

文章编号: 1001-0920(2009)08-1235-04

## 连续互联系统的模糊分散控制及新的稳定性条件

佟绍成, 赵斐斐

(辽宁工业大学 数学物理系, 辽宁 锦州 121001)

**摘要:** 针对一类连续模糊互联系统, 提出一种模糊分散控制器的设计方法, 并给出了保证控制系统稳定的更为宽松的充分条件. 应用 Lyapunov 函数法和线性矩阵不等式, 证明了模糊分散控制系统的稳定性. 仿真结果进一步验证了所提出的模糊分散控制方法的有效性.

**关键词:** 模糊互联系统; 模糊分散控制; 线性矩阵不等式; 稳定性分析

**中图分类号:** TP271.9      **文献标识码:** A

## Decentralized fuzzy control and new stabilization criterion for interconnected fuzzy systems

TONG Shao-cheng, ZHAO Fei-fei

(Department of Mathematics and Physics, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China.  
Correspondent: TONG Shao-cheng, E-mail: jztsc@sohu.com)

**Abstract:** A fuzzy decentralized controller is developed for a class of continuous-time interconnected fuzzy systems, and a stabilization criterion is proposed. By using Lyapunov function method and linear matrix inequalities (LMIs), the asymptotic stability of the closed-loop fuzzy decentralized system is proved. A simulation result shows the effectiveness of the proposed fuzzy decentralized controller.

**Key words:** Fuzzy interconnected systems; Decentralized fuzzy control; Linear matrix inequalities; Stable analysis

### 1 引言

基于 T-S 模糊模型的非线性不确定系统的控制, 成为处理非线性不确定复杂系统控制问题的有效方法之一, 并取得了许多研究成果<sup>[1-6]</sup>. 在基于 T-S 模糊模型的控制中, 包含两个重要问题: 一是系统的稳定性条件; 二是基于稳定性条件的模糊控制器的设计. 继文献[2]给出系统稳定的充分条件之后, 许多文献(如[3-5])相继给出了模糊系统更加宽松的稳定性条件, 所设计的模糊控制有效地克服了系统稳定的保守性<sup>[6]</sup>.

由于工业过程的日趋复杂化和大型化, 互联系统或称大系统已成为控制界的研究热点之一. 近年来, 国内外一些学者将 T-S 模糊控制方法引入非线性互联系统的控制, 用 T-S 模糊模型对非线性互联系统进行描述或建模, 在此基础上给出了模糊分散控制器的设计和稳定性条件<sup>[7-9]</sup>. 然而, 现有的模糊分散控制设计方法都是基于文献[2]的稳定性条件, 因此系统稳定的条件具有保守性. 为此, 文献[10]提

出了基于 T-S 模糊模型的连续互联系统的新的稳定性条件, 它将模糊系统稳定性条件<sup>[4]</sup>拓展到模糊互联系统, 取得了良好的控制效果. 对于文献[6]提出的新的模糊系统稳定性条件, 还没有在互联系统上得到推广.

本文针对一类模糊连续互联系统, 在文献[6]研究成果的基础上, 提出一种模糊分散控制设计方法, 给出了使模糊连续互联系统稳定的新的充分条件, 并用 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式证明了模糊分散系统的稳定性.

### 2 模糊分散控制器的设计

考虑由  $N$  个 T-S 模糊子系统组成的连续互联系统, 其第  $i$  个模糊子系统有如下  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, r_i$ ) 条模糊规则:

若  $z_{i1}(t)$  是  $F_{i1}^l$ ,  $z_{i2}(t)$  是  $F_{i2}^l$ ,  $\dots$ ,  $z_{ig}(t)$  是  $F_{ig}^l$ , 则

$$\dot{x}_i(t) = A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{j=1}^N R_{ij}^l x_j(t). \quad (1)$$

收稿日期: 2008-09-22; 修回日期: 2008-10-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674056); 辽宁省优秀青年人才基金项目(2005219001).

作者简介: 佟绍成(1960—), 男(满族), 辽宁锦州人, 教授, 博士生导师, 从事模糊控制等研究; 赵斐斐(1982—), 女, 吉林辽源人, 硕士生, 从事模糊控制的研究.

其中:  $F_{iq}^l (q = 1, 2, \dots, g)$  为模糊集合;  $z(t) = [z_{i1}(t), \dots, z_{ig}(t)]^T$  是可测系统变量, 即前件变量;  $A_i^l$  和  $B_i^l$  为系统矩阵和输入矩阵;  $R_{ij}^l$  为子系统  $S_i$  与  $S_j$  之间的关联项;  $x_i(t) \in R^{n_i}$  和  $u_i(t) \in R^{m_i}$  为第  $i$  个非线性子系统的状态向量和控制向量.

采用单点模糊化、乘积推理和平均加权反模糊化, 则第  $i$  个子模糊系统的模型为

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(z_{iq}(t)) [A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{j=1}^N R_{ij}^l x_j(t)], \quad (2)$$

其中  $\mu_i^l(z_{iq}(t))$  为下式定义的归一化隶属函数:

$$\begin{cases} \mu_i^l(z_{iq}(t)) = \frac{\alpha_i^l(z_{iq}(t))}{\sum_{l=1}^{r_i} \alpha_i^l(z_{iq}(t))}, & \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(z_{iq}(t)) = 1, \\ \alpha_i^l(z_{iq}(t)) = \prod_{l=1}^{r_i} F_{iq}^l(z_{iq}(t)), & \mu_i^l(z_{iq}(t)) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

式中  $F_{iq}^l(z_{iq}(t))$  为前件变量  $z_{iq}(t)$  在模糊集  $F_{iq}^l$  的隶属函数.

采用并行分布补偿技术设计各子模糊系统的控制器, 其第  $l (l = 1, 2, \dots, r_i)$  条模糊规则如下:

若  $z_{i1}(t)$  是  $F_{i1}^l$ ,  $z_{i2}(t)$  是  $F_{i2}^l, \dots, z_{ig}(t)$  是  $F_{ig}^l$ , 则

$$u_i(t) = -K_i^l x_i(t), \quad l = 1, 2, \dots, r_i. \quad (4)$$

模糊分散控制器为

$$u_i(t) = -\sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(z_{iq}(t)) K_i^l x_i(t), \quad (5)$$

其中  $K_i^l$  为待确定的静态增益反馈矩阵.

式(5)代入式(2), 得到模糊闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} \mu_i^l(z_{iq}(t)) \mu_i^m(z_{iq}(t)) (A_i^l - \\ & B_i^l K_i^m) x_i(t) + \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^N \mu_i^l(z_{iq}(t)) R_{ij}^l x_j(t). \end{aligned} \quad (6)$$

控制目标是设计模糊分散控制器(5), 使得模糊分散控制系统在 Lyapunov 函数意义下渐近稳定.

### 3 模糊分散控制系统的稳定性分析

本节给出保证控制系统(6)稳定的充分条件和控制设计算法.

**定理 1** 如果存在  $N$  个正定矩阵  $Q_i, \tilde{R}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ ,  $N_i^l, Y_i^{ll} (l = 1, 2, \dots, r_i)$ ,  $Y_i^{lm}, Y_i^{lmT} = Y_i^{ml} (l = 1, 2, \dots, r_i, m = 1, 2, \dots, r_i)$ ,  $Y_i^{lms} = Y_i^{smlT}$ ,  $Y_i^{lsm} = Y_i^{mslT}, Y_i^{mjs} = Y_i^{sjmT} (l = 1, 2, \dots, r_i - 2, m = l$

$+ 1, \dots, r_i - 1, s = m + 1, \dots, r_i)$ , 满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} \Pi_i^{ll} & R_{i1}^l Q_i & \dots & R_{iN}^l Q_i \\ * & -\tilde{R}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & -\tilde{R}_N \end{bmatrix} < Y_i^{ll}, \quad (7)$$

$l = 1, 2, \dots, r_i;$

$$\begin{bmatrix} \Pi_i^{lm} & \Psi_1 & \dots & \Psi_N \\ * & -3\tilde{R}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & -3\tilde{R}_N \end{bmatrix} \leq Y_i^{lm} + Y_i^{ml} + Y_i^{lmT}, \quad (8)$$

$l = 1, 2, \dots, r_i, m = 1, 2, \dots, r_i;$

$$\begin{bmatrix} \Pi_i^{lms} & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_N \\ * & -6\tilde{R}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & -6\tilde{R}_N \end{bmatrix} \leq Y_i^{lms} + Y_i^{lsm} + Y_i^{lmsT} + (Y_i^{lms})^T + (Y_i^{lsm})^T + (Y_i^{lms})^T, \quad (9)$$

$l = 1, 2, \dots, r_i - 2, m = l + 1, \dots, r_i - 1, s = m + 1, \dots, r_i;$

$$\begin{bmatrix} Y_i^{1l1} & Y_i^{1l2} & \dots & Y_i^{1lr_i} \\ Y_i^{2l1} & Y_i^{2l2} & \dots & Y_i^{2lr_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_i^{r_l 11} & Y_i^{r_l 12} & \dots & Y_i^{r_l 1r_i} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$l = 1, 2, \dots, r_i.$

其中

$$\Pi_i^{ll} = Q_i A_i^l T + A_i^l Q_i - N_i^{lT} B_i^{lT} - B_i^l N_i^l + N \tilde{R}_i,$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{lm} = & 2Q_i A_i^l T + 2A_i^l Q_i + Q_i A_i^m T + A_i^m Q_i - \\ & (N_i^l + N_i^m) T B_i^{lT} - B_i^l (N_i^l + N_i^m) - \\ & N_i^{lT} B_i^{mT} - B_i^m N_i^l + 3N \tilde{R}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{lms} = & 2Q_i (A_i^l + A_i^m + A_i^s) T - (N_i^s + N_i^m) T B_i^{lT} - \\ & (N_i^s + N_i^l) T B_i^{mT} - (N_i^l + N_i^m) T B_i^{sT} + \\ & 2(A_i^l + A_i^m + A_i^s) Q_i - B_i^l (N_i^s + N_i^m) - \\ & B_i^m (N_i^s + N_i^l) - B_i^s (N_i^l + N_i^m) + 6N \tilde{R}_i, \end{aligned}$$

$$\Gamma_j = 2(R_{ij}^l + R_{ij}^m + R_{ij}^s) Q_i,$$

$$\Psi_j = 2R_{ij}^l Q_i + R_{ij}^m Q_i,$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

则模糊状态分散控制器(5)使得连续时间模糊互联系统(6)在 Lyapunov 意义下渐近稳定.

**证明** 令  $G_i^l = A_i^l - B_i^l K_i^l, G_i^m = A_i^l - B_i^l K_i^m$ . 选取 Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^N x_i^T(t) P_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

对  $V(x(t))$  求时间的导数,得

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^N [\dot{x}_i^T(t) P_i x(t) + x_i^T(t) P_i \dot{x}(t)]. \tag{12}$$

式(6)代入式(12),并通过适当的加项和减项,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m \{ x_i^T(t) (G_i^{lmT} P_i + P_i G_i^{lm}) x_i(t) + \\ & \sum_{j=1}^N x_j^T(t) R_{ij}^T P_i x_i(t) + x_i^T(t) P_i \sum_{j=1}^N R_{ij}^l x_j(t) + \\ & \sum_{j=1}^N x_j^T(t) R_j x_j(t) - \sum_{j=1}^N x_j^T(t) R_j x_j(t) \} = \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m X^T \begin{bmatrix} \Delta_i & PP_{i1}^l & \cdots & PR_{iN}^l \\ * & -R_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -R_N \end{bmatrix} X. \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} X^T &= [x_1^T \quad x_2^T \quad \cdots \quad x_N^T], \\ \Delta_i &= G_i^{lmT} P_i + P_i G_i^{lm} + NR_i. \end{aligned}$$

显然,若式(13)中有

$$\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m \begin{bmatrix} \Delta_i & PR_{i1}^l & \cdots & PR_{iN}^l \\ * & -R_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -R_N \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

则  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , 系统在 Lyapunov 意义下渐近稳定.

式(14)左右两边同乘  $\text{diag}(P_i^{-1}, P_1^{-1}, \dots, P_N^{-1})$ , 并令  $P = Q_i^{-1}, N_i^l = K_i^l Q_i, \tilde{R}_i = Q_i R_i Q_i, i = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots, r_i$ . 则得

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m \begin{bmatrix} \Phi_i & R_{i1}^l Q_1 & \cdots & R_{iN}^l Q_N \\ * & -\tilde{R}_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -\tilde{R}_N \end{bmatrix} = \\ & \sum_{s=1}^{r_i} \mu_i^s \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m \begin{bmatrix} \Phi_i & R_{i1}^l Q_1 & \cdots & R_{iN}^l Q_N \\ * & -\tilde{R}_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -\tilde{R}_N \end{bmatrix} = \\ & \sum_{l=1}^{r_i} (\mu_i^l)^3 \begin{bmatrix} \Pi_i^{ll} & R_{i1}^l Q_1 & \cdots & R_{iN}^l Q_N \\ * & -\tilde{R}_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -\tilde{R}_N \end{bmatrix} + \\ & \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} (\mu_i^l)^2 \mu_i^m \begin{bmatrix} \Pi_i^{lm} & \Psi_1 & \cdots & \Psi_N \\ * & -3\tilde{R}_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -3\tilde{R}_N \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{r_i-2} \sum_{m=l+1}^{r_i-1} \sum_{s=m+1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m \mu_i^s \begin{bmatrix} \Pi_i^{lms} & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_N \\ * & -6\tilde{R}_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -6\tilde{R}_N \end{bmatrix} = \Omega, \tag{15}$$

其中

$$\Phi_i = Q_i A_i^T + A_i^l Q_i - N_i^{lT} B_i^{lT} - B_i^l N_i^m + N \tilde{R}_i.$$

如果线性矩阵不等式(7) ~ (9) 成立,则

$$\begin{aligned} \Omega < & \sum_{l=1}^{r_i} (\mu_i^l)^3 Y_i^{ll} + \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} (\mu_i^l)^2 \mu_i^m (Y_i^{lm} + Y_i^{ml} + \\ & Y_i^{lmT}) + \sum_{l=1}^{r_i-2} \sum_{m=l+1}^{r_i-1} \sum_{s=m+1}^{r_i} \mu_i^l \mu_i^m \mu_i^s (Y_i^{lms} + \\ & Y_i^{lsm} + Y_i^{msl} + Y_i^{lsmT} + Y_i^{mslT}) = \\ & \mu_i^1 \begin{bmatrix} \mu_i^1 I \\ \vdots \\ \mu_i^{r_i} I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_i^{111} & \cdots & Y_i^{1r_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_i^{r_i 11} & \cdots & Y_i^{r_i r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_i^1 I \\ \vdots \\ \mu_i^{r_i} I \end{bmatrix} + \cdots + \\ & \mu_i^{r_i} \begin{bmatrix} \mu_i^1 I \\ \vdots \\ \mu_i^{r_i} I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_i^{1r_i 1} & \cdots & Y_i^{1r_i r_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_i^{r_i r_i 1} & \cdots & Y_i^{r_i r_i r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_i^1 I \\ \vdots \\ \mu_i^{r_i} I \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \mu_i^1 I \\ \vdots \\ \mu_i^{r_i} I \end{bmatrix}^T \left( \sum_{l=1}^{r_i} \begin{bmatrix} Y_i^{ll1} & \cdots & Y_i^{lr_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_i^{r_i l1} & \cdots & Y_i^{r_i r_i} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mu_i^1 I \\ \vdots \\ \mu_i^{r_i} I \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{16}$$

如果线性矩阵不等式(10) 成立,则  $\Omega < 0$ . 模糊状态分散控制器(5) 使得连续时间模糊互联系统(6) 在 Lyapunov 意义下渐近稳定. □

### 4 系统仿真

考虑双机互联系统<sup>[10]</sup>, 它由如下两个子系统组成:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}(t) = x_{i2}(t), \quad i = 1, 2; \\ \dot{x}_{i2}(t) = \\ -\frac{D_i}{M_i} x_{i2}(t) + \frac{1}{M_i} u_i(t) + \\ \sum_{j=1}^2 \frac{E_i E_j Y_{ij}}{M_i} [\cos(\delta_{ij}^0 - \theta_{ij}) - \\ \cos(x_{i1}(t) - x_{j1}(t) + \delta_{ij}^0 - \theta_{ij})]. \end{cases} \tag{17}$$

有关参数及定义参见文献[10].

通过求解定理 1 中的线性矩阵不等式(7) ~ (10), 得到稳定的控制增益矩阵如下:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{bmatrix} 0.1146 & -0.3486 \\ -0.3486 & 1.2918 \end{bmatrix}, \\ Q_2 &= \begin{bmatrix} 0.1668 & -0.3960 \\ -0.3960 & 1.3343 \end{bmatrix}, \\ N_1^1 &= [1.4898 \quad -0.1199], \\ N_1^2 &= [1.3985 \quad 0.2664], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_1^3 &= [1.4017 \quad 0.2452], \\
 N_2^1 &= [2.1540 \quad -0.8766], \\
 N_2^2 &= [1.9668 \quad -0.4286], \\
 N_2^3 &= [1.9061 \quad -0.3617], \\
 K_1^1 &= [70.8849 \quad 19.0355], \\
 K_1^2 &= [71.5175 \quad 19.5053], \\
 K_1^3 &= [71.3941 \quad 19.4556], \\
 K_2^1 &= [38.4425 \quad 10.7509], \\
 K_2^2 &= [37.3416 \quad 10.7599], \\
 K_2^3 &= [36.5121 \quad 10.5639].
 \end{aligned}$$

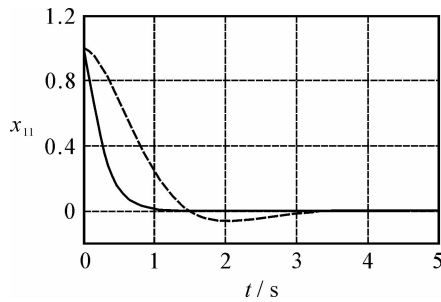


图 1 第 1 个子系统的状态  $x_{11}$

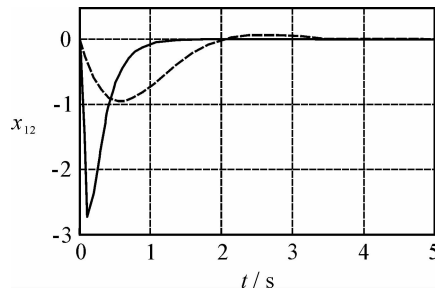


图 2 第 1 个子系统的状态  $x_{12}$

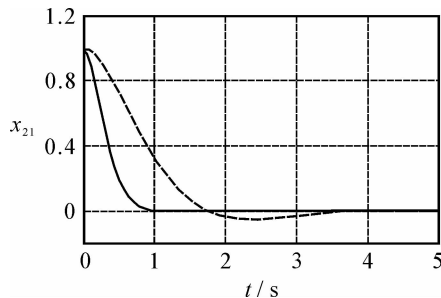


图 3 第 2 个子系统的状态  $x_{21}$

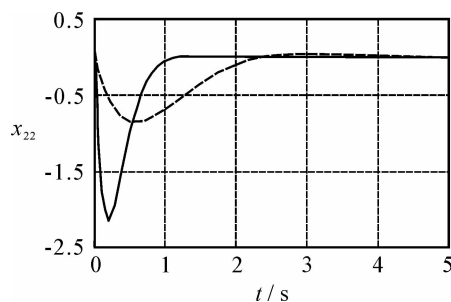


图 4 第 2 个子系统的状态  $x_{22}$

给定初始条件同文献[10],得到系统(17)的控制仿真结果如图 1 ~ 图 4 所示. 为了更直观地说明本文给出的系统稳定性条件比[10]给出的条件更好,将[10]中状态响应与本文状态响应加以比较. 其中:虚线表示[10]中状态响应,实线表示本文状态响应.

### 5 结 论

本文针对一类连续模糊互联系统,给出一种模糊分散控制设计方法和更为宽松的稳定性条件. 采用平行分布补偿算法设计控制器,应用 Lyapunov 函数法和线性矩阵不等式证明了模糊分散控制系统的稳定性. 仿真结果验证了所提出的模糊分散控制方法是有效的.

### 参考文献 (References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.
- [2] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.
- [3] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers; Relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(2): 250-265.
- [4] Kim E, Lee H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 523-534.
- [5] Liu X, Zhang Q. New approaches to  $H_\infty$  controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI[J]. Automatica, 2003, 39(5): 1571-1582.
- [6] Chun-Hsing Fang, Yang-Sheng Liu, Shih-Wei Kau, et al. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14(3): 386-397.
- [7] Wang W J, Luo C L. Stability and stabilization of fuzzy large-scale systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2004, 12(3): 309-315.
- [8] 蔡勇, 张友刚, 肖建. 基于线性矩阵不等式的参数不确定互联模糊大系统的分散鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(3): 457-462. (Cai Y, Zhang Y G, Xiao J. Linear matrix inequality based robust decentralized stabilization of interconnected fuzzy large-scale systems with parametric uncertainties [J]. Contrl Theory & Applications, 2004, 21(3): 457-462.)