文章编号：1001-0920(2009)08-1223-07

不确定离散时滞系统的时滞相关非脆弱 H_∞ 控制

肖伸平[1,2a]，吴 敏[2a]，何 勇[2a]，张先明[2b]
（1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412000；2. 中南大学 a. 信息科学与工程学院，b. 数学科学与计算机技术学院，长沙 410083）

摘 要：讨论不确定离散时滞系统非脆弱控制器的设计问题. 利用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论和有限和不等式方法，获得了不确定时滞系统在非脆弱控制器作用下不仅内部渐近稳定，而且具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ 的时滞相关有界实条件. 采用迭代算法分别给出了控制器具有加法不确定性和乘法不确定性两种情况的非脆弱控制器参数的设计方法，借助于 Matlab 的 LMI 工具箱可以方便求解. 数值仿真实例表明了该方法的有效性.

关键词：不确定系统；离散时滞系统；非脆弱控制；线性矩阵不等式
中图分类号：TP13 **文献标识码**：A

Non-fragile delay-dependent H_∞ control for uncertain discrete-delay systems

XIAO Shen-ping[1,2a], *WU Min*[2a], *HE Yong*[2a], *ZHANG Xian-ming*[2b]
(1. School of Electrical and Information Engineering, Hu'nan University of Technology, Zhuzhou 412000, China; 2a. School of Information Science and Engineering, 2b. School of Mathematics Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: XIAO Shen-ping, E-mail: xsph_519@163.com)

Abstract: The problem of delay-dependent non-fragile H_∞ control for uncertain discrete-delay systems is investigated. Based on an inequality method for finite sums, a delay-dependent boundary real lemma is obtained by using the Lyapunov-Krasovskii stability theory, which can ensure that the closed-loop system is internally stable with a given H_∞ disturbance attenuation level via a non-fragile controller. Then the design of non-fragile H_∞ controller is proposed by using iterative algorithm to additional and multiplicative uncertain cases. Linear matrix inequalities (LMI) in Matlab toolbox is applied to get the solution easily. Finally, a numerical simulation shows the effectiveness of this approach.

Key words: Uncertain systems; Discrete-delay systems; Non-fragile control; Linear matrix inequality

1 引 言

非脆弱控制问题引起了控制界众多学者的关注[1-8]. Keel 等[1]通过大量实例分析了传统的 H_∞，H_2 和 μ 综合等方法设计的控制器有可能存在脆弱性，即当控制器的参数发生微小变化时，可能导致闭环系统不稳定；Dorato[2]对非脆弱控制器的设计问题作了较全面的阐述；林瑞全等[3]分析了非脆弱控制的几个研究方向及注意问题.

时滞广泛存在于控制系统，被认为是引起系统不稳定的重要原因[4,9]，因此对时滞系统非脆弱控制的研究便显得尤为重要. Xu[5]提出了不确定中立型时滞系统的非脆弱正实控制，但得到的条件却是时滞无关的；Park[6]将非脆弱控制应用于离散时滞大系统的鲁棒控制，得到了基于状态反馈控制的时滞无关的结论. 目前，基于状态反馈的不确定线性时滞系统时滞相关非脆弱鲁棒 H_∞ 控制问题的研究取得了较多的成果[7,10]，但对不确定离散时滞系统时滞相关非脆弱控制的研究还有待深入.

本文利用基于二次型的有限和不等式方法[8]，研究具有不确定性离散时滞系统非脆弱控制问题，给出了满足 H_∞ 范数小于给定界 γ 的非脆弱控制器的设计方法. 所得结论直接可用 LMI 工具箱求解控

收稿日期：2008-09-17；**修回日期**：2009-01-03.
基金项目：国家自然科学基金项目(60574014)；国家杰出青年基金项目(60425310)；教育部博士点基金项目(20050533015).

作者简介：肖伸平(1965—)，男，湖南东安人，教授，博士生，从事鲁棒控制理论及应用等研究；吴敏(1963—)，男，广东化州人，教授，博士生导师，从事鲁棒控制、过程控制等研究.

制器增益等参数.

本文沿用的记号如下：

$\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^{n\times n}$：数域上 n 维向量空间和 $n\times n$ 矩阵空间；

A^{T}：矩阵 A 的转置；

$P>0$：P 为对称正定阵；

$L_2[0,\infty)$：在$[0,\infty)$上平方可积的函数集合；

I：具有适当维数的单位矩阵；

$*$：对称矩阵的对称项，即

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}.$$

2 问题描述

考虑不确定系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ (A_0+\Delta A_0)x(k)+(A_1+\Delta A_1)\times \\ x(k-d(k))+B_1w(k)+B_2u(k), \\ z(k) = \\ (C_0+\Delta C_0)x(k)+(C_1+\Delta C_1)\times \\ x(k-d(k))+D_1w(k)+D_2u(k), \\ x(k)=0, k=-\bar{h},-\bar{h}+1,\cdots,0. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(k)\in\boldsymbol{R}^n$，$u(k)\in\boldsymbol{R}^m$，$w(k)\in\boldsymbol{R}^q$ 和 $z(k)\in\boldsymbol{R}^p$ 分别为系统的状态、控制输入、干扰输入和受控输出，且 $w(t)\in L_2$；系数矩阵 $A_0,A_1,B_1,B_2,C_0,C_1,D_1$ 和 D_2 为适当维数的常数实矩阵；$\Delta A_0,\Delta A_1,\Delta C_0$ 和 ΔC_1 为时变参数不确定性，一般假设系统的参数不确定性具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} \Delta A_0 & \Delta A_1 \\ \Delta C_0 & \Delta C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(k)[E_0 \quad E_1]. \tag{2}$$

式中：H_1,H_2,E_0 和 E_1 为适当维数的常数实矩阵；$F(k)$ 为时变未知实矩阵，满足 $F^{\mathrm{T}}(k)F(k)\leqslant I$.

设 $d(k)$ 是取值为正整数的时变时滞，以 $\underline{m}$ 和 $\bar{m}$ 分别表示其下界和上界，即

$$0<\underline{m}<d(k)\leqslant\bar{m},\forall k. \tag{3}$$

记 $\mu=\bar{m}-\underline{m}$，当 $\mu=0$ 时，$d(k)$ 是时不变的.

对不确定系统(1)设计非脆弱状态反馈控制器

$$u(k)=(K+\Delta K)x(k). \tag{4}$$

其中：K 称为控制器增益；ΔK 为控制器参数变化，其参数变化有下列两种类型：

类型 1：ΔK 不依赖于控制器增益 K(加法不确定性)，即

$$\Delta K = H_aF_a(k)E_a; \tag{5}$$

类型 2：ΔK 依赖于控制器增益 K(乘法不确定性)，即

$$\Delta K = H_bF_b(k)E_bK. \tag{6}$$

其中：H_a,H_b,E_a 和 E_b 为具有适当维数的常数实矩阵；$F_j(k)$ 为时变扰动矩阵，满足 $F_j^{\mathrm{T}}(k)F_j(k)\leqslant I$.

将非脆弱控制器(4)代入系统(1)，得闭环系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ (A_0+B_2K+\Delta A_0+B_2\Delta K)x(k)+ \\ (A_1+\Delta A_1)x(k-d(k))+B_1w(k), \\ z(k) = \\ (C_0+D_2K+\Delta C_0+D_2\Delta K)x(k)+ \\ (C_1+\Delta C_1)x(k-d(t))+D_1w(k), \\ x(k)=0,\ k\leqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

下面给出非脆弱控制器(4)在类型 1 或类型 2 情形下，使闭环系统(7)不仅内部稳定，而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 $\gamma>0$，即

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm{T}}(k)z(k)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(k)w(k))<0.$$

为推导本文的主要结果，首先给出如下引理：

引理 1[8] 设 $y(k)=x(k+1)-x(k)$，$x(k)\in\boldsymbol{R}^n$ 为向量值函数，$d(k)$ 是取值为正整数的纯量函数. 对于 $n\times n$ 实矩阵 R 以及适当维数矩阵 M_1,M_2,Z_1,Z_2 和 Z_3，若有

$$\begin{bmatrix} R & M_1 & M_2 \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

则满足如下不等式：

$$-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1}y^{\mathrm{T}}(j)Ry(j)\leqslant \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times \begin{bmatrix} M_1^{\mathrm{T}}+M_1+\bar{m}Z_1 & -M_1^{\mathrm{T}}+M_2+\bar{m}Z_2 \\ * & -M_2^{\mathrm{T}}-M_2+\bar{m}Z_3 \end{bmatrix}\times \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}.$$

引理 2[11] 给定矩阵 $\Sigma=\Sigma^{\mathrm{T}}$，$H$ 和 E 为合适维数的实矩阵，则有 $\Sigma+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$，对于任意满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 的 F 成立，其充要条件是存在 $\varepsilon>0$，使得 $\Sigma+\varepsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon E^{\mathrm{T}}E<0$.

3 主要结果

3.1 标称系统的时滞相关有界实条件

为讨论方便起见，首先给出闭环系统(7)的不确定项 $\Delta A_0,\Delta A_1,\Delta C_0$ 和 ΔC_1 均为零，即标称系统的时滞相关 BRL 条件.

定义 $y(k)=x(k+1)-x(k)$，$\widetilde{A}_k=A_k-I$. 改写标称系统(7)，有

$$\begin{cases} y(k) = \\ \widetilde{A}_kx(k)+A_1x(k-d(k))+B_1w(k), \\ z(k) = \\ C_kx(k)+C_1x(k-d(k))+D_1w(k), \\ x(k)=0,k\leqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

定理 1　给定 $\gamma>0$，如果存在 $n\times n$ 实矩阵 $P>0$，$R>0$，$Q>0$，及适当维数的实矩阵 M_1，M_2，Z_1，Z_2，Z_3，K，使得以下矩阵不等式成立：

$$\Phi_1:=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & PB_1 & \widetilde{A}_k^{\mathrm T} & \widetilde{A}_k^{\mathrm T} & C_k^{\mathrm T}\\ * & \psi_{22} & 0 & A_1^{\mathrm T} & A_1^{\mathrm T} & C_1^{\mathrm T}\\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm T} & B_1^{\mathrm T} & D_1^{\mathrm T}\\ * & * & * & -P^{-1} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -(\bar{m}R)^{-1} & 0\\ * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0,\tag{9}$$

$$\Phi_2:=\begin{bmatrix}R & M_1 & M_2\\ * & Z_1 & Z_2\\ * & * & Z_3\end{bmatrix}\geqslant 0.\tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}\psi_{11}&=P\widetilde{A}_k+\widetilde{A}_k^{\mathrm T}P+M_1^{\mathrm T}+M_1+(1+\mu)Q+\bar{m}Z_1,\\ \psi_{12}&=PA_1-M_1^{\mathrm T}+M_2+\bar{m}Z_2,\\ \psi_{22}&=-M_2^{\mathrm T}-M_2-Q+\bar{m}Z_3,\\ A_k&=A_0+B_2K+B_2\Delta K,\\ C_k&=C_0+D_2K+D_2\Delta K.\end{aligned}\tag{11}$$

则系统(1) 的标称系统在非脆弱控制器(4) 的作用下，不仅渐近稳定，而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ.

证明　取 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(k)=V_1(k)+V_2(k).$$

其中

$$V_1(k)=x^{\mathrm T}(k)Px(k)+\sum_{\theta=-\bar{m}+1}^{0}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1}y^{\mathrm T}(j)Ry(j),$$

$$V_2(k)=\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^{\mathrm T}(i)Qx(i)+\sum_{j=-\bar{m}+2}^{-m+1}\sum_{l=k+j-1}^{k-1}x^{\mathrm T}(l)Qx(l).$$

对以上二式分别求其前向差分 $\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)$，得

$$\Delta V_1(k)=2x^{\mathrm T}(k)Py(k)+y^{\mathrm T}(k)(P+\bar{m}R)y(k)-\sum_{j=k-\bar{m}}^{k-1}y^{\mathrm T}(j)Ry(j),$$

$$\Delta V_2(k)\leqslant(1+\mu)x^{\mathrm T}(k)Qx(k)-x^{\mathrm T}(k-d(k))Qx(k-d(k)).$$

由式(3) 可得

$$-\sum_{j=k-\bar{m}}^{k-1}y^{\mathrm T}(j)Ry(j)\leqslant-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1}y^{\mathrm T}(j)Ry(j).$$

定义向量

$$\zeta(k)=[x^{\mathrm T}(k)\quad x^{\mathrm T}(k-d(k))\quad w^{\mathrm T}(k)]^{\mathrm T},$$

并记 $\Gamma_1=[\widetilde{A}_K\quad A_1\quad B_1]$，则由式(8) 得 $y(k)=\Gamma_1\zeta(k)$. 由引理 1 并结合式(8)，经整理得

$$\Delta V(k)\leqslant\zeta^{\mathrm T}(k)\{\Xi+\Gamma_1^{\mathrm T}(P+\bar{m}R)\Gamma_1\}\zeta(k),\tag{12}$$

其中

$$\Xi:=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & PB_1\\ * & \psi_{22} & 0\\ * & * & 0\end{bmatrix}.$$

以下从两方面予以证明. 首先证明系统(7) 内部渐近稳定. 设 $w(t)=0$，则式(12) 可表示为

$$\Delta V(k)\leqslant\begin{bmatrix}x(k)\\ x(k-d(k))\end{bmatrix}^{\mathrm T}\times\left\{\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ * & \psi_{22}\end{bmatrix}+\widetilde{\Gamma}_1^{\mathrm T}(P+\bar{m}R)\widetilde{\Gamma}_1\right\}\times\begin{bmatrix}x(k)\\ x(k-d(k))\end{bmatrix},\tag{13}$$

其中 $\widetilde{\Gamma}_1=[\widetilde{A}_K\quad A_1]$. 由矩阵不等式(9) 可得如下矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & \widetilde{A}_k^{\mathrm T} & \widetilde{A}_k^{\mathrm T}\\ * & \psi_{22} & A_1^{\mathrm T} & A_1^{\mathrm T}\\ * & * & -P^{-1} & 0\\ * & * & * & -(\bar{m}R)^{-1}\end{bmatrix}<0.\tag{14}$$

比较式(13) 和(14)，根据 Schur 补定理得到 $\Delta V(k)<0$，由 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理知闭环系统(7) 内部渐近稳定.

然后证明在零初始条件下，系统(7) 具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ. 对于任意 $w(t)\in L_2[0,\infty)\neq 0$，有

$$\Delta V(k)+z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2w^{\mathrm T}(k)w(k)\leqslant\zeta^{\mathrm T}(k)\left\{\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & PB_1\\ * & \psi_{22} & 0\\ * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}+\Gamma_1^{\mathrm T}(P+\bar{m}R)\Gamma_1+\Gamma_2^{\mathrm T}\Gamma_2\right\}\zeta(k),$$

其中 $\Gamma_2=[C_k\quad C_1\quad D_{11}]$. 如果矩阵不等式(7) 成立，则由 Schur 补定理有

$$\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & PB_1\\ * & \psi_{22} & 0\\ * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}+\Gamma_1^{\mathrm T}(P+\bar{m}R)\Gamma_1+\Gamma_2^{\mathrm T}\Gamma_2<0,$$

所以

$$\Delta V(k)+z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2w^{\mathrm T}(k)w(k)<0.\tag{15}$$

上式两边对 k 从 0 到 ∞ 求和，注意到在零初始条件下 $V(0)=0$，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(k)z(k)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(k)w(k)]<$$
$$V(0)-V(\infty)<0,$$

即 $\|z(k)\|_2<\gamma\|w(k)\|_2$. 从而闭环系统(7) 在零初始条件下,具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ. □

式(9) 给出的条件是非线性矩阵不等式,不能直接解出非脆弱 H_∞ 控制器. 下面利用迭代算法[12],将非线性矩阵不等式的求解转化为非线性最小化问题,并分别给出求解类型 1 和类型 2 两种情况非脆弱控制器参数的方法.

定理 2 给定 $\gamma>0$,如果存在 $n\times n$ 实矩阵 $\bar{P}>0,\bar{R}>0,\bar{Q}>0$,适当维数的实矩阵 $\bar{M}_1,\bar{M}_2,\bar{Z}_1,\bar{Z}_2,\bar{Z}_3,Y$ 和纯量 $\varepsilon_1>0$,使得以下矩阵不等式成立:

$$\Psi_1:=\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & B_1 & \theta_4 & \bar{m}\theta_4 & \theta_5 & \varepsilon_1 B_2 H_a & \bar{P}E_a^{\mathrm{T}}\\ * & \theta_3 & 0 & \bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}\bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{P}C_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}B_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{P} & 0 & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_a & 0\\ * & * & * & * & -\bar{m}\bar{R} & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_a & 0\\ * & * & * & * & * & -I & \varepsilon_1 D_2 H_a & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I\end{bmatrix}<0, \tag{16}$$

$$\Psi_2:=\begin{bmatrix}\bar{P}\bar{R}^{-1}\bar{P} & \bar{M}_1 & \bar{M}_2\\ * & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2\\ * & * & \bar{Z}_3\end{bmatrix}\geqslant 0. \tag{17}$$

其中

$$\begin{cases}\theta_1=(A_0-I)\bar{P}+\bar{P}(A_0-I)^{\mathrm{T}}+\\ \quad B_2Y+Y^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}+\bar{M}_1^{\mathrm{T}}+\bar{M}_1+\\ \quad (1+\mu)\bar{Q}+\bar{m}\bar{Z}_1,\\ \theta_2=A_1\bar{P}-\bar{M}_1^{\mathrm{T}}+\bar{M}_2+\bar{m}\bar{Z}_2,\\ \theta_3=-\bar{M}_2^{\mathrm{T}}-\bar{M}_2-\bar{Q}+\bar{m}\bar{Z}_3,\\ \theta_4=\bar{P}(A_0-I)^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}},\\ \theta_5=\bar{P}C_0^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{18}$$

则系统(1) 的标称系统(8) 在类型 1 非脆弱控制器(4) 的作用下,不仅渐近稳定,而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ,且控制器增益 $K=Y\bar{P}$.

证明 将式(5) 代入式(9),经整理得

$$\Phi:=\Omega+\Theta_1F_a(t)\Theta_2+\Theta_2^{\mathrm{T}}F_a^{\mathrm{T}}(t)\Theta_1^{\mathrm{T}}<0. \tag{19}$$

其中

$$\Theta_1=[(PB_2H_a)^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad (B_2H_a)^{\mathrm{T}}\quad (B_2H_a)^{\mathrm{T}}\quad (D_2H_a)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$\Theta_2=[E_a^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0],$$
$$\Omega:=\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & PB_1 & \varphi_{13} & \varphi_{13} & \varphi_{14}\\ * & \varphi_{22} & 0 & A_1^{\mathrm{T}} & A_1^{\mathrm{T}} & C_1^{\mathrm{T}}\\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm{T}} & B_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}}\\ * & * & * & -\bar{P}^{-1} & 0 & 0\\ * & * & * & * & (-\bar{m}R)^{-1} & 0\\ * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix},$$

$$\varphi_{11}=P(A_0-I)+(A_0-I)^{\mathrm{T}}P+PB_2K+K^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}P+M_1+M_1^{\mathrm{T}}+(1+\mu)Q+\bar{m}Z_1,$$
$$\varphi_{12}=PA_1-M_1^{\mathrm{T}}+M_2+\bar{m}Z_2,$$
$$\varphi_{13}=(A_0-I+B_2K)^{\mathrm{T}},$$
$$\varphi_{14}=(C_0+D_2K)^{\mathrm{T}},$$
$$\varphi_{22}=-M_2-M_2^{\mathrm{T}}-Q+\bar{m}Z_3.$$

由引理 2,不等式(19) 对于所有满足 $F_a^{\mathrm{T}}(k)F_a(k)\leqslant I$ 的不确定性矩阵 $F_a(k)$ 均成立,其充要条件是存在正数 ε_1,使得如下不等式成立:

$$\Omega+\varepsilon_1\Theta_1\Theta_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1^{-1}\Theta_2^{\mathrm{T}}\Theta_2<0. \tag{20}$$

由 Schur 补,不等式(20) 等价于

$$\Pi:=\begin{bmatrix}\Omega & \varepsilon_1\Theta_1 & \Theta_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon_1 I & 0\\ * & * & -\varepsilon_1 I\end{bmatrix}<0. \tag{21}$$

取

$$J_1=\mathrm{diag}\{P^{-1},P^{-1},I,I,\bar{m}I,I,I,I\},$$
$$J_2=\mathrm{diag}\{P^{-1},P^{-1},P^{-1}\}.$$

将式(21) 与式(10) 进行合同变换,即分别左乘 J_1^{T} 和 J_2^{T},右乘 J_1 和 J_2,并令

$$\bar{P}=P^{-1},\bar{R}=R^{-1},\bar{Q}=P^{-1}QP^{-1},Y=KP^{-1},$$
$$\bar{M}_i=P^{-1}M_iP^{-1},\bar{Z}_j=P^{-1}Z_jP^{-1},$$
$$i=1,2,\ j=1,2,3.$$

可得 $J_1^{\mathrm{T}}\Pi J_1=\Psi_1,J_2^{\mathrm{T}}\Phi_2J_2=\Psi_2$. 其中 Ψ_1 和 Ψ_2 定义于式(16) 和(17). 由 Lyapunov 稳定性理论知,标称系统(8) 不仅内部稳定,而且具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ. □

注意到矩阵不等式(17) 含有非线性项 $\bar{P}\bar{R}^{-1}\bar{P}$,如果限制 $\bar{P}=\bar{R}$,则式(17) 成为线性矩阵不等式,从而可用 LMI 工具箱直接求解 H_∞ 控制器.

下面利用文献[12] 提出的迭代算法,引入新的矩阵变量 S,使得 $\bar{P}\bar{R}^{-1}\bar{P}\geqslant S$. 于是,矩阵不等式(17) 可用如下矩阵不等式组替代:

$$\begin{bmatrix} S & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 \\ * & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 \\ * & * & \bar{Z}_3 \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{22}$$

$$\bar{P}\bar{R}^{-1}\bar{P} \geqslant S. \tag{23}$$

由 Schur 补，条件(23) 等价于

$$\begin{bmatrix} S^{-1} & \bar{P}^{-1} \\ \bar{P}^{-1} & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

于是矩阵不等式(17) 成立，当且仅当式(22) 以及

$$\begin{bmatrix} T & N \\ N & L \end{bmatrix} \geqslant 0, T = S^{-1}, N = \bar{P}^{-1}, L = \bar{R}^{-1}$$

为真. 因此非线性矩阵不等式(17) 的求解便转化为如下非线性最小化问题：

$$\min \operatorname{tr}(ST + \bar{P}N + \bar{R}L); \tag{24}$$

$$\text{s. t. (16), (22) 和(25).}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} T & N \\ N & L \end{bmatrix} \geqslant 0, \bar{P} \geqslant 0, \bar{R} \geqslant 0, \bar{Q} \geqslant 0, \\ \begin{bmatrix} S & I \\ I & T \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & N \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} \bar{R} & I \\ I & L \end{bmatrix} \geqslant 0. \end{cases} \tag{25}$$

如果上述最小化问题的解为 $3n$，则系统(1) 的标称系统(8) 在类型 1 非脆弱控制器(4) 的作用下，不仅渐近稳定，而且具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ.

要求出非线性最小化问题(24) 全局最优解是很难的，但用下面给出的迭代算法，对于给定的 γ，可方便地获得次优最大时滞上界 $\bar{m}$，或对于给定的 $\bar{m}$，可获得次优最小 H_∞ 性能 γ. 其基本思想是最小化 $\operatorname{tr}(ST + \bar{P}N + \bar{R}L)$，同时验证式(17)，如果式(17) 满足，则最小化过程终止，这样不必使 $\operatorname{tr}(ST + \bar{P}N + \bar{R}L)$ 的值精确达到 $3n$.

算法 1　给定 h(或 γ) 最小化 γ (或最大化 h)

Step1：给定 h(或 γ) 设定初值 h_{opt}(充分小)(或 γ_{opt}(充分大))，使其满足式(22) 和(25).

Step2：找出一组解 $(\bar{P}^0, \bar{R}^0, \bar{Q}^0, M_1^0, M_2^0, Y^0, S^0, T^0, N^0, L^0)$，使其满足式(22) 和(25)，设 $k = 0$.

Step3：关于矩阵变量 $(\bar{P}, \bar{R}, \bar{Q}, M_1, M_2, Y, S, T, N, L)$，解最小化问题：

$$\min \operatorname{tr}(S^kT + T^kS + \bar{P}^kN + N^k\bar{P} + \bar{R}^kL + L^k\bar{R}),$$

$$\text{s. t. (22) 和(25).}$$

令

$$S^{k+1} = S, T^{k+1} = T, \bar{P}^{k+1} = \bar{P},$$
$$N^{k+1} = N, \bar{R}^{k+1} = \bar{R}, L^{k+1} = L.$$

Step4：如果不等式(17) 满足，则适当增大 h_{opt}(或减少 γ_{opt})，返回 Step2. 如果不等式(17) 不满足，并且超出指定的迭代次数，则终止程序；否则，令 $k = k + 1$，返回 Step3.

定理 3　给定 $\gamma > 0$，如果存在 $n \times n$ 实矩阵 $\bar{P} > 0, \bar{R} > 0, \bar{Q} > 0$，适当维数的实矩阵 $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, Y$ 和纯量 $\varepsilon_1 > 0$，使得矩阵不等式(17) 和下式成立：

$$\Psi_2 := \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & B_1 & \theta_4 & \bar{m}\theta_4 & \theta_5 & \varepsilon_1 B_2 H_b & Y^{\mathrm{T}} E_b^{\mathrm{T}} \\ * & \theta_3 & 0 & \bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}\bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{P}C_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}B_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{P} & 0 & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_b & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{m}\bar{R} & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_b & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & \varepsilon_1 D_2 H_b & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \tag{26}$$

其中 $\theta_v (v = 1, 2, \cdots, 5)$ 定义同式(18). 则系统(1) 的标称系统(8) 在类型 2 非脆弱控制器(4) 的作用下，不仅渐近稳定，而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ，且控制器增益 $K = Y\bar{P}$.

此时，非线性矩阵不等式(17) 的求解可转化为如下非线性最小化问题：

$$\min \operatorname{tr}(ST + \bar{P}N + \bar{R}L),$$

$$\text{s. t. (26), (22) 和(25).}$$

采用类似定理 2 的证明方法，很容易获得上述结论.

注 1　由于非脆弱状态反馈控制器(4) 存在两种不同类型的不确定性(5) 和(6)，将其分别代入系统(1) 的标称系统，得到两种表达形式不同的鲁棒控制器存在条件及控制器参数求解方法，即定理 2 和定理 3 给出的结论.

下面给出不确定系统两种不同类型非脆弱 H_∞ 控制器的设计方法.

3.2　不确定系统非脆弱 H_∞ 控制器的设计

定理 4　给定 $\gamma > 0$，如果存在 $n \times n$ 实矩阵 $\bar{P} > 0, \bar{R} > 0, \bar{Q} > 0$，适当维数的实矩阵 $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, Y$ 和纯量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$，使得矩阵不等式(17) 和下式成立：

$\Psi_3 :=$

$$\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & B_1 & \theta_4 & \bar{m}\theta_4 & \theta_5 & \varepsilon_1 B_2 H_a & \bar{P}E_a^{\mathrm{T}} & \varepsilon_2 H_1 & \bar{P}E_0^{\mathrm{T}}\\ * & \theta_3 & 0 & \bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}\bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{P}C_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \bar{P}E_1^{\mathrm{T}}\\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}B_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{P} & 0 & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_a & 0 & \varepsilon_2 H_1 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{m}\bar{R} & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_a & 0 & \varepsilon_2 \bar{m} H_1 & 0\\ * & * & * & * & * & I & \varepsilon_1 D_2 H_a & 0 & \varepsilon_2 H_2 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I\end{bmatrix} < 0. \quad (27)$$

则不确定系统(1) 在类型 1 非脆弱控制器(4) 的作用下,不仅渐近稳定,而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ,且控制器增益 $K = Y\bar{P}$.

此时,非线性矩阵不等式(17) 的求解可转化为如下非线性最小化问题:

$$\min\ \mathrm{tr}(ST + \bar{P}N + \bar{R}L),$$
$$\text{s. t. } (27),(22) \text{ 和}(25).$$

证明 当系统(1) 存在不确定性 $\Delta A_0, \Delta A_1$, ΔC_0 和 ΔC_1 时,用 $A_0 + \Delta A_0$, $A_1 + \Delta A_1$, $C_0 + \Delta C_0$ 和 $C_1 + \Delta C_1$ 分别取代式(7) 中的 A_0, A_1, C_0 和 C_1,整理得

$$\Psi_1 + \Theta_3 F(t)\Theta_4 + \Theta_4^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}}(t)\Theta_3^{\mathrm{T}} < 0. \quad (28)$$

其中

$$\Theta_3 = [H_1^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ H_1^{\mathrm{T}}\ \ \bar{m}H_1^{\mathrm{T}}\ \ H_2^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$
$$\Theta_4 = [E_0\bar{P}\ \ E_1\bar{P}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

Ψ_1 的定义与式(16) 相同. 应用引理 2,不等式(28) 对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}(k)F(k) \leqslant I$ 的不确定性矩阵 $F(k)$ 均成立,其充要条件是存在 $\varepsilon_2 > 0$,使得如下不等式成立:

$$\Psi_1 + \varepsilon_2 \Theta_3 \Theta_3^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2^{-1}\Theta_4^{\mathrm{T}}\Theta_4 < 0. \quad (29)$$

由 Schur 补,不等式(29) 等价于

$$\Psi_3 := \begin{bmatrix}\Psi_1 & \varepsilon_2\Theta_3 & \Theta_4^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon_2 I & 0\\ * & * & -\varepsilon_2 I\end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

因此定理得证. □

类似于定理 4 的证明方法,可得如下结论:

定理 5 给定 $\gamma > 0$,如果存在 $n\times n$ 实矩阵 $\bar{P} > 0, \bar{R} > 0, \bar{Q} > 0$ 和 $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$, $m\times n$ 实矩阵 Y,纯量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$,使得矩阵不等式(17) 和下式成立:

$$\Psi_4 := \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & B_1 & \theta_4 & \bar{m}\theta_4 & \theta_5 & \varepsilon_1 B_2 H_b & Y^{\mathrm{T}}E_b^{\mathrm{T}} & \varepsilon_2 H_1 & Y^{\mathrm{T}}E_0^{\mathrm{T}}\\ * & \theta_3 & 0 & \bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}\bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{P}C_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & Y^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}\\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm{T}} & \bar{m}B_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{P} & 0 & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_b & 0 & \varepsilon_2 H_1 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{m}\bar{R} & 0 & \varepsilon_1 B_2 H_b & 0 & \varepsilon_2 \bar{m} H_1 & 0\\ * & * & * & * & * & -I & \varepsilon_1 D_2 H_b & 0 & \varepsilon_2 H_2 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I\end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

其中 $\theta_v (v = 1,2,\cdots,5)$ 定义于式(18). 则系统(1) 在类型 2 非脆弱控制器(4) 的作用下,不仅渐近稳定,而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ,且控制器增益 $K = Y\bar{P}$.

此时,非线性矩阵不等式(17) 的求解可转化为如下非线性最小化问题:

$$\min\ \mathrm{tr}(ST + \bar{P}N + \bar{R}L),$$
$$\text{s. t. } (31),(22) \text{ 和}(25).$$

4 数值算例

对于不确定系统(1),假设

$$A_0 = \begin{bmatrix}0 & 0.1\\ -0.14 & 0.9\end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\ D_2 = B_2 = B_1 = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{sqrt}(0.1)\end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0\end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix}0.03 & 0.2\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$E_0 = \begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.05\end{bmatrix},\ E_1 = \begin{bmatrix}0.05 & 0.2\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$E_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},\ E_b = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$H_b = H_a = [0.1 \quad 0.1].$$

利用定理 4，计算出满足类型 1 时，系统(1) 不仅内部渐近稳定，而且在不同时滞界下所具有的最小 H_∞ 性能指标 $\gamma_{\min} = 0.694$. 奇异值曲线如图 1 所示.

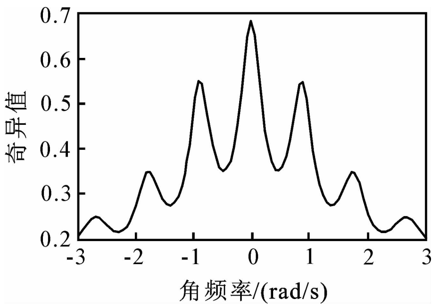

图 1　系统(1) 在类型 1 非脆弱控制器作用下的奇异值

利用定理 5，得出满足类型 2 时，系统(1) 所具有的最小 H_∞ 性能指标 $\gamma_{\min} = 0.703$. 奇异值曲线如图 2 所示.

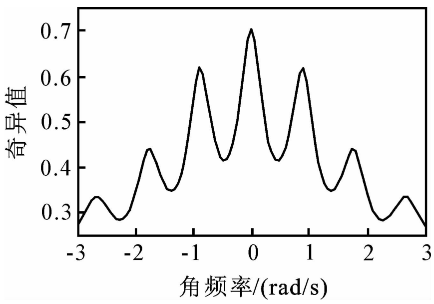

图 2　系统(1) 在类型 2 非脆弱控制器作用下的奇异值

由图 1 和图 2 可以看出，控制器具有非脆弱的情形时，系统仍具有满足给定的 H_∞ 性能指标的鲁棒稳定能力.

5　结　　论

本文利用有限和不等式的方法，讨论了具有加法和乘法不确定性的离散时滞系统时滞相关非脆弱鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法，该方法得到的结论比现有的研究结果具有更少的保守性. 针对两种不确定类型，分别给出了满足 H_∞ 范数小于给定界 γ 的非脆弱控制器存在的充分条件. 数值算例表明，所提出的方法是有效的.

参考文献(References)

[1] Keel L H, Bhattacharyya S P. Robust, fragile or optimal[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1098-1105.

[2] Dorato P. Non-fragile controller design: An overview [C]. Proc of America Control Conf. Philadephia: IEEE Press, 1998: 2829-2831.

[3] 林瑞全，杨富文. 基于 H_∞ 控制理论的非脆弱控制的研究[J]. 控制与决策，2004，19(5)：598-600.
(Lin R Q, Yang F W. On non-fragile control based on H_∞ control theory[J]. Control and Decision, 2004, 19 (5): 598-600.)

[4] He Yong, Wang Qing-guo, Min Wu, et al. Delay-dependent state estimation for delay neural networks [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2006, 17(4): 1077-1081.

[5] Xu S Y, Lam J, Wang J, et al. Non-fragile positive real control for uncertain linear neural delay systems[J]. Systems & Control Letters, 2004, 52(1): 59-74.

[6] Park J H. Robust non-fragile control for uncertain discrete-delay large-scale systems with a class of controller gain variations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 149(1): 147-164.

[7] 王武，杨富文. 不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用，2003，20(3)：473-476.
(Wang W, Yang F W. Delay-dependent robust and non-fragile H_∞ control for linear time-delay systems with uncertainties[J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(3): 473-476.)

[8] Zhang Xian-ming, Han Qing-long. A new finite sum inequality approach to delay-dependent H_∞ control of discrete-time systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2007, 18(6): 630-647.

[9] Zhang X M, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with state and input delays [J]. Automatica, 2005, 41(8): 1405-1412.

[10] 肖伸平，吴敏，张先明. 不确定时滞系统的时滞相关非脆弱鲁棒 H_∞ 控制[J]. 系统科学与数学，2007，27 (3)：401-411.
(Xiao S P, Wu M, Zhang X M. Non-fragile delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 2007, 27(3): 401-411.)

[11] Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63 (4): 741-750.

[12] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. Int J of Control, 2001, 74(14): 1447-1455.