

文章编号: 1001-0920(2009)08-1261-05

极点约束不确定系统非脆弱滤波器的设计

陈 森, 王道波, 王志胜

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘 要: 针对一类具有参数不确定性的线性系统, 研究其闭环极点区域约束下的鲁棒非脆弱滤波器的设计问题. 在对象及滤波器同时存在不确定性的情况下, 控制目标要求闭环系统鲁棒稳定, 干扰抑制性能指标小于给定的上界, 并且闭环极点配置于复平面上指定的圆盘内. 针对系统和滤波器具有乘法增益摄动的情况, 以线性矩阵不等式的形式给出了非脆弱滤波器的可解性条件. 数值算例表明了该方法的有效性.

关键词: 滤波器; 极点约束; 非脆弱性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Design of non-fragile filter for uncertain linear system with pole constraints

CHEN Miao, WANG Dao-bo, WANG Zhi-sheng

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.

Correspondent: CHEN Miao, E-mail: vocalist_chen@yahoo.cn)

Abstract: The design of robust and non-fragile filter with regional pole constraint in a disk is investigated for a class of uncertain systems with parametric uncertainties. Under the condition that the uncertainty is existed in the system and filter, the resulting design is that the closed-loop system is robustly stable, the disturbance attenuation index is lower than the upper bound, and the closed-loop poles are assigned in a specific disk region of the complex plane as well. Multiplicative perturbations are considered. Solvability condition for the existence of robust and non-fragile filter is derived in the form of a linear matrix inequality. An illustrative numerical example shows the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Filter; Pole constraints; Non-fragile; Linear matrix inequality

1 引 言

H_∞ 控制理论的日益成熟, 使得相应的滤波理论受到学者们的广泛关注, 并提出了一些有效的算法^[1], 但所有的结论都假设滤波器参数能够准确实现. 实际上, 由于在实现过程中不可避免地存在不确定因素, 传统的滤波器算法受到了限制. 自从 Keel 等提出非脆弱的概念后^[2], 对非脆弱控制器的研究取得了一定的成果^[3,4], 但对非脆弱滤波器的研究却较少^[5-7]. 文献[5,6]利用 Riccati 不等式提出了非脆弱卡尔曼滤波器的设计方法, 但求解过程过于复杂; 文献[7]利用 LMI 给出了非脆弱滤波的可解性条件以及设计方法, 但只考虑了滤波器的参数摄动, 未考虑对象的参数摄动, 更未考虑系统的动态性能, 即极点约束问题.

脆弱性是研究控制器参数变化对闭环系统的影响, 鲁棒性是研究系统参数不确定性对闭环系统的影响^[7]. 本文考虑具有系统参数不确定性以及具有乘性滤波器参数变化的鲁棒非脆弱 H_∞ 滤波问题, 利用 LMI 给出了不确定系统的 H_∞ 非脆弱滤波器设计方法. 该方法不但使滤波误差系统稳定, 保证系统具有一定的 H_∞ 性能, 而且能把闭环系统极点配置在指定的区域内.

2 问题描述

考虑如下线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t), \\ y(t) = Cx(t), z(t) = Lx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\omega(t) \in R^r$ 为干扰信号且能量有界, $z(t) \in R^q$ 为被估计信号, $y(t) \in R^p$ 为测量输出信号; A, B, C

收稿日期: 2008-09-21; 修回日期: 2009-01-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874037).

作者简介: 陈森(1981—), 男, 江苏宿迁人, 博士生, 从事鲁棒控制、非脆弱控制的研究; 王道波(1957—), 男, 河北易县人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、高精度伺服控制等研究.

和 L 为已知的系统矩阵.

构造如下形式的全阶滤波器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t), \hat{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\hat{x}(t)$ 为滤波器状态; $\hat{z}(t)$ 为 $z(t)$ 的状态估计; A_f, B_f 和 C_f 为滤波器参数矩阵. 假设系统和滤波器参数具有乘性参数变化, 即

$$\begin{cases} A \rightarrow A(I + \Delta_1), B \rightarrow B(I + \Delta_2), \\ A_f \rightarrow A_f(I + \Delta_3), B_f \rightarrow B_f(I + \Delta_4). \end{cases} \quad (3)$$

且有如下摄动形式:

$$\begin{cases} [\Delta_1 \ \Delta_3] = E_1 H [F_1 \ F_3], \\ [\Delta_2 \ \Delta_4] = E_2 H [F_2 \ F_4]. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $E_i (i = 1, 2)$ 和 $F_i (i = 1, \dots, 4)$ 为已知常阵, H 满足 $H^T H \leq I$.

对滤波器进行状态变换^[7], 并令 $\hat{x}(t) = T\tilde{x}(t)$, 则变换后的滤波器为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = TA_f T^{-1} \tilde{x}(t) + TB_f y(t), \\ \tilde{z}(t) = C_f T^{-1} \tilde{x}(t), \tilde{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

由式(1)和(5)得滤波误差系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\omega(t), \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \tilde{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t),$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ TB_f C & TA_f T^{-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [L \quad -C_f T^{-1}].$$

本文的目标是设计滤波器(2), 对于所有容许的系统和滤波器增益变化(3), 使得:

1) 在外部扰动为零的情况下, 系统(6)渐近稳定;

2) 在零初始条件下, 系统(6)具有 H_∞ - γ 性能 ($\gamma > 0$);

3) 系统(6)具有圆盘极点约束, 即 $\sigma(\tilde{A}) \subset D(-q, r)$, 其中 $\sigma(\tilde{A})$ 表示矩阵 \tilde{A} 的谱集合.

3 相关引理

引理 1^[8] 设 $A \in R^{n \times n}$ 为给定矩阵, 则 $\sigma(A) \subset D(-q, r)$, 当且仅当存在对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A_q \\ A_q^T & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中 $A_q^T = (A + qI)/r$.

引理 2^[9] 对于给定的具有合适维数的实矩阵 U, W, H , 以及对称矩阵 N , 以下命题等价:

1) 对于满足 $H^T H \leq I$ 的任意 H , 有

$$N + UHW + W^T H^T U^T < 0;$$

2) 存在实数 $\epsilon > 0$, 使得

$$N + \epsilon U U^T + \epsilon^{-1} W^T W < 0.$$

4 主要结果

推论 1 设 $A \in R^{n \times n}$ 为给定矩阵, 则 $\sigma(A) \subset D(-q, r)$, 当且仅当存在对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$(A + \alpha I)P + P(A + \alpha I)^T + r^{-1}(A + \alpha I)P(A + \alpha I)^T < 0, \quad (8)$$

其中 $\alpha = q - r$.

证明 令 $X = P^{-1}$, 代入式(9), 两端同乘以 r , 得

$$\begin{bmatrix} -rX & A + qI \\ (A + qI)^T & -rX^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

由 Schur 补引理, 式(9)等价于

$$\begin{cases} -rX^{-1} < 0, \\ -rX + r^{-1}(A + qI)X(A + qI)^T < 0. \end{cases} \quad (10)$$

代入 $q = \alpha + r$, 整理即得式(8). \square

定理 1 给定圆盘区域 $D(-q, r)$ 以及常数 $\gamma > 0$, 对于系统(6), 若存在对称正定阵 $P > 0$, 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} \Xi & * & * & * \\ \tilde{B}^T & -\gamma^2 I & * & * \\ \tilde{C}P & 0 & -I & * \\ P(\tilde{A} + \alpha I)^T & 0 & 0 & -rP \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

其中

$$\Xi = (\tilde{A} + \alpha I)P + P(\tilde{A} + \alpha I)^T,$$

$$\alpha = q - r.$$

则系统(6)满足从 ω 到 \tilde{z} 的传递函数 $\|T_{\tilde{z}\omega}\|_\infty < \gamma$, 且是 D 稳定的.

证明 由 Schur 补, 式(11)等价于

$$(\tilde{A} + \alpha I)P + P(\tilde{A} + \alpha I)^T + \gamma^{-2} \tilde{B} \tilde{B}^T + P \tilde{C}^T \tilde{C} P + r^{-1}(\tilde{A} + \alpha I)P(\tilde{A} + \alpha I)^T < 0, \quad (12)$$

即

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^T + \gamma^{-2} \tilde{B} \tilde{B}^T + P \tilde{C}^T \tilde{C} P + 2\alpha P + r^{-1}(\tilde{A} + \alpha I)P(\tilde{A} + \alpha I)^T < 0.$$

用 $Q = P^{-1}$ 分别左乘和右乘上式, 得

$$Q\tilde{A} + \tilde{A}^T Q + \gamma^{-2} Q\tilde{B} \tilde{B}^T Q + \tilde{C}^T \tilde{C} + 2\alpha Q + r^{-1}Q(\tilde{A} + \alpha I)Q^{-1}(\tilde{A} + \alpha I)^T Q < 0,$$

其中 $Q > 0$ 和 $Q^{-1} > 0$ 对称正定. 故有分解 $Q^{-1} = VV^T$, V 满秩. 进而有

$$Q(\tilde{A} + \alpha I)Q^{-1}(\tilde{A} + \alpha I)^T Q = [Q(\tilde{A} + \alpha I)V][Q(\tilde{A} + \alpha I)V]^T > 0,$$

从而有

$$Q\tilde{A} + \tilde{A}^T Q + \gamma^{-2} Q\tilde{B} \tilde{B}^T Q + \tilde{C}^T \tilde{C} < 0.$$

由界实定理知: 1) 系统(6)稳定; 2) $\|T_{\tilde{z}\omega}\|_\infty < \gamma$.

同理,由式(12)可得

$$(\tilde{A} + \alpha I)P + P(\tilde{A} + \alpha I)^T + r^{-1}(\tilde{A} + \alpha I)P(\tilde{A} + \alpha I)^T < 0.$$

由推论 1 知, $\sigma(\tilde{A}) \subset D(-q, r)$, 即闭环系统极点位于圆盘区域 $D(-q, r)$ 内. \square

定理 2 给定圆盘区域 $D(-q, r)$ 以及常数 $\gamma > 0$, 对于滤波误差系统(6), 考虑式(3)形式的摄动. 若存在常数 $\epsilon_i > 0 (i = 1, \dots, 4)$, 矩阵 $A_F \in R^{n \times n}, B_F \in R^{n \times p}$, 正定对称阵 $S, T \in R^{n \times n} > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ * & \Theta_3 \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

则系统(6) 闭环传函 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, 且闭环极点位于圆盘区域 $D(-q, r)$ 内. 其中

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} -rS & -rS & SB & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16} \\ * & -rR & RB & L^T & \Theta_{25} & \Theta_{26} \\ * & * & \Theta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Theta_{55} & \Theta_{56} \\ * & * & * & * & * & \Theta_{66} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} SAE_1 & SBE_2 & 0 & 0 \\ SAE_1 & SBE_2 & A_F E_1 & B_F E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_3 = \text{diag}\{-\epsilon_1 I, -\epsilon_2 I, -\epsilon_3 I, -\epsilon_4 I\};$$

$$\Theta_{14} = L^T - C_F^T,$$

$$\Theta_{15} = \Theta_{16} = SA + qS,$$

$$\Theta_{25} = RA + B_F C + A_F + qS,$$

$$\Theta_{26} = RA + B_F C + qR,$$

$$\Theta_{33} = -\gamma^2 I + \epsilon_1 F_2^T F_2,$$

$$\Theta_{55} = -rS + \epsilon_2 F_1^T F_1 +$$

$$\epsilon_3 F_3^T F_3 + \epsilon_4 C^T F_4^T F_4 C,$$

$$\Theta_{56} = -rS + \epsilon_2 F_1^T F_1 + \epsilon_4 C^T F_4^T F_4 C,$$

$$\Theta_{66} = -rR + \epsilon_2 F_1^T F_1 + \epsilon_4 C^T F_4^T F_4 C.$$

若上述 LMI 有解, 则非脆弱滤波器参数可由下式求得:

$$A_f = (S - R)^{-1} A_F,$$

$$B_f = (S - R)^{-1} B_F, C_f = C_F.$$

证明 选择矩阵 $X = P^{-1}$, 满足条件的非脆弱滤波器设计是使式(11) 成立. 令

$$X = \begin{bmatrix} R & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}, X^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}.$$

其中: $R > 0, S > 0$.

不失一般性, 假设矩阵 P_2 和 X_2 为满秩阵. 取 $J_1 = \begin{bmatrix} S^{-1} & I \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix}$, 则有 $PJ_1 = \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$. 依次用变换阵

$$\text{diag}\{X, I, I, X\}, \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & I & & & \\ & & & I & & \\ & & & & I & \\ & & & & & I \end{bmatrix}, \text{diag}\{J_1, I, I,$$

$J_1\}$, 对式(11) 进行合同变换, 得

$$\begin{bmatrix} -rS^{-1} & -rI & B & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} \\ * & -rR & RB & L^T & \Phi_{25} & \Phi_{26} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -rS^{-1} & -rI \\ * & * & * & * & * & -rR \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

其中

$$\Phi_{14} = S^{-1} L^T - X_2 T^{-T} C_f^T,$$

$$\Phi_{15} = AS^{-1} + qS^{-1}, \Phi_{16} = A + qI,$$

$$\Phi_{25} = RAS^{-1} + P_2 TB_f CS^{-1} +$$

$$P_2 TA_f T^{-1} X_2^T + qI,$$

$$\Phi_{26} = RA + P_2 TB_f C + qR.$$

用 $\text{diag}\{S, I, I, I, S, I\}$ 对式(14) 进行合同变换, 得

$$\begin{bmatrix} -rS & -rS & SB & \Psi_{14} & \Psi_{15} & \Psi_{16} \\ * & -rR & RB & L^T & \Psi_{25} & \Psi_{26} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -rS & -rS \\ * & * & * & * & * & -rB \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

其中

$$\Psi_{14} = L^T - SX_2 T^{-T} C_f^T,$$

$$\Psi_{15} = \Psi_{16} = AS + qS,$$

$$\Psi_{25} = RA + P_2 TB_f C + P_2 TA_f T^{-1} X_2^T S + qS,$$

$$\Psi_{26} = RA + P_2 TB_f C + qR.$$

令 $T = X_2^T S$, 则 $P_2 T = S - R$. 代入式(15), 并考虑被控系统和滤波器的参数摄动(4), 将确定部分和摄动部分展开. 连续运用引理 2, 并令 $A_f = (S - R)A_f, B_f = (S - R)B_f, C_f = C_f$, 即得式(13). \square

注 1 式(13) 既是关于矩阵的变量, 又是关于标量 γ 的线性矩阵不等式组, 故可将 γ 作为一个优化变量, 得到最优扰动衰减水平. 即可通过求解如下凸优化问题:

$$\min_{S, R, A_f, B_f, C_f, \epsilon_i (i=1, \dots, 4)} \gamma, \text{ s. t. (13)}. \quad (16)$$

设计系统(1) 的最优全阶非脆弱 H_∞ 滤波器. 由式(16) 可求出最优扰动衰减水平和满足要求的滤波器参数.

注 2 当滤波器摄动参数变为 $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$ 时, 设计方法便退化为常规滤波器的设计方法.

5 算例与仿真

考虑如下线性连续系统:

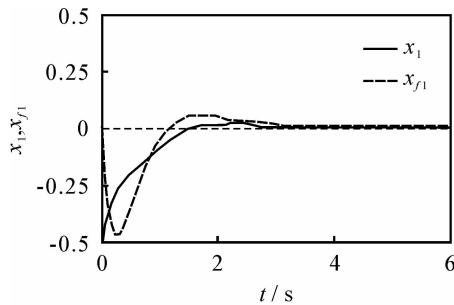
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \\ &\quad [0.5 \ 0.9 \ -0.5]^T \omega(t), \\ y(t) &= [3 \ -2 \ 1] x(t), \\ z(t) &= [-2 \ 1 \ -2] x(t). \end{aligned}$$

系统和滤波器摄动参数为

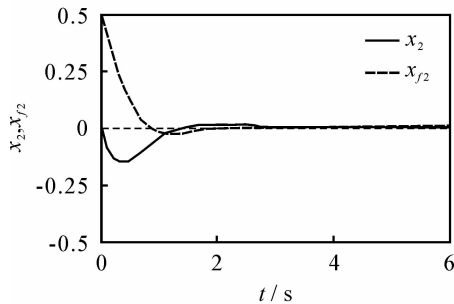
$$\begin{aligned} E_1 &= [0.1 \ 0 \ 0.2]^T, E_2 = 0.2, \\ F_1 &= [0.1 \ 0.1 \ 0.2], F_2 = 0.1, \\ F_3 &= [0.2 \ 0.1 \ 0.3], F_4 = 0.03. \end{aligned}$$

给定圆盘区域 $D(-5.0, 3.6)$, 应用 Matlab 中 LMI 工具箱求解优化问题(16). 在具有可行解的前提下, 可得最优 $\gamma = 0.5945$ 时的滤波器参数

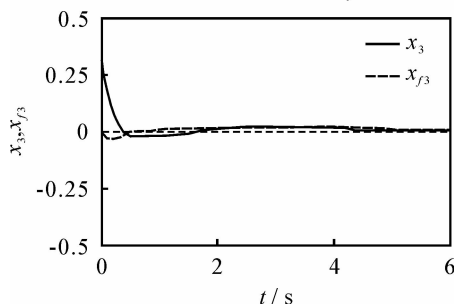
$$A_f = \begin{bmatrix} -2.8950 & -1.3981 & -0.5411 \\ 4.2442 & -7.1420 & -0.0534 \\ 3.1648 & -0.0191 & -2.1029 \end{bmatrix},$$



(a) 系统 x_1 和滤波器 x_{f1}



(b) 系统 x_2 和滤波器 x_{f2}



(c) 系统 x_3 和滤波器 x_{f3}

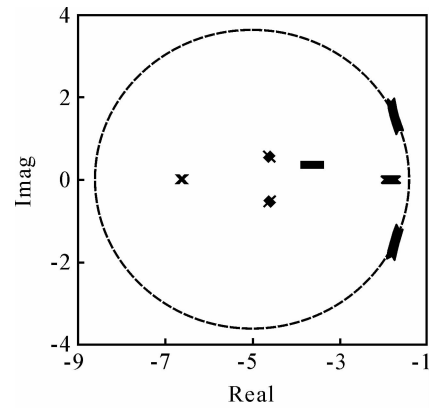
图 1 系统状态和滤波器状态

$$\begin{aligned} B_f &= [-1.1003 \ -3.3353 \ 0.4222]^T, \\ C_f &= [-1.6927 \ 0.8775 \ -0.5675]. \end{aligned}$$

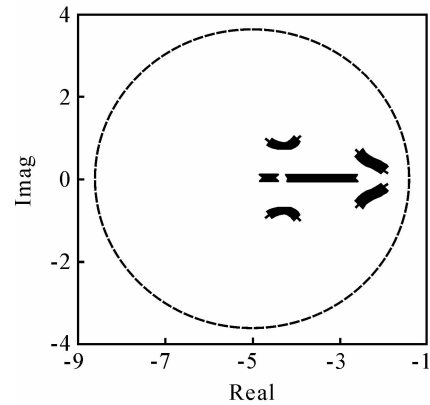
为说明本文非脆弱滤波器设计方法的优越性, 与常规滤波器($\Delta_3 = \Delta_4 = 0$) 进行比较. 在相同的极点约束区域, 常规滤波器的最优扰动抑制指标 $\gamma' = 0.5001$. 该滤波器在承受式(4) 参数变化时($H = I$), 最优扰动抑制比 $\gamma'' = 16.0243$. 调整极点约束区域参数, 可得出类似的对比结果. 说明本文设计的非脆弱滤波器具有明显的优势.

给定系统初始状态 $x = [-0.5 \ 0.5 \ 0.3]$, 在无外部扰动的情况下, 系统状态及滤波器状态如图 1 所示. 由图 1 可知, 系统状态均收敛于 0, 系统渐近稳定.

取 $H = \sin t$ (t 为任意实数), 满足 $H^T H \leq 1$. 系统(6) 在各时间点的极点分布如图 2 所示.



(a) $\gamma = 0.5945$



(b) $\gamma = 1.2$

图 2 闭环系统极点分布

图 2(a) 为最优扰动抑制下的极点分布, 将分布在区域边缘的极点导入工作区, 经计算得其距离 $(-5.0, 3.6)$ 的距离为 $3.5953 < 3.6$; 图 2(b) 为放宽扰动抑制要求的极点分布. 由此可知, 在多目标优化问题中, 一个目标的最优化往往以牺牲其他目标为代价. 因此, 系统的设计应在多相性能间权衡综合考虑.

6 结 论

本文针对一类不确定系统,利用 LMI 设计了具有区域极点约束下的非脆弱滤波器.该方法不但使滤波误差系统稳定,保证系统具有一定的 H_∞ 性能,而且能把闭环系统极点配置在指定的区域内.仿真实例表明该方法是有效的.

参考文献 (References)

- [1] Palhares R M, Peres P L D. Robust H_∞ filter design with pole constraints for discrete-time system[J]. J of Franklin Institute, 2000, 337(6): 1696-1703.
- [2] Keel L H, Bhattacharyya S P. Robust, fragile or optimal[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1098-1105.
- [3] Yang G H, Wang J L. Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations [J]. Automatica, 2001, 37(5): 727-737.
- [4] 王武, 杨富文. 具有控制器增益变化的不确定时滞系统鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(6): 1043-1046.
(Wang W, Yang F W. Robust H_∞ Control for linear time-delay uncertain systems with controller gain variations[J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(6): 1043-1046.)
- [5] Yang G H, Wang J L. Robust non-fragile Kalman filtering for uncertain linear systems with estimation gain uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(2): 343-348.
- [6] Yang G H, Che W W. Non-fragile H_∞ filter design with additive gain variations[C]. Proc of 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 2006: 4775-4780.
- [7] 王武, 郭祥贵, 杨富文. 线性系统的非脆弱 H_∞ 滤波 [J]. 控制与决策, 2008, 23(5): 503-506.
(Wang W, Guo X G, Yang F W. Non-fragile H_∞ filtering for linear system[J]. Control and Decision, 2008, 23(5): 503-506.)
- [8] Garcia G, Bernussou J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(1): 184-190.
- [9] Singh V. Robust stability of cellular neural networks with delay: Linear matrix inequality approach[J]. IEE Proc of Control Theory and Application, 2004, 151(1): 125-129.

(上接第 1260 页)

参考文献 (References)

- [1] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization [C]. IEEE Int Conf on Neural Networks. Piscataway: IEEE Service Center, 1995: 1942-1948.
- [2] Shi Y, Eberhart R. A modified particle swarm optimizer [C]. IEEE World Congress on Computational Intelligence. Piscataway: IEEE Press, 1998: 69-73.
- [3] Shi Y, Eberhart R C. Fuzzy adaptive particle swarm optimization[C]. Proc of IEEE Conf on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 2001: 101-106.
- [4] Zhang L P, Yu H J, Hu S X. A new approach to improve particle swarm optimization[C]. Lecture Notes in Computer Science. Chicago: Springer-Verlag, 2003: 134-139.
- [5] Jiang C W, Etorre B. A hybrid method of chaotic particle swarm optimization and linear interior for reactive power optimization [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2005, 68(1): 57-65.
- [6] Chen G M, Huang X B, Jia J Y, et al. Natural exponential inertia weight strategy in particle swarm optimization[C]. Proc of 6th Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian: IEEE Press, 2006: 3672-3675.
- [7] Jiao B, Lian Z G, Gu X S. A dynamic inertia weight particle swarm optimization algorithm [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2008, 37(3): 698-705.
- [8] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm: Explosion, stability and convergence in multi-dimensional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.
- [9] Trelea I C. The particle swarm optimization algorithm: Convergence analysis and parameter selection [J]. Information Processing Letters, 2003, 85(6): 317-325.
- [10] 刘洪波, 王秀坤, 谭国真. 粒子群算法的收敛性分析及其混沌改进算法[J]. 控制与决策, 2006, 21(6): 636-640, 645.
(Liu H B, Wang X K, Tan G Z. Convergence analysis of particle swarm optimization and its improved algorithm based on chaos[J]. Control and Decision, 2006, 21(6): 636-640, 645.)