第 24 卷 第 7 期 控 制 与 决 策 2009 年 7 月
Vol. 24 No. 7 Control and Decision Jul. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)07-1092-05

GM(1,1)模型拓广方法研究与应用

曾祥艳[1], 肖新平[2]
(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004; 2. 武汉理工大学 理学院, 武汉 430063)

摘 要: 为了拓广 GM(1,1)模型的适用范围,对 GM(1,1)模型进行了两方面的改进:对初始序列进行预处理以改善其光滑性;用 GM(1,1)模型的内涵型代替白化响应式作为新的预测公式. 理论分析与实验结果表明,改进模型不仅比传统模型的预测精度高,而且完全适用于对高增长序列建模,拓广了 GM(1,1)模型的适用范围.

关键词: GM(1,1)模型; 累积法; 数据变换; 内涵型; 白化响应式
中图分类号: N941.5 **文献标识码**: A

Study on generalization for GM(1,1) model and its application

ZENG Xiang-yan[1], XIAO Xin-ping[2]
(1. College of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 2. College of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China. Correspondent: ZENG Xiang-yan, E-mail: zengxyhbyc@163.com)

Abstract: In order to extend the applicable range of GM(1,1) model, two aspects of GM(1,1) model are improved, which are pre-processing the primary sequence to enhance its smoothness and substituting connotation type for white response of GM(1,1) model to calculate predicted values. The analytical results indicate that the improved model has much higher precise than the traditional one and is extremely applicable to the high-growth series, thus the applicable range is widened greatly.

Key words: GM(1,1) model; Accumulating method; Data transformation; Connotation type; White response

1 引 言

GM(1,1)模型是灰色系统理论中应用最广泛的模型,已成功地解决了许多实际问题. 然而,在实践中发现,当原始数据为高增长序列或者数据变化急剧时,此模型的拟合或预测效果会出现很大偏差,甚至完全失效,严重影响了实际预测控制效果的准确性和可靠性,也限制了模型的适用范围. 因此如何解决该问题,便成为改进模型的一个重要方面. 本文作者在文献[1]中,将传统 GM(1,1)模型的参数估计方法:最小二乘法,改为累积法,提出了累积法 GM(1,1)模型,并且进一步处理了模型的病态性问题,弥补了最小二乘法的不足. 但是模型的预测精度和适用范围并没有得到显著提高,这是因为参数估计方法的改进并没有影响原模型的建模机理. 通过分析 GM(1,1)模型的建模机理,发现两个问题:1) 灰色预测模型从本质上可认为是指数预测模型,其预测精度与被预测对象的递变规律以及数据序列的光滑度有关;2) 其用来计算拟合与预测值的白化响应式是 GM(1,1)模型的白化模型的解,并不是由 GM(1,1)模型的定义型推导出来的,而是借用的近似解,这样当发展系数较低时,误差较小;而当发展系数较高,即原始序列的数据变化急剧时,则误差偏大.

本文针对以上两个问题,主要讨论了两种改进方法,并将这两种方法相结合同时对 GM(1,1)模型进行改进.

2 累积法 GM(1,1)模型

首先介绍累积法 GM(1,1)模型的建模过程:设原始序列 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\}$,其一次累加生成序列为 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)\}$,其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$. 构造背景值序列

$$z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)).$$

收稿日期: 2008-07-31; **修回日期**: 2008-12-07.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70471019).
作者简介: 曾祥艳(1978—),女,湖北宜昌人,讲师,硕士,从事系统优化与控制的研究; 肖新平(1964—),男,湖北洪湖人,教授,博士生导师,从事系统优化与控制的研究.

GM(1,1) 模型的定义型为灰微分方程

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b. \tag{1}$$

GM(1,1) 模型参数估计的传统方法是最小二乘法,累积法 GM(1,1) 模型是将参数估计方法改进为累积法. 先对灰微分方程(1) 两边施加累积算子,假设累积算子的最高阶数为 r, 因为模型参数有 2 个,所以 r 一定不小于 2. 实践中一般可取 $r = 2$.

$$\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)} x^{(0)}(k) + a\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)} z^{(1)}(k) = b\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)},$$

$$\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)} x^{(0)}(k) + a\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)} z^{(1)}(k) = b\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}.$$

如果记

$$X_r = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{N}{}^{(1)} z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{N}{}^{(1)} \\ \sum_{k=2}^{N}{}^{(2)} z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{N}{}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$Y_r = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^{N}{}^{(1)} x^{(0)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{N}{}^{(2)} x^{(0)}(k) \end{bmatrix},\quad \bar{a} = (a,b)^{T},$$

则方程可以写成矩阵形式 $X_r\bar{a} = Y_r$, 并得到新的参数估计式

$$\bar{a} = X_r^{-1} Y_r. \tag{2}$$

这是运用累积法对 GM(1,1) 模型参数 a 和 b 的估计过程,其中 a 称为发展系数,其大小反映了原始序列 $X^{(0)}$ 的增长速度. 由文献[2] 知,用累积法对参数进行估计弥补了最小二乘法的不足,而且病态性也得到了解决.

由 GM(1,1) 的白化模型 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 和初始条件 $x^{(0)}(1)$, 得到 $X^{(0)}$ 的预测值计算公式,即白化响应式

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^{a})\left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right]e^{-ak}. \tag{3}$$

3　建模方法的改进

累积法 GM(1,1) 模型的预测精度和适用范围并没有得到显著提高,这是因为参数估计方法的改进并没有影响传统模型的建模机理.

对于传统 GM(1,1) 模型,文献[3] 以指数序列模拟为基础,按照发展系数阈值,明确界定了传统模型的有效区、慎用区、不宜区和禁区. 同时指出:当发展系数 $-a > 1$ 时,不宜采用 GM(1,1) 模型,也就是表明传统模型并不适用于对高增长型序列建模. 为了使其适用于高增长序列,应扩大 GM(1,1) 模型的适用范围. 本文将从两方面对其进行改进.

3.1　幂函数变换法

文献[4,5] 指出"原始数据作累加处理后使其呈现明显的指数规律"是灰色系统理论建模的基础,建立 GM(1,1) 模型的条件是原始数据序列为光滑离散函数,即准光滑序列. 实例也表明此条件对建立灰色模型是十分重要的. 对于杂乱无章的数据序列(不是准光滑序列) 建立模型有时会出现很大的误差,而研究发现,增加数据的光滑性可提高预测精度. 文献[6,7] 根据光滑离散函数的主要条件提出了改进光滑度的对数变换 $\ln x$ 和幂函数变换 $x^{1/p}$;[8] 提出了对数 - 幂函数变换 $(\ln x)^{1/p}$, 并指出它比对数变换和幂函数变换效果更好;[9,10] 则在更为一般的基础上,提出了改进光滑度的变换函数的构造条件,给出了寻找提高原始数据序列光滑度的变换途径,并在此基础上提出了更多的变换方法. 但[11] 中指出,满足光滑性条件的序列未必有高的精度,光滑性条件仅仅是可以保证建模精度高的一个部分充分条件,并非充要条件. [12] 指出:除了原始序列的光滑度,级比偏差也是一个影响模型预测精度的重要方面. 级比偏差的定义如下:

定义 1　设非负序列为 $x = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, 则称 $\sigma(k) = \frac{x(k-1)}{x(k)}$ 为序列 x 的级比, $k = 2,3,\cdots,n$; 称 $\delta(k) = |1 - \sigma(k)| = \left|1 - \frac{x(k-1)}{x(k)}\right|$ 为序列 x 的级比偏差.

级比偏差 $\delta(k)$ 刻画了序列 x 的各点的级比接近 1 的程度. 为了获得精度高的 GM(1,1) 模型,级比需要限制在靠近 1 的子区间 $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ 中, ε 是指定的足够小的实数. 级比偏差 $\delta(k)$ 越接近于零,则序列建模的精度越高. 文献[13] 分析得出幂函数变换法既能够提高序列的光滑性,又能够使级比偏差趋于 0. 所以,本文采用幂函数变换法对原始数据 $x^{(0)}(k)$ 先进行幂函数变换得到 $\{[x^{(0)}(k)]^{1/h}\}$, 提高序列的光滑度后,再对新的序列建模.

灰色 GM(1,1) 模型属于指数模型,原始序列若不满足灰指数律,则要经过累加生成指数律后建模,指数律越明显则预测精度越高. 这是灰色系统建模的理论基础. 一般的非负准光滑序列经过累加生成后,都会减少随机性,呈现出近似的指数增长规律. 原始序列越光滑,生成后指数规律也越明显[14].

灰指数律的定义如下[14]:

定义 2　设非负序列 $x = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, 若:

1) 级比 $\sigma(k) \in [a,b] \subset [0,1]$, 则称 x 具有正灰指数律,或者增长灰指数律;

2) 级比 $\sigma(k) \in [a,b]$, $a \geq 1$,则称 x 具有负灰指数律,或者衰减灰指数律;

3) 级比 $\sigma(k) \in [a,b]$, $b - a = \delta$,则称 x 具有绝对灰度为 δ 的灰指数律;

4) $\delta < 0.5$ 时,称 x 具有准指数律.

原始序列经过累加生成后必须具有准指数律才适合建立灰色模型. 绝对灰度 δ 越小,则说明数据的指数规律越明显,从而建模精度越高. 事实上,经济系统、生态系统、农业系统等均可视为广义的能量系统,而能量的积存与释放一般具有指数规律,因此灰色系统理论的指数模型具有十分广泛的适应性.

按定义,原始序列 $X^{(0)}$ 的一次累加生成序列 $X^{(1)}$ 的级比为

$$\sigma^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k-1)}{x^{(1)}(k)} = \frac{x^{(1)}(k-1)}{x^{(1)}(k-1) + x^{(0)}(k)} = \frac{1}{1 + \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}} = \frac{1}{1 + \rho^{(0)}(k)},$$

其中 $\rho^{(0)}(k) = \dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$ 为原始序列的光滑比. 由文献[7],对原始序列采用幂函数变换法进行数据处理后,光滑比减小,则新序列的累加生成序列的级比将更接近于 1,所以绝对灰度 δ 将减小,即灰指数律越明显,从而可以提高模型的预测精度.

3.2 预测公式的改进

文献[14]已指出"实质上 GM(1,1) 模型的白化模型及其白化响应式,均不属于灰模型的范畴,而是借用的". 不仅如此,当用白化响应式(3) 进行预测时,式中的参数 a 和 b 却是由 GM(1,1) 模型的定义型(1) 通过累积法估计得到的. 文献[15]深入分析了 GM(1,1) 模型的白化响应式(3) 和定义型(1) 中所含的参数 a 和 b 的关系,得出这两种形式下的参数是有差异的,所以先用定义型(1) 估计参数 a 和 b,再将其代入白化响应式(3) 中进行拟合与预测值计算,显然只是借用的近似解.

实际上,文献[14]指出:由 GM(1,1) 模型的定义型(1) 可直接推导出模型的内涵型 GM(1,1),即

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \left(\frac{1-0.5a}{1+0.5a}\right)^{k-2} \frac{b - ax^{(0)}(1)}{1+0.5a}. \tag{4}$$

而且,当用累积法得到模型参数的估计值后,内涵型式(4) 显然可以直接作为模型的预测公式计算预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1,2,\cdots,n$.

由于 GM(1,1) 模型的内涵型是由 GM(1,1) 模型的定义型直接推导而来的,所以它才是 GM(1,1) 模型的真实解. 文献[16]对 GM(1,1) 模型的白化响应式和内涵型分别进行了泰勒级数展开和纯指数序列拟合,得出白化响应式和内涵型解是有差别的,而且其差值与发展系数 a 的取值有关. 当 $|a|$ 很小时,误差很小,两个解可以相互取代;当 $|a|$ 增大时,两者间的误差也变大,如果此时依然用白化响应式作为 GM(1,1) 模型的解,则预测精度较低,甚至会出现"指数关系的悖论". 而且经过纯指数序列拟合,得出白化响应式是有偏差的拟合公式,而内涵型则是精确的.

从以上分析可以得出,用模型的内涵型(4) 代替白化响应式(3),作为模型的预测公式,将会提高 GM(1,1) 模型的精度和适用范围,使模型适用于高增长序列.

3.3 改进模型的建模步骤

下面给出本文改进后的累积法 GM(1,1) 模型的建模步骤:

Step1: 对原始序列 $x^{(k)}(k)$ 进行幂函数变换得到新序列 $\{[x^{(0)}(k)]^{1/h}\}$, $k = 1,2,\cdots,n$,再对新序列建模,计算其一次累加生成序列与背景值序列.

Step2: 用累积法对 GM(1,1) 模型参数 a 和 b 进行估计. 将参数 a 和 b 的估计值代入模型的内涵型(4),计算得到新序列的拟合值 $\{[\hat{x}^{(0)}(k)]^{1/h}\}$.

Step3: 还原序列得到原始序列的拟合值 $\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1,2,\cdots,n$.

Step4: 计算序列中各原始数据与其拟合值的相对误差百分数 $e(k) = \dfrac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}$,并计算 $|e(k)|$ 的平均值 $|e| = \sum_{k=1}^{n} |e(k)|/n$.

4 实例分析

例 1(低增长序列且较光滑、无跳跃性) 1999～2004 年中国国内旅游的统计人数分别为: 7.19, 7.44, 7.84, 8.78, 8.7, 11.02(单位: 亿人次)[13]. 因 2003 年受到 SARS 的突发性影响,国内旅游人数出现波动,在对国内旅游人数进行预测时,不适宜使用,故需要对 2003 年的数据进行处理. 用 2002 年的数据与 2004 年的数据加权平均,得到 $(8.78 + 11.02)/2 = 9.9$,即修改后的 2003 年的国内旅游人数为 9.9 亿人次. 于是原始序列为

$$x^{(0)} = \{7.19, 7.44, 7.84, 8.78, 9.9, 11.02\}.$$

建立改进模型时,幂函数变换中的 h 均取 2,相应结果如表 1 所示.

用传统模型预测 2005 年的国内旅游人数为 12.1037 亿人次,2006 年的国内旅游人数为 13.4589 亿人次,用改进的模型预测,2005 年的国内旅游人数为 12.1136 亿人次,2006 年的国内旅游人数为 13.4242 亿人次,而实际值为 13.8 亿人次. 可以看

表 1　传统模型与改进模型的计算结果对比

年份	原始数据	传统 GM(1,1) 模型		改进模型	
		拟合值	相对误差 / %	拟合值	相对误差 / %
1999	7.19	7.19	0	7.19	0
2000	7.44	7.2188	2.9730	7.4278	0.1640
2001	7.84	8.0096	-2.1626	7.9019	-0.7895
2002	8.78	8.8869	-1.2174	8.8109	-0.3519
2003	9.90	9.8603	0.4005	9.8639	0.3700
2004	11.02	10.9404	0.7221	10.9810	0.3539
平均误差 / %		1.2469		0.3382	

出:两种方法的拟合与预测结果误差相差不大. 这是因为此初始序列为低增长序列,而且数据变化较平缓,光滑性较好.

例 2(低增长序列且具有一定的跳跃性)　疾病流行趋势既有已知信息,也有未知或未确定信息,它是一个灰色系统. 本例根据灰色系统理论原理,不去研究影响我国狂犬病发病人数的各种内部因素及相互关系,而从年发病人数这个综合灰色量本身去挖掘有用信息, 利用它的动态记忆特性, 建立灰色 GM(1,1) 模型,用于我国狂犬病发病人数的预测. 表 2 是我国 1990 ～ 2003 年狂犬病发病人数[12].

表 2　全国 1990 ～ 2003 年狂犬病发病人数表

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
人数	3520	2104	1034	500	302	194	159
年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
人数	222	229	343	495	891	1191	2037

从表 2 中可以看出,从 1990 年开始,我国狂犬病发病人数逐年回落,但是自 1997 年起发病人数又呈迅猛上升趋势,分析后认为产生该现象的原因是:1) 近年来经济发展迅速,宠物犬及肉食犬的数量剧增;2) 人们的疾病预防意识淡薄;3) 对犬类的管理不善. 以 1996 ～ 2001 年的数据来建立灰色模型,并预测 2002 和 2003 年的发病人数. 初始序列为

$$x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(6)\} = \{159, 222, 229, 343, 495, 891\}.$$

传统 GM(1,1) 模型的建模结果误差较大,因此采用 GM(1,1) 残差修正模型,与本文改进后的模型的建模结果进行比较,见表 3.

从表 3 可以看出,改进后的模型较残差修正模型的精度高,通过后验差检验 $c = 0.1948 < 0.35$, $p = 1$,预测精度等级为好. 此初始序列光滑性较差,具有跳跃性,对初始值进行幂函数变换,可增强其光滑性,从而提高了建模精度. 改进模型的预测值与原始值的变化趋势更接近. 从模型预测的总体趋势而言,我国狂犬病发病人数呈逐年上升趋势.

表 3　建模结果及误差对比

年份	原始数据	残差修正模型		改进模型	
		拟合与预测值	相对误差 / %	拟合与预测值	相对误差 / %
1996	159	159	0	159	0
1997	222	136.488	38.519	162.063	27.00
1998	229	208.640	8.891	244.349	-6.700
1999	343	321.436	3.371	368.413	-7.411
2000	495	491.526	0.703	555.470	-12.216
2001	891	785.428	11.825	837.501	6.004
2002	1191	1142.731	4.053	1262.729	-6.023
2003	2037	1757.790	13.314	1903.865	6.536
平均误差 / %		11.382		8.986	

例 3 (高增长序列)　下面是一个高增长实测数据列[17] $x^{(0)} = \{2.718, 7.389, 20.086, 54.598, 148.41, 403.43, 1096.6\}$. 文献[17]得出由此数据建立的传统模型误差很大,精度较低. 建立 GM(1,1) 残差修正模型,同时与本文的改进模型进行比较,计算结果见表 4.

表 4　残差修正模型与改进模型的计算结果对比

序号	原始数据	残差修正模型		改进模型	
		拟合值	相对误差 / %	拟合值	相对误差 / %
1	2.718	2.718	0	2.718	0
2	7.389	6.5385	11.52	7.3892	-0.0027
3	20.086	22.1172	-10.11	20.0835	-0.0124
4	54.598	57.3507	-5.001	54.5985	0.00091
5	148.41	149.0580	0.451	148.4129	0.00195
6	403.43	388.3532	3.737	403.4246	0.00133
7	1096.6	1014.3735	7.402	1096.6098	0.00089
平均误差 / %		6.3701		0.0029	

此例的结果验证了改进后模型完全适用于对高增长序列建模,并且精度相当高,这就进一步扩大了 GM(1,1) 模型的适用范围.

5　结　　论

幂函数变换改善了原始数据的光滑性,用 GM(1,1) 模型的内涵型代替白化响应式来计算预测值,增强了模型的稳定性,本文结合这两种方法改进了累积法 GM(1,1) 模型. 改进模型不仅适用于低增长序列,也适用于高增长型序列. 当原始数据具有一定的跳跃性,光滑性不好时,改进模型较传统模型有更好的预测效果;对于高增长序列,改进模型完全适用,而且精度相当高,大大改善了 GM(1,1) 模型的适用范围.

参考文献(References)

[1] Zeng X Y, Xiao X P. A research on morbidity problem in accumulating method GM (1, 1) model [C]. ICML C2005. Gugangzhou, 2005: 2650-2655.

[2] 曹定爱, 张顺明. 累积法引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 54-60.
(Cao D A, Zhang S M. Introduction to accumulating method[M]. Beijing: Science Press, 1999: 54-60.)

[3] 刘思峰, 邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 5(5): 121-124.
(Liu S F, Deng J L. The range suitable for GM(1,1) [J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2000, 5(5): 121-124.)

[4] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1987.
(Deng J L. Grey control system [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1987.)

[5] 邓聚龙. 灰色系统理论的 GM 模型[J]. 模糊数学, 1985, 4(2): 23-32.
(Deng J L. GM model of grey system theory[J]. J of Fuzzy Mathematics, 1985, 4(2): 23-32.)

[6] 陈涛捷. 灰色预测模型的一种推广[J]. 系统工程, 1990, 8(4): 52-55.
(Chen T J. A new development of grey forecasting model[J]. J of Systems Engineering, 1990, 8(4): 52-55.)

[7] 于德江. 灰色系统建模方法的探讨[J]. 系统工程, 1991, 9(5): 9-12.
(Yu D J. A discussion about modelling of grey systems [J]. J of Systems Engineering, 1991, 9(5): 9-12.)

[8] 王建根, 李春生. 灰色预测模型的一个注记[J]. 系统工程, 1996, 14(4): 14-15.
(Wang J G, Li C S. A note on the theory of gray system forecasting model[J]. J of Systems Engineering, 1996, 14(4): 14-15.)

[9] 何斌, 蒙清. 灰色预测模型拓广方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 9(9): 137-140.
(He B, Meng Q. Study on generalization for grey forecasting model [J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2002, 9(9): 137-140.)

[10] 李翠凤, 戴文战. 基于函数 cot x 变换的灰色建模方法[J]. 系统工程, 2005, 23(3): 110-114.
(Li C F, Dai W Z. An approach of the grey modelling based on cot x transformation [J]. Systems Engineering, 2005, 23(3): 110-114.)

[11] 王子亮. 灰色建模技术理论[D]. 武汉: 华中理工大学, 1998.
(Wang Z L. Grey modeling technology theory [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 1998.)

[12] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 60-61.
(Deng J L. Grey forecasting and grey decision [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 60-61.)

[13] 李福琴, 刘建国. 数据变换提高灰色预测模型精度的研究[J]. 统计与决策, 2008, 6(6): 15-17.
(Li F Q, Liu J G. Study on the improvement of grey forecasting model by data transformation[J]. Statistics and Decision, 2008, 6(6): 15-17.)

[14] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 210-252.
(Deng J L. Basis of grey theory [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 210-252.)

[15] Zhang X X, Xiao X P. Study on the connotation of parameters in GM(1,1) model[J]. J of Grey System, 2006, 18(3): 26-213.

[16] 李福琴. 灰色模型的稳定性和建模精度研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2005.
(Li F Q. Study on the stability and the modeling precision of grey model [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2005.)

[17] 谭冠军. GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用(Ⅰ) [J]. 系统工程理论与实践, 2000, 4(4): 98-103.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model (Ⅰ) [J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2000, 4(4): 98-103.)