

文章编号: 1001-0920(2009)08-1192-06

一类非线性时滞广义系统的状态反馈控制

吴建成¹, 沃松林², 陆国平³

(1. 江苏工业学院 信息科学与工程学院, 江苏 常州, 213164; 2. 江苏技术师范学院
电气工程学院, 江苏 常州 213001; 3. 南通大学 电气工程学院, 江苏 南通 226007)

摘要: 利用线性矩阵不等式(LMI), 讨论了一类非线性时滞广义系统的状态反馈控制问题. 通过对非线性映射 Frechet 导数的逆矩阵的估计, 给出了系统渐近稳定的充分条件. 这一条件与时滞相关, 可归结为一个线性矩阵不等式的可解性. 在 LMI 有解的条件下, 可得到系统状态反馈控制器的参数表示. 数值实例表明该方法是有用的.

关键词: 非线性广义系统; 时滞; 状态反馈控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

State feedback control for a class of nonlinear singular systems with delay

WU Jian-cheng¹, WO Song-lin², LU Guo-ping³

(1. School of Information Science and Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China; 2. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China; 3. School of Electrical and Information Engineering, Nantong University, Nantong 226007, China. Correspondent: WU Jian-cheng, E-mail: wujc@jpu.edu.cn)

Abstract: The state feedback control problem for a class of nonlinear singular systems with time-delay is discussed in terms of linear matrix inequality (LMI) approach. By the estimation of the inverse matrix for Frechet derivate of a nonlinear mapping, a delay-dependent condition is proposed, which guarantees the asymptotic stability of the solution to the systems. Also the condition is equivalent to the feasible solution of LMI. A parameterized representation of controller based on state feedback can be obtained under such a condition. Finally, numerical examples illustrate the effectiveness of the approach.

Key words: Nonlinear singular systems; Delay; State feedback control; Linear matrix inequality

1 引言

在许多工程系统中, 常常出现既含时滞又有代数结构的时滞广义系统. 如电力系统、化工系统、航天器稳定系统、无损耗线路等^[1]. 近年来, 一些中立型系统甚至一般的系统也常常化为广义系统来研究^[1-3]. 因此, 广义系统各类控制问题成为热门的研究课题.

线性矩阵不等式(LMI)方法是研究各类控制问题的重要方法. 其主要优点在于: 一是 LMI 表示的条件可用软件求解验证, 应用也很方便; 二是利用 LMI 常常可将线性系统的各类控制问题推广到一类非线性系统, 如线性广义系统的指数稳定性可推广到一类带非线性扰动的广义系统^[4]. 对于线性时

滞广义系统, 已有大量文献借助于 LMI 研究其各类控制问题. 如文献[1]利用 Lyapunov 第二方法对这类系统进行讨论, 给出了系统解存在、唯一和稳定的条件; [5-7]对这类系统的稳定与镇定问题进行研究, 讨论了时滞相关和时滞无关的一些条件. 有关参数不确定线性时滞广义系统的鲁棒控制和其他控制问题, 一些文献也作了讨论^[8,9], 但用 LMI 方法将这些结果推广到非线性系统的研究还很少. [10]利用 LMI 将一类线性时滞广义系统的绝对稳定性推广到非线性项满足扇形条件的系统. 对于范数有界的一类非线性时滞广义系统, 尚未见有关研究报导.

本文对一类范数有界的非线性时滞广义系统的稳定性及状态反馈控制问题进行研究. 首先将系统

收稿日期: 2008-09-02; **修回日期:** 2008-12-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474078, 60474076).

作者简介: 吴建成(1956—), 男, 江苏南通人, 教授, 硕士, 从事控制理论、非线性分析等研究; 沃松林(1964—), 男, 江苏丹阳县人, 教授, 博士, 从事广义系统理论等研究.

转变为相应的微分积分系统,然后利用 LMI 和非线性理论,给出一个非线性映射 Frechet 导数的逆矩阵的估计式,在 Lyapunov 函数负定的基础上,证明了闭环系统的渐近稳定性;最后利用 LMI 给出了系统控制器矩阵的参数表示.数值实例表明该方法是有有效的.

文中的记号说明如下:

$R^{n \times m}$:实 $n \times m$ 维矩阵集合, R^n 为实 n 维向量空间,其欧几里德向量范数和对应的矩阵范数记为 $\|\cdot\|$;

$L_2[0, +\infty)$: $[0, +\infty)$ 上平方可积函数空间,其范数记为 $\|\cdot\|_2$;

I, I_r :适当维数的单位矩阵和 r 维单位矩阵;

$Q(> 0)$: Q 是实对称矩阵且是正定的;

$*$:对称矩阵中的对称项,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ * & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

2 问题描述与准备工作

不失一般性,考虑如下非线性时滞广义系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}_d\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}_{d1}\mathbf{x}_{d1} + \mathbf{A}_{d2}\mathbf{x}_{d2} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t), t \in [-d, 0]. \quad (2)$$

其中: $\mathbf{E} = \text{diag}(I_r, 0), 0 < r < n; \mathbf{A}, \mathbf{A}_d = (\mathbf{A}_{d1}, \mathbf{A}_{d2}) \in R^{n \times n}; \mathbf{B} \in R^{n \times m}$ 为常数矩阵; \mathbf{A}_{d1} 和 \mathbf{A}_{d2} 分别为 $n \times r$ 维和 $n \times (n - r)$ 维矩阵; $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in R^n$ 为状态向量; $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}(t - d) = \text{col}(\mathbf{x}_{d1}, \mathbf{x}_{d2})$ 为时滞项; $d > 0$ 为时滞; $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2)$ 为连续初始状态,这些向量的分量均为 r 维和 $n - r$ 维向量; $\mathbf{u} \in R^m$ 为控制输入信号; $\mathbf{f} \in R^n$ 为非线性函数,其范数的界基于下列假设:

假设 1 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 连续,关于 $\mathbf{x} \in R^n$ 可微,且 $\mathbf{f}(t, 0) = 0$.

假设 2 对于所有的 $0 \leq t < +\infty, \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{J}_f^T \mathbf{J}_f \leq \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 成立.其中: $\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_f(t, \mathbf{x})$ 为函数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 关于 \mathbf{x} 的 Jacobi 矩阵, \mathbf{F} 为给定的适当维数的常数矩阵.

注 1 假设 1 和假设 2 蕴含^[11]

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|. \quad (3)$$

于是 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 关于所有状态变量 Lipschitz 连续,且

$$\mathbf{f}^T(t, \mathbf{x})\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{x}. \quad (4)$$

注 2 对于非线性函数假定 Lipschitz 连续,是为了保证系统存在唯一的解.

本文的目的是设计状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \mathbf{K} \in R^{m \times n}. \quad (5)$$

使得系统(1)的闭环系统

$$\dot{\mathbf{E}}\mathbf{x} = \mathbf{A}_K\mathbf{x} + \mathbf{A}_{d1}\mathbf{x}_{d1} + \mathbf{A}_{d2}\mathbf{x}_{d2} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (6)$$

的解 $\mathbf{x}(t)$ 是渐近稳定的,即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = 0$.这里 $\mathbf{A}_K = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$.

记

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + (\mathbf{A}_{d1}, 0), \mathbf{A}_{K0} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K},$$

$$\mathbf{A}_1 = (\mathbf{A}_{d1}, 0)\mathbf{A}_K, \mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}_{d1}, 0)\mathbf{A}_d,$$

$$\mathbf{A}_3 = (\mathbf{A}_{d1}, 0), \mathbf{A}_4 = (0, \mathbf{A}_{d2}).$$

首先给出与系统(6)和(2)等价的微分积分系统.

定理 1 闭环系统(6)和(2)等价于如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}\mathbf{x} &= \\ \mathbf{A}_{K0}\mathbf{x} &- \int_0^t [\mathbf{A}_1\mathbf{x}(\theta) + \mathbf{A}_3\mathbf{f}(\theta, \mathbf{x}(\theta))]d\theta - \\ &\int_0^t \mathbf{A}_2\varphi(\theta - d)d\theta + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{A}_d\varphi(t - \\ &d) - \mathbf{A}_{d1}\varphi_1(0), 0 < t \leq d; \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}\mathbf{x} &= \\ \mathbf{A}_{K0}\mathbf{x} &- \int_{t-d}^t [\mathbf{A}_1\mathbf{x}(\theta) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_d(\theta) + \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{f}(\theta, \mathbf{x}(\theta))]d\theta + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{A}_{d2}\mathbf{x}_{d2} = \\ \mathbf{A}_{K0}\mathbf{x} &- \int_{-d}^0 [\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t + \theta) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t + \\ &\theta - d) + \mathbf{A}_3\mathbf{f}(t + \theta, \mathbf{x}(t + \theta))]d\theta + \\ &\mathbf{A}_4\mathbf{x}_d + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), t > d. \end{aligned} \quad (7b)$$

证明略.

注 3 式(6)与(7a)或(7b)中的任何一个方程都是不等价的.式(7a)和(7b)是闭环系统(6)在不同时刻的表示.对于渐近稳定而言,式(7b)的渐近稳定性保证了闭环系统的渐近稳定性,因此下面仅讨论式(7b)的渐近稳定性.

3 系统的稳定性

定理 2 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 满足假设 1 和假设 2.对于时滞 $d > 0$,如果存在矩阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{K} , 正定矩阵 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$, 正常数 γ , 满足条件

$$\mathbf{E}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{E} \geq 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P}^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{P}^T \\ * & d\mathbf{A}_d^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{A}_d - \mathbf{R}_d & 0 \\ * & * & (d\gamma - 1)\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{P}^T \mathbf{A}_{K0} + \mathbf{A}_{K0}^T \mathbf{P} + d\mathbf{P}^T \mathbf{A}_3 (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \\ &\gamma^{-1} \mathbf{I}) \mathbf{A}_3^T \mathbf{P} + \mathbf{R}_3 + d\mathbf{A}_d^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{A}_d + \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \end{aligned}$$

则闭环系统(6)是渐近稳定的.

为证明定理 2,预先给出几个引理:

引理 1^[4] 在定理 2 的条件下,存在非奇异矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{N} , 使得 $\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{N} = \text{diag}(I_r, 0), \mathbf{M}\mathbf{A}_{K0}\mathbf{N} = \text{diag}(\mathbf{A}_r, \mathbf{I}_{n-r})$. 设

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]^T, \mathbf{N} = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2),$$

$$M^{-T}PN = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}.$$

则

$$M_2 M_2^T = I_{n-r}, \quad \|M_2\| \leq 1, \\ P_1 > 0, \quad P_2 = 0, \quad P_4 + P_4^T < 0.$$

引理 2 设 x 是式(7b)的解, $z = (z_1^T, z_2^T)^T = N^{-1}x$, N 为引理 1 中确定的矩阵. 则在定理 2 的条件下, $\|z_1(t)\|$, $\|z\|_2$ 和 $\|f\|_2$ 是有界的.

证明 构造 Lyapunov 函数 $V = V_1 + V_2 + V_3$. 其中

$$V_1 = x^T E^T P x = z_1^T P_1 z_1, \\ V_2 = \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t [x^T A_K^T R_1^{-1} A_K x + \\ x_d^T A_d^T R_2^{-1} A_d x_d + \gamma f^T f] d\xi d\theta, \\ V_3 = \int_{t-d}^t x(\theta)^T R_3 x(\theta) d\theta.$$

这里 P, K, R_i 和 γ 由矩阵不等式(8)和(9)确定. 分别计算函数 V 的各项导数, 并估计得

$$\dot{V} \leq \dot{\hat{V}} = \\ x^T (P^T A_{K_0} + A_{K_0}^T P) x + 2x^T P^T A_4 x_d + 2x^T P^T f + \\ dx^T P^T A_3 (R_1 + R_2 + \frac{1}{\gamma} I) A_3^T P x + dx^T A_K^T R_1^{-1} A_K x + \\ dx_d^T A_d^T R_2^{-1} A_d x_d + \gamma df^T f + x_d^T R_3 x - x_d^T R_3 x_d.$$

当矩阵不等式(9)成立时, 有

$$\dot{\hat{V}} - (f^T f - x^T F^T F x) = \\ (x^T x_d^T f^T) H_1 (x^T x_d^T f^T)^T < 0,$$

因此 $\dot{V} \leq \dot{\hat{V}} < 0$. 利用 $-H_1$ 正定, 则存在正常数 λ_0 , 使得

$$\dot{V} \leq -\lambda_0 (\|z\|^2 + \|z_d\|^2 + \|f\|^2) < 0.$$

记 λ_1 为引理 2 中 P_1 的最小特征值, 则

$$\lambda_1 z_1^T z_1 - V(0) \leq z_1^T P_1 z_1 - V(0) = \\ x^T P^T E x - V(0) \leq V(x) - V(0) = \\ \int_0^t \dot{V}[x(\xi)] d\xi \leq \\ -\lambda_0 \int_0^t [\|z\|^2 + \|z_d\|^2 + \|f\|^2] d\xi.$$

即对于任意 $t > 0$, 有

$$\lambda_1 z_1^T z_1 + \lambda_0 \int_0^t [\|z\|^2 + \\ \|z_d\|^2 + \|f\|^2] d\xi \leq V(0).$$

由此引理 2 结论成立. \square

引理 3 设定理 2 条件满足, N_1, N_2, M_2 为引理 1 中确定的矩阵, 记 $MA_4 N = \begin{bmatrix} A_{411} & A_{412} \\ A_{421} & A_{422} \end{bmatrix}$, 定义映射 $T: Tz_2 = z_2 + M_2 f(t, N_1 z_1 + N_2 z_2)$, 则有:

1) T 是 R^{nr} 到 R^{nr-1} 映上的映射;

2) T 的 Frechet 导数 $T' = I_{n-r} + M_2 J_f N_2$ 是可逆矩阵, 且存在常数 $0 < q_1 < 1$, 使得 $\|T'^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q_1}$;

3) 存在常数 $0 < q_2 < 1$, 使得 $\|T'^{-1} A_{422}\| \leq q_2 < 1, \forall 0 \leq t < +\infty, z \in R^n$.

证明 不等式(9)蕴含

$$H_2 = \begin{bmatrix} P^T A_{K_0} + A_{K_0}^T P + & P^T A_4 & P^T \\ R_3 + F^T F & -R_3 & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

或

$$N^T (P^T A_{K_0} + A_{K_0}^T P + F^T F + P^T P) N < 0. \quad (10)$$

用 # 表示没有必要写出的那些项, 注意到

$$N^T P^T A_{K_0} N = \\ \begin{bmatrix} P_1^T & P_3^T \\ 0 & P_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & \\ & I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \# & \# \\ \# & P_4^T \end{bmatrix}, \\ N^T P^T P N = N^T P^T M^{-1} M M^T M^{-T} P N = \\ \begin{bmatrix} P_1^T & P_3^T \\ 0 & P_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & \# \\ \# & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \# & \# \\ \# & P_4^T P_4 \end{bmatrix}.$$

因此式(10)蕴含

$$(P_4 + I)^T (P_4 + I) - I + N_2^T F^T F N_2 = \\ P_4^T + P_4 + N_2^T F^T F N_2 + P_4^T P_4 < 0.$$

从而存在常数 $0 < q_1 < 1$, 使得

$$\|F N_2\| = q_1 < 1. \quad (11)$$

由式(11)得 $\|M_2 J_f N_2\| \leq q_1 < 1$, 因此 T 是 R^{nr} 到 R^{nr-1} 映上的. 利用逆矩阵的 Neumann 引理^[11] 即得 2) 的结论.

下面证明 3) 的结论. 当 $H_1 < 0$ 时, 蕴含 $H_2 < 0$, 或等价地有

$$P^T A_{K_0} + A_{K_0}^T P + R_3 + P^T A_4 R_3^{-1} A_4^T P + \\ P^T P + F^T F < 0. \quad (12)$$

不等式(12)左乘 N^T 和右乘 N , 由 Schur 补引理得

$$\begin{bmatrix} N^T (P^T A_{K_0} + A_{K_0}^T P + \\ R_3 + P^T P + F^T F) N & N^T P^T A_4 N \\ * & -N^T R_3 N \end{bmatrix} < 0.$$

记

$$N^T R_3 N = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}, \\ \Sigma = P_4^T + P_4 + P_4^T P_4 + N_2^T F^T F N_2 + \\ R_{22} + P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4.$$

则上面不等式蕴含

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & P_4^T + P_4 + P_4^T P_4 + & \# & P_4^T A_{422} \\ \# & N^T F^T F N_2 + R_{22} & \# & \# \\ \# & A_{422}^T P_4 & \# & -R_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

以及 $\Sigma < 0$. 对于任意的 $0 \leq t < +\infty, z \in R^n$, 有

$$\begin{aligned} & P_4^T T' + T'^T P_4 + R_{22} + P_4^T A_{22} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 = \\ & P_4^T (I + M_2 J_f N_2) + (I + M_2 J_f N_2)^T P_4 + \\ & R_{22} + P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 \leq \\ & P_4^T + P_4 + P_4^T M_2 M_2^T P_4 + N_2^T J_f^T J_f N_2 + \\ & R_{22} + P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 \leq \Sigma < 0. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & -P_4^T T' R_{22}^{-1} T'^T P_4 + P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 \leq \\ & P_4^T T' + T'^T P_4 + R_{22} + P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 \leq \\ & \Sigma < 0, \end{aligned}$$

或

$$-\Sigma + P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 < P_4^T T' R_{22}^{-1} T'^T P_4.$$

注意到 $-\Sigma$ 正定, $P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4$ 半正定, 且这两项均与 t 和 z 无关, 因此存在正常数 τ , 使得 $-\Sigma - \tau P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 > 0$. 由此得到

$$(1 + \tau) P_4^T A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T P_4 < P_4^T T' R_{22}^{-1} T'^T P_4,$$

或

$$(1 + \tau) T'^{-1} A_{422} R_{22}^{-1} A_{422}^T T'^{-T} < R_{22}^{-1}.$$

于是

$$\|T'^{-1} A_{422}\| < 1/\sqrt{1 + \tau} = q_2 < 1. \quad \square$$

定理 2 证明 设 $z = (z_1^T, z_2^T)^T = N^{-1}x$. 由引理 1 知, 当 x 是系统(7b) 的解时, z 满足下列方程:

$$\begin{aligned} & \dot{z}_1 = \\ & A_1 z_1 - \int_{t-d}^t M_1 [A_1 N z(\theta) + A_2 N z_d(\theta) + \\ & A_3 f(\theta, N z(\theta))] d\theta + M_1 f(t, N z) + \\ & (A_{411}, A_{412}) z_d, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & 0 = \\ & z_2 - \int_{t-d}^t M_2 [A_1 N z(\theta) + A_2 N z_d(\theta) + \\ & A_3 f(\theta, N z(\theta))] d\theta + M_2 f(t, N z) + \\ & (A_{421}, A_{422}) z_d. \end{aligned} \tag{15}$$

由引理 2 知 z_1 是有界的.

下面证明 z_2 也有界. 固定 $t_0 \in [0, +\infty)$, 根据式(15) 构造单参数向量函数

$$\begin{aligned} & p(\lambda) = \\ & \lambda \left\{ \int_{t_0-d}^{t_0} M_2 [A_1 N z(\theta) + A_2 N z_d(\theta) + A_3 f(\theta, N z)] d\theta - \right. \\ & \left. (A_{421}, A_{422}) z(t_0 - d) \right\} + (1 - \lambda) f(t_0, N_1 z_1), \\ & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \tag{16}$$

由于 T 是 1-1 映上的, 对于 $p(\lambda) \in R^{n-r}, 0 \leq \lambda \leq 1$, 有 $q(\lambda), q(0) = 0$, 使得 $Tq(\lambda) = p(\lambda) \in R^{n-r}$. 对 λ 求导数, 得到 $T'(q(\lambda))q'(\lambda) = p'(\lambda)$. 因此, $q'(\lambda) = T'^{-1}(q(\lambda))p'(\lambda)$, 从而

$$\|z_2(t_0)\| = \|q(1)\| =$$

$$\begin{aligned} & \|q(1) - q(0)\| \leq \int_0^1 \|q'(\lambda)\| d\lambda = \\ & \int_0^1 \|T'^{-1}(q(\lambda))p'(\lambda)\| d\lambda. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} & M_0(t_0) = \\ & \frac{1}{1 - q_1} \left\{ \int_{t_0-d}^{t_0} M_2 [A_1 N z(\theta) + A_2 N z_d(\theta) + \right. \\ & \left. A_3 f(\theta, N z)] d\theta + A_{421} z_{1d} - f(t, N_1 z_1) \right\}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} & \|z_2(t_0)\| \leq \\ & \|M_0(t_0)\| + \int_0^1 \|T'^{-1}(q(\lambda))A_{422}z_{2d}\| d\lambda. \end{aligned} \tag{17}$$

由引理 2 知 $\int_{-d}^\infty \|z\|^2 dt, \int_{-d}^\infty \|f\|^2 dt, \|z_1\|$ 有界, 因此 $f(t, N_1 z_1)$ 有界. 从而存在正常数 c_6 , 使得 $\|M(t_0)\| \leq c_6$. 根据引理 3, $\|z_2(t_0)\| \leq c_6 + q_2 \|z_2(t_0 - d)\|$. 由此逐段递推得

$$\|z_2(t_0)\| < \frac{c_6}{1 - q_2} + \|\varphi\|, \quad \forall t_0 \in [0, +\infty). \tag{18}$$

于是 $z_2(t)$ 是有界的. 由于 z 有界, 从而 $f(t, x)$ 也有界, 于是 $(z_1^T z_1)' = 2z_1^T \dot{z}_1$ 是有界的. 由此 $\|z_1\|^2$ 是一致连续的. 由 $\int_{-d}^\infty \|z_1\|^2 dt < \infty$, 可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z_1\| = 0$.

当 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z_t\| = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} M_0(t) = 0$. 对于任意正整数 i , 利用式(17) 可得

$$\begin{aligned} & \|z_2(t + id)\| \leq \\ & M_0(t + id) + q_2 M_0(t + (i - 1)d) + \\ & \dots + q_2^i M_0(t) + q_2^i \|z_2(t)\|. \end{aligned}$$

利用 z_2 的有界性及 $\lim_{i \rightarrow +\infty} q_2^i = 0$, 可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z_2\| = 0$. 所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x\| = 0. \square$

4 状态反馈控制

在设计状态反馈控制器中, 直接运用矩阵不等式(8) 和(9) 很不方便. 为此, 可将其转化为线性矩阵不等式.

定理 3 设 $f(t, x)$ 满足假设 1 和假设 2. 对于时滞 $d > 0$, 如果存在正定矩阵 $S_0, S_1, S_2, S_3, \eta I \in R^{n \times n}$ (η 为正常数), 矩阵 $Y \in R^{n \times (n-r)}, Z \in R^{m \times n}$, 满足 LMI

$$H_3 = \begin{bmatrix} \bar{R} & dA_3 & I & (AQ + BZ)^T \\ -\eta I & 0 & 0 & \\ & (\eta - 1)I & 0 & \\ * & & & -S_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Q^T A_d^T & Q^T & Q^T F^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \leftarrow 0 & 0 & 0 \\ -S_2 & 0 & 0 \\ & -S_3 & 0 \\ & & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{R} &= A_0 Q + Q^T A_0^T + BZ + Z^T B^T + \\ & d^2 A_3 (S_1 + S_2) A_3^T + A_4 S_3 A_4^T, \\ Q &= S_0 E^T + \Phi Y^T, \end{aligned}$$

$\Phi \in R^{n \times (n-r)}$ 为满足 $E\Phi = 0$ 的已知矩阵. 则存在状态反馈控制器(5), 控制律为

$$K = Z(S_0 E^T + \Phi Y^T)^{-1}. \quad (20)$$

当控制律由式(20) 确定时, 闭环系统(6) 是渐近稳定的.

证明 令 $P = Q^{-1}, R_1 = dS_1, R_2 = dS_2, R_3 = S_3^{-1} + dA_d^T R_2^{-1} A_d, \eta = d\gamma$. 利用 Schur 补引理, 可将不等式(8) 和(9) 转换为

$$Q^T E^T = EQ \geq 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} R & dA_3 & I & Q^T A_K^T \\ -\eta I & 0 & 0 & 0 \\ & (\eta - 1)I & 0 & 0 \\ & & -S_1 & 0 \\ * & & & \\ Q^T A_d^T & Q^T & Q^T F^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \leftarrow 0 & 0 & 0 \\ -S_2 & 0 & 0 \\ & -S_3 & 0 \\ & & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} R &= A_{0K} Q + Q^T A_{0K}^T + d^2 A_3 (S_1 + \\ & S_2) A_3^T + A_4 S_3 A_4^T. \end{aligned}$$

记 $Z = KQ$, 利用文献[4] 的方法可以证明, 式(21) 和(22) 等价于式(19). 再由定理 2 即可证明定理 3 成立. \square

注 4 对于线性系统, $f(t, x) = 0$, 取 $F = 0$, 有

$$V_2 = \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t [x^T A_K^T R_1^{-1} A_K x + x_d^T A_d^T R_2^{-1} A_d x_d] d\xi d\theta,$$

则式(19) 可简化为

$$\tilde{H}_3 = \begin{bmatrix} \bar{R} & (AQ + BZ)^T & Q^T A_d^T & Q^T \\ & -S_1 & & \\ * & & -S_2 & \\ & & & -S_3 \end{bmatrix} < 0. \quad (19')$$

5 数值实例

例 1 考虑线性系统^[1]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.5x_1(t) - x_1(t-d), \\ 0 &= -x_1(t) - x_2(t). \end{aligned}$$

利用比较保守的 LMI 判别条件^[1,12], 结论是系统对于 $d \leq 0.33$ 是稳定的. 由文献[1] 的条件(即定理 3), 系统对于 $d \leq 1$ 是渐近稳定的. 利用本文方法, 根据 Matlab 软件包计算, 得到当 $d < 1$ 时(若用 $A_4 = 0$, 将式(19') 降低一个矩阵块, 则得 $d \leq 1$), 系统是渐近稳定的.

例 2 考虑如下系统的稳定性和状态反馈问题:

$$E\dot{x} = Ax + A_d x_d + Bu + f(t, x).$$

其中

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I_2 & & \\ & 0 & \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_d &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ f &= \alpha \begin{bmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ 0 \\ \sin x_3 \end{bmatrix}, F^T F = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ J_f^T J_f &= \\ \alpha_2 \begin{bmatrix} \cos^2(x_1 + x_2) & \cos^2(x_1 + x_2) & 0 \\ \cos^2(x_1 + x_2) & \cos^2(x_1 + x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 x_3 \end{bmatrix} &\leq \\ F^T F. \end{aligned}$$

当 $u = 0$ 时, 系统的稳定性取决于时滞 d 和非线性函数中的 α . 当 $\alpha = 0.5$ 时, 对于任意的 $d > 0$, 式(19) 无解; 当 $\alpha = 0.2$ 时, 求得 $d \leq 0.1249$, 式(19) 有解; 当 $\alpha = 0.15$ 时, 求得 $d = 0.2139$, 式(19) 有解.

取 $\alpha = 0.15, d = 0.2, x^T = 1 - (t + 0.2)^2, \sin 10\pi t, 0.5\cos \pi t)^T, -0.2 \leq t \leq 0$, 求得状态变量的解如图 1 所示.

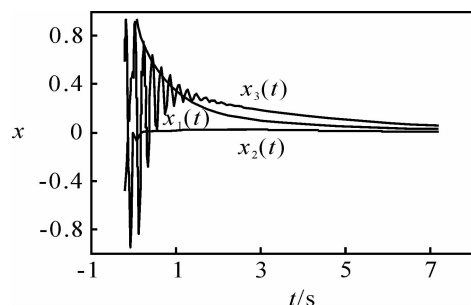


图 1 求得广义系统状态变量的解

当 $u = Kx$ 时,可求得如下结果:

$$Z = \begin{bmatrix} 4.9884 & -259.6992 & 47.2583 \\ -66.7378 & 50.3014 & -148.9653 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 122.1480 & -112.6571 & 0 \\ -112.6571 & 123.8220 & 0 \\ -0.8151 & 0.4563 & -4.8666 \end{bmatrix}.$$

控制律

$$K = \begin{bmatrix} -11.9689 & -12.9513 & -9.7108 \\ -0.4443 & -0.1108 & 30.6099 \end{bmatrix}.$$

于是系统在状态反馈控制 $u = Kx$ 下是渐近稳定的.

6 结 论

本文针对带有非线性扰动的时滞广义系统的状态反馈控制问题,给出了控制器设计方法,并用非线性方法和线性矩阵不等式,从理论上论述了系统的稳定性.给出的条件与时滞有关,其优点是控制器设计可用 Matlab 软件包求解标准的线性矩阵不等式,因而更具实用性.利用该方法可讨论这类系统的保成本控制,带不确定项的鲁棒控制等其他控制问题.

参考文献(References)

- [1] Fridnan E. Stability of linear descriptor systems with delay[J]. J of Mathematical Analysis and Application, 2002, 273(1): 24-44.
- [2] Chen W H, Zheng W X. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neural system with distributed delays[J]. Automatica, 2007, 43(1): 95-104.
- [3] Cao J W, Hong S M, Hu Y Y. Delay-dependent condition for absolute stability of Lurie control system with multiple time delays and nonlinearities[J]. J of Mathematical Analysis and Application, 2008, 338(3): 497-504.
- [4] Lu G P, Daniel W C, Yeung L F. Generalized quadratic stability for perturbed singular systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(6): 818-823.
- [5] Chaabane M, Bachelie O, Souissi M. Stability and stabilization of continuous descriptor systems: An LMI approach[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2006, 12(4): 1-15.
- [6] Boukas E K. Delay-dependent robust stabilizability of singular systems with delays [C]. IEEE Int Conf on Mechatronics and Automation, Canada, 2005: 13-18.
- [7] Zhong R X, Yang Z. Delay-dependent robust control of descriptor systems with time delay [J]. Asian J of Control, 2006, 8(1): 36-44.
- [8] Xu S Y, Dooren V P, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.
- [9] 张先明, 吴敏, 何勇, 线性时滞广义系统的时滞相关 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 649-652. (Zhang X M, Wu M, He Y. Delay dependent H_∞ control for linear descriptor systems with time delay[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(4): 649-652.)
- [10] Wang H J, Xue A, Lu R Q. Absolute stability criteria for a class of nonlinear singular systems with time delay [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 70(2): 621-630.
- [11] Ortega J M, Rheinboldt W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables [M]. New York: Academic Press, 1970.
- [12] Kolmanovskii V, Iniculescu S, Richard J P. On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay system[J]. Int J of Control, 1999, 72(3): 374-384.

(上接第 1191 页)

- [8] Nowak M. Aspiration level approach in stochastic MCDM problems [J]. European J of Operational Research, 2007, 177(3): 1626-1640.
- [9] Risto L, Joonas H, Pekka S. SMAA-Stochastic multiobjective acceptability analysis[J]. European J of Operational Research, 1998, 10(6): 137-143.
- [10] Risto L, Pekka S. SMAA-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making [J]. Operational Research, 2001, 49(3): 444-454.
- [11] 张全, 樊治平, 潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 703-706. (Zhang Q, Fan Z P, Pan D H. A ranking approach with possibilities for multiple attribute decision making problems with intervals [J]. Control and Decision, 1999, 14(6): 703-706.)
- [12] Keyser W D, Peeters P. A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods[J]. European J of Operational Research, 1996, 89(3): 457-461.