

文章编号: 1001-0920(2009)07-0979-06

## 力矩受限的机器人吸引域估计方法

彭文东, 苏剑波

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

**摘要:** 针对力矩受限的机器人组合非线性反馈控制的局部稳定区域描述问题, 研究了吸引域的估计方法. 利用不变集属性和椭球性质, 定义两种不同意义的最大椭球不变集来逼近吸引域, 分别采用设置初始状态法和参考形状集法求解. 通过带有约束的优化问题描述, 所有条件均能转化为线性矩阵不等式条件, 易于求解. 由于采用优化技术, 能够减小吸引域估计的保守性. 数值算例验证了所提方法的有效性.

**关键词:** 机器人; 有界力矩; 组合非线性反馈; 吸引域; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP24      **文献标识码:** A

### Estimation methods of domain of attraction for robot with bounded torques

PENG Wengdong, SU Jianbo

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China. Correspondent: PENG Wengdong, E-mail: pengwendong@sjtu.edu.cn)

**Abstract:** To formulate the problem concerned with local stable region description of composite nonlinear feedback control for robot manipulators with bounded torques, the estimation methods of domain of attraction are studied. By using the properties of set invariance and ellipsoid, two different maximum ellipsoid invariant sets are defined as the estimation of domain of attraction, so the methods of setting initial state and reference shape set are introduced. Through the description for the constrained optimization problem, all conditions can be expressed in LMI conditions and conveniently solved. Owing to the utilization of optimization technique, both methods can reduce the conservatism of estimation. Simulation examples testify the effectiveness of the suggested methods.

**Key words:** Robot; Bounded torques; Composite nonlinear feedback; Domain of attraction; Linear matrix inequality

### 1 引言

驱动器饱和是机器人系统普遍存在的非线性因素. 由于存在物理限制, 机器人系统难以获得全局稳定, 通常只具有局部稳定. 如何尽可能大地估计吸引域得到不太保守的稳定区域, 是一个重要的研究问题. 对于受限线性系统, 已有一系列的方法<sup>[1-3]</sup>用于估计吸引域. 文献[1]将饱和因素作为局部扇形有界非线性, 应用绝对稳定性判据(如圆判据和 Popov 判据)估计吸引域. 但仅仅将饱和和非线性当作扇形有界非线性处理, 过于保守. 文献[2, 3]依据饱和和非线性的具体特性, 引入辅助反馈矩阵, 扩大吸引域的估计范围.

尽管受限线性系统的吸引域估计已取得一些较

好成果, 但对于受限非线性系统, 尤其是机器人系统, 却鲜有解决方案. 当驱动器受限时, 基于计算力矩的模糊自调整控制<sup>[4]</sup>和扇形模糊控制<sup>[5]</sup>具有局部稳定性, 但却无法确切地计算吸引域的大小. 而最近开发的基于计算力矩的组合非线性反馈控制, 通过内嵌饱和函数, 引入组合非线性反馈技术<sup>[6-8]</sup>, 确保系统在驱动器受限时的稳定性. 闭环系统的动态响应快速且没有超调, 同时也为吸引域的估计引入了新的解决方案. 该方法利用椭球不变集估计吸引域, 但对如何计算不太保守的估计, 还未阐述.

本文针对力矩受限的机器人组合非线性反馈控制的稳定区域描述问题, 研究利用不变集理论和优化技术扩大吸引域的估计. 通过分析影响不变集的

收稿日期: 2008-08-14; 修回日期: 2008-10-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60675041); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-06-0398).

作者简介: 彭文东(1976—), 男, 辽宁营口人, 博士生, 从事机器人控制研究; 苏剑波(1969—), 男, 江苏靖江人, 教授, 博士生导师, 从事仿人机器人、网络机器人等研究.

两个限制因素,即线性域和反馈线性化后的饱和函数幅值,提出两种不同的吸引域评估方法(设置初始状态法和参考形状集法),估计吸引域.

### 2 背景知识

$n$ 个连杆的刚体机器人动力学模型<sup>[9]</sup>为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1)$$

其中: $q \in R^n$ 是关节位置, $\dot{q} \in R^n$ 是关节速度, $\ddot{q} \in R^n$ 是关节加速度, $M(q) \in R^{n \times n}$ 是惯性矩阵, $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ 是离心力/哥氏力矩阵, $G(q) \in R^n$ 是重力向量, $\tau \in R^n$ 是驱动力矩.在实际中,驱动器的驱动力矩是有限的,即

$$|\tau_i| \leq \tau_{i, \max}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

其中 $\tau_i$ 是 $\tau$ 的第 $i$ 个元素.

对于给定参考输入 $q_d \in R^n$ ,假设其一阶、二阶时间导数 $\dot{q}_d$ 和 $\ddot{q}_d$ 连续且有界,控制目标为使机器人关节角渐近跟踪期望参考输入

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d(t). \quad (3)$$

结合机器人非线性动力学和组合非线性反馈技术<sup>[6-8]</sup>,力矩受限的机器人组合非线性反馈控制器为

$$\begin{aligned} &= \text{sat} [ M(q) \text{sat}_h(\ddot{q}_d - K_P \tilde{q} - K_D \dot{\tilde{q}} - \\ & (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) B^T P \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} ) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) ]. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\tilde{q} = q - q_d, \dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d$ 分别为位置误差和速度误差;比例矩阵 $K_P$ 和微分矩阵 $K_D$ 为 $n$ 阶对称正定矩阵; $B = [0, I]^T, 0$ 和 $I$ 分别是相应维数的零阵和单位阵;非线性项 $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}, f_i = f_i(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为非负定函数且在 $\tilde{q}$ 和 $\dot{\tilde{q}}$ 满足局部Lipchitz条件; $\text{sat}(u) \in R^n \rightarrow R^n$ 为饱和非线性函数

$$\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1) \quad \text{sat}(u_2) \quad \dots \quad \text{sat}(u_n)]^T. \quad (5)$$

式中: $\text{sat}(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{ |u_i|, u_{i, \max} \}, u_{i, \max}$ 为第 $i$ 个输入通道的最大幅值.给定正定矩阵 $Q \in R^{2n \times 2n}, P > 0$ 为下述Lyapunov方程的解:

$$A^T P + PA = -Q, \quad (6)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ -K_P & -K_D \end{bmatrix}.$$

合并控制器(4)和机器人动力学(1),产生的闭环系统为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q = \dot{q}, \\ \frac{d}{dt} \dot{q} = M^{-1}(q) [ \text{sat}(M(q) \text{sat}_h(\ddot{q}_d - K_P \tilde{q} - K_D \dot{\tilde{q}} - (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) B^T P \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} ) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) ]. \end{cases} \quad (7)$$

当满足如下条件:

1) 对于期望参考输入轨迹 $q_d$ 和 $\begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \ddot{q}_d \end{bmatrix} \in L_V(c_1)$

$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c_1)$ 的任意状态 $(q, \dot{q})$ ,存在 $h_i > 0$ 和 $c_i > 0$ ,有

$$\begin{aligned} & |M_{ij}(q)| h_i + |C_i(q, \dot{q})\dot{q} + G_i(q)| \leq c_i, \\ & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\sup_{\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c_1)} |M_{ij}(q)| \leq c_{ij}, \quad (9)$$

$$\sup_{\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c_1)} |C_i(q, \dot{q})\dot{q} + G_i(q)| \leq c_i. \quad (10)$$

2) 存在 $0 < c < c_1$ 和 $\delta \in (0, 1)$ ,使

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c) \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c) \mid \left| F_i \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \right| \leq (1 - \delta) h_i, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

3) 初始状态 $\begin{bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{bmatrix}$ 和参考输入 $q_d$ 满足

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_d(0) \\ \dot{q}_d(0) \end{bmatrix} \in L_V(c), \\ & |\ddot{q}_d| \leq h_{i, \max}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

闭环系统(7)在包含于吸引域内的不变水平集 $L_V(c)$ 内渐近稳定.即对于任意参考输入 $q_d$ 和满足

$\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in L_V(c)$ 的初始状态 $(q(0), \dot{q}(0))$ ,起始于 $(q(0), \dot{q}(0))$ 的轨迹将收敛到 $(q_d(t), \dot{q}_d(t))$ .

对于 $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in R^{2n}$ ,闭环系统(7)的状态轨迹为 $(t, \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix})$ ,则包含原点的吸引域为

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \left( t, \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}. \quad (13)$$

本文研究的主要目标为估算闭环系统的稳定区域,尽可能大地估计系统的吸引域  $R$ ,提高机器人系统跟踪高幅值参考输入的能力. 由于满足集合不变条件的椭球不变集  $L_V(c)$  有无数个,需选取“最大”的椭球作为吸引域的估计.

### 3 吸引域估计

组合非线性反馈控制的关键是引入高增益项. 对于饱和线性系统,高增益项的引入不会缩减低增益线性反馈的吸引域范围,而且通过增加非线性参数  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  来取得更好的闭环性能. 若无饱和函数  $\text{sat}_h$ ,增加高增益参数将会使驱动器饱和,阻止驱动器正常工作. 但是嵌入饱和函数  $\text{sat}_h$ ,驱动电机则工作在正常的线性区域  $L_V(c_1)$ . 因此,不变水平集  $L_V(c)$  受两个因素制约:线性域和反馈线性化后的饱和函数幅值. 从这两个因素出发,定义不同的“最大”椭球,引入设置初始状态法和参考形状集法以获得不太保守的估计.

#### 3.1 设置初始状态法

该方法的思想是预先确定线性域的“最大”椭球  $L_V(c_1)$ ，“最大”的含义为包含初始条件的变化范围最大. 相对而言,在它内部的水平不变集  $L_V(c)$  就会最大. 然后,利用椭球性质将初始状态放置在短半轴上,使短轴长度最大. 可由下述带有限制的优化问题描述:

$$\begin{aligned} & \min_{\max} ; \\ & \text{s. t. } 1) A^T P + PA = -Q, \\ & \quad 2) \min = a, \\ & \quad 3) \max = b, \\ & \quad 4) P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中:  $\min$  和  $\max$  是  $P$  的最小和最大特征值且有  $0 < a < b$ . 条件 1) 说明闭环系统(7) 满足 Lyapunov 稳定条件;条件 2) 和 3) 分别设定椭球最长半轴和最短半轴值;条件 4) 将初始位置放置在短半轴上.

为解决该优化问题,需将上述条件转化为凸优化问题,利用 LMI 求解. 条件 2) 和 3) 可转化为

$$\begin{aligned} \min = a & \Rightarrow P \preceq aI, \\ \max = b & \Rightarrow P \preceq bI. \end{aligned} \quad (15)$$

条件  $P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix}$  为等式约束,而 LMI 不能处理等式约束条件. 为将条件 4) 转化为 LMI 条

件,作如下变换<sup>[10]</sup>:

$$\begin{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \\ P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times I, \quad (16)$$

转化为

$$\begin{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \\ - I \\ \begin{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \\ \max \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times I \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (17)$$

当  $\epsilon > 0$  且在一定范围内,上述转换近似等价. 因此,式(14) 表示为

$$\begin{aligned} & \min_{\max} ; \\ & \text{s. t. } 1) A^T P + PA \preceq -Q, \\ & \quad 2) P \preceq aI, \\ & \quad 3) P \preceq bI, \\ & \quad 4) \text{不等式(17)}. \end{aligned} \quad (18)$$

上式为多目标优化问题,可预先设定较小的值予以求解. 解得  $\max^*$  及对应的  $P^*$ . 则线性域为

$$L_V(c_1) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T P^* \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \leq c_1 \right\},$$

初始条件应满足  $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in L_V(c_1)$ . 当最大椭球

$L_V(c_1)$  确定以后,代入式(9) 和(10),求得  $i_{i,j}$  和  $i_i$ . 选择适当的  $h_i > 0$ ,满足不等式(8),确保驱动力矩工作在线性区域. 当  $h$  确定好后,由条件(11) 计算最大的不变集  $L_V(c)$ .

该方法的原理是将初始状态放置在椭球短半轴上,通过优化技术求取包含距离原点最远初始点的椭球. 如果初始点的距离越大,则估计的吸引域也越大.

#### 3.2 设置初始状态法

设置初始状态方法定义的“最大”椭球含义为包含初始条件的变化范围最大,下面考虑另外一种定义方式. 椭球的体积是衡量椭球大小的常用指标,但是除体积外,还希望椭球具有某种期望形状和特性. 因此,引入参考形状集<sup>[2]</sup> 的概念来解决机器人吸引域估计问题.

令  $R$  为某一期望形状的有界凸集,  $0 \in R, R$

称之为参考形状集. 参考形状集指定了  $R$  的形状. “最大”椭圆应能包含参考形状集且体积最大. 对于集合  $L_V(c) \subset R^{2n}$ , 有

$$R(L_V(c)) = \sup\{ \gamma > 0 \mid R \subset L_V(c) \}. \quad (19)$$

其中:  $\gamma > 0$ ,  $R = \{ x \mid x^T R x \leq 1 \}$ . 因此, 求取最大椭圆不变集  $L_V(c)$ , 便是从所有满足条件的  $L_V(c)$  中, 最大化  $R(L_V(c))$ , 即

$$\begin{aligned} & \sup_{P>0, c, F}; \\ \text{s. t. } & 1) \quad R \subset L_V(c), \\ & 2) \quad A^T P + PA < 0, \\ & 3) \quad L_V(c) \subset L(F). \end{aligned} \quad (20)$$

其中: 条件 1) 表示参考形状集包含于椭圆  $L_V(c)$  中; 2) 表明闭环系统 (7) 在 Lyapunov 意义下稳定; 3) 隐含  $L_V(c)$  在区域  $L(F)$  内, 其中

$$L(F) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid R^{2n} \mid F_i \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid (1 - \gamma) h_{i, \max}, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (21)$$

上述优化问题无法直接应用 LMI 求解, 因此需要作如下变换<sup>[21]</sup>:

条件 1) 转化为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}R & I \\ I & \left(\frac{P}{c}\right)^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (22)$$

条件 2) 转化为

$$\left(\frac{P}{c}\right)^{-1} A^T + A \left(\frac{P}{c}\right)^{-1} < 0. \quad (23)$$

条件 3) 转化为

$$\begin{bmatrix} I(1 - \gamma) h_{i, \max}^2 & F_i \left(\frac{P}{c}\right)^{-1} \\ \left(\frac{P}{c}\right)^{-1} F_i^T & \left(\frac{P}{c}\right)^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (24)$$

令  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $Q = \left(\frac{P}{c}\right)^{-1}$ , 结合式 (22) ~ (24), 优化问题由下述 LMI 条件描述:

$$\begin{aligned} & \inf_{Q>0}; \\ \text{s. t. } & 1) \quad \begin{bmatrix} R & I \\ I & Q \end{bmatrix} \leq 0, \\ & 2) \quad QA^T + AQ < 0, \\ & 3) \quad \begin{bmatrix} I(1 - \gamma) h_{i, \max}^2 & F_i Q \\ Q F_i^T & Q \end{bmatrix} \leq 0, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (25)$$

当确定最优的  $P^*$  和  $c$  后, 选择  $c = c_1$ , 代入式 (9) 和 (10), 验证是否满足驱动器力矩限制 (8). 如果满足, 则所求值符合要求; 如果不满足, 则重新选择  $c$ ,  $h$  和  $F$ , 直至满足要求.

### 4 数值算例

为表明所开发算法的估计效果, 这里通过一个力矩受限的两连杆机器人例子来说明. 机器人模型的物理参数选自文献 [5].

驱动器的驱动力矩上极限值是  $\tau_{\max} =$

$$\begin{bmatrix} \tau_{1, \max} \\ \tau_{2, \max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ (单位: N} \cdot \text{m)}, \text{ 期望参考轨迹为 } q^d =$$

$$\begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \text{ (单位: rad)}. \text{ 机器人的初始位置}$$

和速度设置为 0, 对应的初始状态为  $[\tilde{q}(0) \quad \dot{\tilde{q}}(0)]^T = [-1.25 \quad -1.25 \quad 0 \quad 0]^T$ .

组合非线性反馈的线性增益矩阵为

$$F = [-K_P \quad -K_D] = \begin{bmatrix} -16 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

非线性参数  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  只用于增强控制性能, 不能改变系统的吸引域, 因此暂不考虑.

#### 方法 1 任意赋值求解法

取正定阵  $Q = I$ , 求解 Lyapunov 方程 (6) 得

$$P = \begin{bmatrix} 4.3125 & 0 & 0.0313 & 0 \\ 0 & 7.5375 & 0 & 0.0357 \\ 0.0313 & 0 & 0.2656 & 0 \\ 0 & 0.0357 & 0 & 0.5375 \end{bmatrix},$$

则

$$\alpha = \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} = 18.5128.$$

选择  $\alpha = c_1$ , 则水平集为

$$L_V(c_1) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \leq 18.5128 \right\}.$$

对于  $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c_1)$ , 机器人各非线性函数的上确界

分别为  $\tau_{11} = 2.519$ ,  $\tau_{12} = 0.186$ ,  $\tau_{21} = 0.186$ ,  $\tau_{22} = 0.102$ ,  $\tau_{31} = 60.62$ ,  $\tau_{32} = 7.412$ . 若不等式 (8) 满足,

则选择  $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 25 \end{bmatrix}$ . 同时, 令  $\gamma = 0.025$ , 由条

件 (11) 解得不不变集为

$$L_V(c) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \leq 8.8350 \right\}.$$

由于  $\omega = c$ , 初始状态  $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in L_V(c)$ , 机器人系统不能跟踪该幅值的参考输入, 必须改变初始状态  $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix}$  的值. 经过计算, 解得合适的初始状态值为  $[\tilde{q}(0) \quad \dot{\tilde{q}}(0)]^T = [-1.05 \quad -1.05 \quad 0 \quad 0]$ . 可见, 系统能够跟踪最大阶跃幅值为  $\begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.05 \end{bmatrix}$  的期望轨迹, 但无法跟踪阶跃幅值为  $\begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}$  的轨迹.

**方法 2 设置初始状态法**  
优化目标为

$$\min_{\omega} \max_{c_1} ; \quad \text{s. t. } 1) A^T P + PA < 0, \\ 2) P \succ I, \\ 3) P \succ 16I, \\ 4) \text{不等式(17)}.$$

利用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解上述优化问题, 解得

$$P^* = \begin{bmatrix} 13.8508 & 0.0076 & 0.2299 & -0.1911 \\ 0.0076 & 13.8507 & -0.2111 & 0.2081 \\ 0.2299 & -0.2111 & 1.1001 & -0.1355 \\ -0.1911 & 0.2081 & -0.1355 & 1.1853 \end{bmatrix}.$$

确定  $P^*$  后, 则  $\omega = 43.3073$ . 选择  $\omega = c_1$ , 则水平集为

$$L_V(c_1) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T P^* \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} < 43.3073 \right\}.$$

对于  $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c_1)$ , 机器人各非线性函数的上确界分别为  $\lambda_1 = 2.519, \lambda_2 = 0.186, \lambda_3 = 0.186, \lambda_4 = 0.102, \lambda_5 = 55.0450, \lambda_6 = 5.1453$ .

同理, 由不等式(8), 选择  $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 30 \end{bmatrix}$ . 最终, 解得不不变集为

$$L_V(c) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T P^* \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} < 43.3073 \right\},$$

且满足  $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in L_V(c)$ , 机器人系统能够跟踪阶跃幅值为  $\begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}$  的期望轨迹.

**方法 3 参考形状集法**

求解优化问题(25), 其中  $i = 1, 2$ . 选择  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $h_1 = 28.5, h_2 = 27$  及  $\alpha = 0.025$ , 解得  $\omega^* = (\omega^*)^{-1/2} = 1.7432, P^* = c(Q^*)^{-1}$ . 令  $c = 1$ , 则

$$P^* = \begin{bmatrix} 0.3266 & 0 & 0.0396 & 0 \\ 0 & 0.2902 & 0 & 0.0123 \\ 0.0396 & 0 & 0.0243 & 0 \\ 0 & 0.0123 & 0 & 0.0188 \end{bmatrix}.$$

确定  $P^*$  后, 选择合适的  $c = c_1$ , 则不变集为

$$L_V(c_1) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T P^* \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} < 1 \right\}.$$

对于  $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_V(c_1)$ , 有  $\lambda_1 = 2.519, \lambda_2 = 0.186, \lambda_3 = 0.186, \lambda_4 = 0.102, \lambda_5 = 57.9461, \lambda_6 = 6.9227$ .

由上述条件, 不等式(8)成立. 初始状态满足  $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \end{bmatrix} \in L_V(c)$ , 这说明机器人系统能够跟踪阶跃幅值为  $\begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}$  的期望轨迹.

为了更好地比较各方法所估计的吸引域大小, 下面采用椭圆不变集  $L_V(c)$  在位置误差坐标上的投影描述.

如图 1 所示, 内部的椭圆(虚线)由任意赋值求解方法得到; 外部的椭圆(实线)是由参考形状集法计算得到; 两者之间的椭圆(点划线)则由设置初始状态法得到. 可以看出, 无论是设置初始状态法, 还是参考形状集法, 所得到的不变集均远大于任意赋值求解方法. 这是因为采用优化技术, 得到不太保守的估计, 提高了系统跟踪高幅值参考输入的能力.

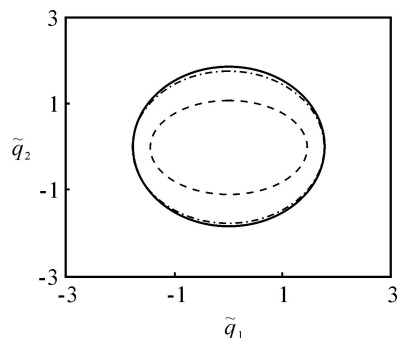


图 1 3 种方法计算的椭圆不变集投影

**5 结 论**

本文研究了力矩受限的机器人吸引域估计问题, 引入优化技术, 利用椭圆不变集进行估计. 首先

分析了吸引域的受限因素,预估的线性域与嵌入饱和函数幅值;然后定义不同意义的“最大”椭球不变集.在此基础上,引入设置初始状态法和参考形状集法,采用线性矩阵不等式求解.该算法简单、方便.仿真结果表明,这两种方法能够获得不太保守的估计,取得了较好的结果.

对机器人吸引域估计问题有影响的两个因素相互制约,如何合理地分配两者之间的影响权值,得到更大的吸引域估计将是进一步研究的问题.

### 参考文献(References)

- [1] Pittet C, Tarbouriech S, Burgat C. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and popov criteria[C]. Proc of 36th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 1997: 4518-4523.
- [2] Hu T, Lin Z, Chen B M. An analysis and design method to linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. Automatica, 2002, 38(2): 351-359.
- [3] Hu T, Lin Z. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(3): 440-450.
- [4] Llama M A, Kelly R, Santibaez V. Stable computed torque control of robot manipulators via fuzzy self-tuning[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics, 2000, 30(1): 143-150.
- [5] Santibaez V, Kelly R, Llama M A. Global asymptotic stability of a tracking sectorial fuzzy controller for robot manipulators[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 710-718.
- [6] Chen B M, Lee T H, Peng K, et al. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: Theory and application[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(3): 427-439.
- [7] He Y J, Chen B M, Wu C. Composite nonlinear control with state and measurement feedback for general multivariable systems with input saturation[J]. Systems & Control Letters, 2005, 54(5): 455-469.
- [8] Cheng G, Peng K, Chen B M, et al. Improving transient performance in tracking general references using composite nonlinear feedback control and its application to high-speed XY-table positioning mechanism[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2007, 54(2): 1039-1051.
- [9] Sciacivico L, Siciliano B. Modelling and control of robot manipulators[M]. London: Springer, 2000.
- [10] Boukas E. Control of singular systems with random abrupt changes[M]. Berlin: Springer, 2008.
- (上接第 978 页)
- [6] 彭晨, 岳东. 网络环境下基于网络 QoS 的网络控制器优化设计[J]. 自动化学报, 2007, 33(2): 214-217.  
(Peng C, Yue D. Network-based optimal controller design based on QoS[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(2): 214-217.)
- [7] 高金凤, 俞立. 不确定时滞系统的鲁棒绝对稳定性研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 114-116.  
(Gao J F, Yu L. Study of absolute robust stability of uncertain time delay system[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 114-116.)
- [8] Chang S, Peng T. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(4): 474-483.
- [9] Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II, 2004, 51(11): 640-644.
- [10] Yue D, Han Q L. Maximum allowable equivalent delay bound of networked control systems[C]. Proc of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, 2006: 4547-4550.
- [11] RFC2544-1999. Benchmarking methodology for network interconnect devices[S].
- [12] Xie L, Souza C E. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1144-1148.
- [13] Hong Seong Park. Scheduling algorithm of data sampling times in the integrated communication and control systems[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 1995, 3(2): 225-231.
- [14] 白涛, 吴智铭, 杨根科. 网络化控制系统带宽配置的一种新策略[J]. 自动化学报, 2004, 30(6): 961-967.  
(Bai T, Wu Z M, Yang G K. A new scheme of bandwidth allocation for networked control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(6): 961-967.)