Monotone function

1 引　　言

灰色系统的特色是研究"小样本"与"贫信息"等不确定性问题. 因此,充分开发利用已占有的信息来挖掘系统本身固有的规律是灰色系统理论的基本准则,可通过社会、经济、生态等系统的行为特征数据来寻求因素之间或自身的变化规律. 灰色系统理论认为,尽管客观系统的表象复杂,数据离乱,但它们总有自身的整体功能,必然蕴藏某种内在的规律,关键是如何选择适当的方法来挖掘和利用它. 在文献[1-4]中,刘思峰等提出了冲击扰动缓冲算子的概念,并构造出一种得到较广泛应用的弱化缓冲算子. 本文在他们工作的基础上,又构造出两类新弱化缓冲算子,从而推广了缓冲算子的类型.

2 基本概念

定义 1　设系统行为数据序列为 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$,如果:

1) $\forall k = 2,3,\cdots,n, x(k) - x(k-1) > 0$,则称 X 为单调增长序列;

2) $\forall k = 2,3,\cdots,n, x(k) - x(k-1) < 0$,则称 X 为单调衰减序列;

3) 若有 $k_1, k_2 \in \{2,3,\cdots,n\}$, $x(k_1) - x(k_1 - 1) > 0$, $x(k_2) - x(k_2 - 1) < 0$,则称 X 为振荡序列.

其中 $M = \max\limits_{1 \le k \le n} x(k)$, $m = \min\limits_{1 \le k \le n} x(k)$,称 $M - m$ 为振荡序列 X 的振幅.

收稿日期: 2008-06-30; 修回日期: 2008-12-19.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037).
作者简介: 吴正朋(1964—),男,安徽庐江人,副教授,博士,从事灰色系统的研究; 刘思峰(1955—),男,郑州人,教授,博士生导师,从事灰色系统等研究.

定义 2 设 X 为系统行为数据序列, D 为作用于 X 的算子, X 经算子 D 作用后得到的序列记为 $XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d)$, 则称 D 为序列算子.

对序列连续作用, 可得二阶算子, 一直可以作用到 r 阶算子, 分别记为 $XD^2, \cdots, XD^r$.

公理 1[5] (不动点公理) 设 X 为系统行为数据序列, D 为序列算子, 则有 $x(n)d = x(n)$.

公理 2[5] (信息充分利用公理) 系统行为数据序列 X 中的每一个数据 $x(k)\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, 都应充分地参与算子作用的整个过程.

公理 3[6] (解析化与规范化公理) 任意的 $x(k)d\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 皆可由一个统一的 $x(1), x(2), \cdots, x(n)$ 的初等表达式表达.

满足上述 3 个公理的序列算子称为缓冲算子, XD 称为缓冲序列.

定义 3[6] 设 X 为系统行为数据序列, D 为序列算子, 当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时, 缓冲序列 XD 比行为数据序列 X 的增长速度(或衰减速度) 减缓或振幅减小, 则称缓冲算子 D 为弱化缓冲算子.

定理 1[6] 1) 设 X 为单调增长序列, XD 为缓冲序列, 则 D 为弱化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k) \leq x(k)d, k = 1, 2, \cdots, n$.

2) 设 X 为单调衰减序列, XD 为缓冲序列, 则 D 为弱化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k) \geq x(k)d, k = 1, 2, \cdots, n$.

3) 设 X 为振荡序列, XD 为缓冲序列, D 为弱化缓冲算子, 则

$$\max_{1\leq k\leq n} x(k) \geq \max_{1\leq k\leq n}\{x(k)d\},$$

$$\min_{1\leq k\leq n} x(k) \leq \min_{1\leq k\leq n}\{x(k)d\}.$$

由定理 1 可知, 单调增长序列在弱化缓冲算子作用下, 数据膨胀; 单调衰减序列在弱化缓冲算子作用下, 数据萎缩.

3 弱化缓冲算子的构造

文献[7-10] 中构造了下列弱化缓冲算子, 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列, 令

$$XD_i = (x(1)d_i, \cdots, x(n)d_i),\ i = 1, 2,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时, D_1, D_2 皆为弱化缓冲算子. 其中

$$x(k)d_1 = \frac{w_k x(k) + \cdots + w_n x(n)}{w_k + \cdots + w_n}, \quad (1)$$

$$x(k)d_2 = [x(k)^{w_k} \times \cdots \times x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}, \quad (2)$$

式中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

本文在弱化缓冲算子 D_1, D_2 基础上, 利用单调函数理论构建新的弱化缓冲算子.

定理 2 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 且 $x(i) > 0, f > 0, w_i > 0$. 权重向量为 $w = (w_1, \cdots, w_n)$, f 为严格单调递增(或递减) 函数, g 为其反函数. 其中

$$x(k)d_3 = g\left\{\frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n}\right\}. \quad (3)$$

令 $XD_3 = (x(1)d_3, \cdots, x(n)d_3)$, 则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时, D_3 为弱化缓冲算子.

证明 容易验证

$$x(n)d_3 = g\left\{\frac{w_n f(x(n))}{w_n}\right\} = x(n),$$

即 D_3 满足缓冲算子公理 1. 对缓冲算子公理 2 和公理 3 显然也成立, 因而 D_3 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数, 当:

1) X 为单调增长序列时, 因为 $0 < x(k) \leq \cdots \leq x(n)$, 得

$0 < f(x(k)) \leq \cdots \leq f(x(n))$,

$0 < (w_k + \cdots + w_n) f(x(k)) \leq$
$(w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))$,

$$0 < f(x(k)) \leq \frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n},$$

$$x(k)d_3 = g\left\{\frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n}\right\} \geq g(f(x(k))) = x(k),$$

所以 D_3 为弱化缓冲算子.

2) X 为单调衰减序列时, 因为 $x(k) \geq \cdots \geq x(n) \geq 0$, 得

$f(x(k)) \geq \cdots \geq f(x(n)) > 0$,

$0 < w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n)) \leq$
$(w_k + \cdots + w_n) f(x(k))$,

$$0 < \frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n} \leq f(x(k)),$$

$$x(k)d_3 = g\left\{\frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n}\right\} \leq g(f(x(k))) = x(k),$$

所以 D_3 为弱化缓冲算子.

3) 当 X 为振荡序列时, 令

$$x(k) = \max_{1\leq i\leq n} x(i),\ x(h) = \min_{1\leq i\leq n} x(i),$$

对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 有

$x(k) \geq x(i), \cdots, x(n);\ x(h) \leq x(i), \cdots, x(n);$

$f(x(k)) \geq f(x(i)), \cdots, f(x(n)) > 0;$

$0 < f(x(h)) \leq f(x(i)), \cdots, f(x(n));$

$0 < w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n)) \leq$
$(w_i + \cdots + w_n) f(x(k));$

$0 < (w_i + \cdots + w_n) f(x(h)) \leq$

$$w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n));$$

$$0 < \frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n} \le f(x(k));$$

$$x(i)d_3 = g\left\{\frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n}\right\} \le g(f(x(k))) = x(k);$$

$$0 < f(x(h)) \le \frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n};$$

$$x(i)d_3 = g\left\{\frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n}\right\} \ge g(f(x(h))) = x(h);$$

$$\max_{1\le i\le n} x(i) \ge \max_{1\le i\le n} x(i)d_3;$$

$$\min_{1\le i\le n} x(i) \le \min_{1\le i\le n} x(i)d_3;$$

故 D_3 为弱化缓冲算子.

同理可证当 f 为严格单调递减函数时, D_3 也为弱化缓冲算子. □

定理 3　设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 且 $x(i) > 0$, $f > 0$, $w_i > 0$. 权重向量为 $w = (w_1, \cdots, w_n)$, f 为严格单调递增(或递减) 函数, g 为其反函数. 其中

$$x(k)d_4 = g\{[f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}\}. \quad (4)$$

令 $XD_4 = (x(1)d_4, \cdots, x(n)d_4)$, 则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_4 为弱化缓冲算子.

证明　容易验证

$$x(n)d_4 = g\{[f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_n}}\} = x(n),$$

即 D_4 满足缓冲算子公理 1. 对缓冲算子公理 2 和公理 3 也成立, 因而 D_4 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数, 当:

1) X 为单调增长序列时, 因为 $0 < x(k) \le \cdots \le x(n)$, 得

$$0 < f(x(k)) \le \cdots \le f(x(n)),$$

$$0 < f(x(k)) \le [f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}},$$

$$0 < x(k) = g(f(x(k))) \le x(k)d_4 = g\{[f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}\},$$

所以 D_4 为弱化缓冲算子.

2) X 为单调衰减序列时, 因为 $x(k) \ge \cdots \ge x(n) \ge 0$, 得

$$f(x(k)) \ge \cdots \ge f(x(n)) > 0,$$

$$f(x(k)) \ge [f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}} > 0,$$

$$x(k) = g(f(x(k))) \ge g\{[f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}\} = x(k)d_4 > 0,$$

所以 D_4 为弱化缓冲算子.

3) 当 X 为振荡序列时, 令

$$x(k) = \max_{1\le i\le n} x(i),\ x(h) = \min_{1\le i\le n} x(i),$$

对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 有

$$x(k) \ge x(i), \cdots, x(n);\ x(h) \le x(i), \cdots, x(n);$$

$$f(x(k)) \ge f(x(i)), \cdots, f(x(n)) > 0;$$

$$0 < f(x(h)) \le f(x(i)), \cdots, f(x(n));$$

$$0 < [f^{w_i}(x(i)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i + \cdots + w_n}} \le f(x(k));$$

$$0 < x(i)d_4 = g\{[f^{w_i}(x(i)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i + \cdots + w_n}}\} \le g(f(x(k))) = x(k);$$

$$[f^{w_i}(x(i)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i + \cdots + w_n}}\} \ge g(f(x(h))) = x(h) > 0;$$

$$\max_{1\le i\le n} x(i) \ge \max_{1\le i\le n} x(i)d_4;$$

$$\min_{1\le i\le n} x(i) \le \min_{1\le i\le n} x(i)d_4;$$

故 D_4 为弱化缓冲算子.

同理可证, 当 f 为严格单调递减函数时, D_4 也为弱化缓冲算子. □

当 $f(x) = g(x) = x$ 时, 弱化缓冲算子 D_3 和 D_4 分别为文献[5]中的弱化缓冲算子 D_1 和 D_2, 即弱化缓冲算子 D_1 和 D_2 为本文的特例. 文献[5]中的算例已表明, 弱化缓冲算子 D_3 和 D_4 具有一定的实用价值.

4　实例分析

以上海市国际互联网用户数为例[11], 验证本文构造的弱化缓冲算子在 GM(1,1) 模型预测中的应用. 选取该市 2001 ～ 2007 年国际互联网用户数(单位:万户) 作为原始数据, 有

$$X = (310, 420, 432, 633, 803, 957, 1080).$$

从原始数据可以发现, 上海市上网用户数增长势头很猛, 年平均增长率为 19.52 %, 如此高的增长率不可能一直保持下去, 因此直接用原始数据建模, 预测结果令人难以相信. 笔者经过分析认为, 上海市上网用户数猛增与 Internet 的刚刚兴起, 以及政府的大力推广等因素有关, 因此要进行若干年后上网用户数的预测, 必须弱化其增长趋势. 即将上述政策因素附加到过去的年份中, 从而消除前期政策因素对后期上网用户数增加速度的影响, 使得模型预测精度更高, 预测结果与实际情况相符合.

以 2001 ～ 2006 年数据作为建模数据, 以 2007 年数据为模拟检验数据. 为了方便, 令 $f(x) = x^2$, 权重为等权重, 利用 D_3 和 D_4 对原始序列进行一阶

缓冲算子的作用,分别得到一阶缓冲序列如下:

XD_3 =

(635.15,681.82,732.80,808.57,883.36,957),

XD_4 =

(548.94,615.39,677.06,786.46,876.62,957).

通过计算得到平均相对误差和一步预测误差的比较结果,如表 1 所示.

表 1 弱化前后模型的平均相对误差和一步预测精度比较

模型	弱化缓冲算子	平均相对误差 / %	一步预测误差 / %
1	无	5.732	11.947
2	XD_3	0.478	3.259
3	XD_4	1.268	0.162

由表 1 可以看出,对原始序列经过缓冲算子 D_4 作用后,一步预测精度最低,其预测模型为

$$\hat{x}(2001 + t) = 5173.731 \times e^{0.112\,535t} - 4624.7955.$$

2007 年上海市互联网用户数的预测值为 1081.747 万户,与实际值基本吻合.

5 结 论

在缓冲算子的构造过程中,以前都是单独构造.本文首次将缓冲算子的构造与函数联系起来,一次构造一大类缓冲算子.为解决扰动数据序列的建模提供了多种选择,开辟了如何利用函数来构造缓冲算子的新方向.

参考文献(References)

[1] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27.
(Liu S F. The trap in the prediction of a shock disturbed system and the buffer operator[J]. J of Huazhong University of Science and Technology, 1997, 25(1): 25-27.)

[2] 党耀国, 刘思峰, 米传民. 强化缓冲算子性质的研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(7): 730-734.
(Dang Y G, Liu S F, Mi C M. Study on characteristics of the strengthening buffer operators[J]. Control and Decision, 2007, 22(7): 730-734.)

[3] 关叶青, 刘思峰. 基于不动点的强化缓冲算子序列及其应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(10): 1189-1192.
(Guan Y Q, Liu S F. Sequence of strengthening buffer operator and it's application based on fixed point[J]. Control and Decision, 2007, 22(10): 1189-1192.)

[4] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
(Deng J L. Grey theoretical foundation[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.)

[5] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Study on the weakening buffer operators and researches[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(2): 108-111.)

[6] 党耀国, 刘斌, 关叶青. 关于强化缓冲算子的研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(12): 1332-1336.
(Dang Y G, Liu B, Guan Y Q. Study on the strengthening buffer operators[J]. Control and Decision, 2007, 20(12): 1332-1336.)

[7] Liu S F. The three axioms of buffer operator and their application[J]. The J of Grey System, 1991, 3(1): 39-48.

[8] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004.)

[9] 刘思峰. 缓冲算子及其应用[J]. 灰色系统理论与实践, 1992, 2(1): 45-50.
(Liu S F. Buffer operator and it's application[J]. Theories and Practices of Grey System, 1992, 2(1): 45-50.)

[10] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey systems: Foundations, methodology and applications[M]. Slippry Rock: IIGSS Academic Publisher. 1998.

[11] 上海统计局. 上海统计年鉴[M]. 上海: 上海统计出版社, 2008.
(The Shanghai Statistics Bureau. Shanghai statistics yearbook[M]. Shanghai: Shanghai Statistics Publishing House, 2008.)

(上接第 1054 页)

[16] Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay[J]. Automatica, 2004, 40: 65-72.

[17] Mahmoud M S. Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays[J]. IEEE Trans on Automatica, 2000, 36(4): 627-635.

[18] Peng C, Yue D. Maximum allowable equivalent delay bound of networked control systems[C]. Proc of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, 2006: 4547-4550.