第 24 卷 第 8 期 控 制 与 决 策 2009 年 8 月
Vol. 24 No. 8 Control and Decision Aug. 2009

文章编号：1001-0920(2009)08-1161-06

随机系统输出概率密度函数的有限时间镇定

栾小丽，刘 飞
（江南大学 自动化研究所，江苏 无锡 214122）

摘 要：针对一类含有限能量未知扰动的随机动态系统，研究基于随机分布函数的有限时间控制问题．通过 B 样条逼近建立了输出概率密度函数(PDF)与权值之间的对应关系，利用线性矩阵不等式，给出了基于观测器的 PDF 有限时间控制器的参数化设计方法．采用该方法设计的控制器，可使系统对所有满足条件的未知扰动是随机有限时间有界和随机有限时间镇定的．仿真实例验证了所提出方法的有效性．

关键词：随机动态系统；概率密度函数；随机有限时间有界；随机有限时间镇定；线性矩阵不等式
中图分类号：TP13 **文献标识码**：A

Finite time stabilization for output probability density function of stochastic system

LUAN Xiao-li, *LIU Fei*
(Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: LIU Fei, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn)

Abstract: A finite time control problem for a class of dynamic stochastic systems with norm bounded exogenous disturbance is studied based on stochastic distribution function. B-spline approximation is applied so that the output probability density function (PDF) of dynamic stochastic system can be formulated in terms of the dynamic weightings. The parameters design method of finite time controller for PDF is provided based on linear matrix inequality and observer. The designed finite time controller makes the system stochastic finite time bounded and stabilizable for all the admissible exogenous disturbances. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Stochastic system; Probability density function; Stochastic finite time boundedness; Stochastic finite time stabilization; Linear matrix inequalities

1 引 言

在许多工业过程中，如炼钢、造纸、粮食加工等，反馈量测信息往往是系统的在线随机输出分布，并非输出变量在样本时刻的量值．随着这些工业的发展，众多学者对随机动态系统的输出概率密度函数(PDF)进行研究[1]，提出了多种控制方法，如非线性随机控制[2]、鲁棒控制[3]、概率控制[4]、分布形状控制[5]、最小熵控制[6]、PID 控制[7]等．现有的结论主要集中在无穷时间区间内的特性，并不能反映系统的暂态性能．

在实际 PDF 控制中，希望系统能满足一定的暂态性能要求，如要求控制系统的轨迹不能超过某个给定的界限．为了研究系统的暂态性能，文献[8]提出了短时间稳定性(即有限时间稳定性)的概念，进而分析了系统的有限时间控制问题．最近，一些学者对常规线性系统或广义系统进行研究[9-12]，但涉及随机系统相关问题的文献却很少．

本文通过 B 样条逼近，基于观测器研究随机动态系统的 PDF 有限时间控制问题．目标是设计有限时间控制器，对于所有满足条件的外部扰动，闭环系统是随机有限时间有界和随机有限时间镇定的．仿真结果表明了所提出方法具有可行性．

2 问题描述和分析

在随机动态系统中，考虑控制输入为 $u(t) \in R^m$，量测输出为 $y(t) \in [a,b]$ 的情形．在任意时刻，$y(t)$ 的分布可用其概率密度函数 $\gamma(y,u(t))$ 表述为

收稿日期：2008-09-16；**修回日期**：2008-12-29．
基金项目：国家自然科学基金项目(60574001)；江苏省“六大人才高峰”项目；江南大学创新团队发展计划项目．
作者简介：栾小丽(1979—)，女，江苏泰州人，博士生，从事非线性控制、系统滤波的研究；刘飞(1965—)，男，安徽宣城人，教授，博士生导师，从事鲁棒控制、神经网络等研究．

$$P\{a \leqslant y(t) < \zeta, u(t)\} = \int_a^\zeta \gamma(y, u(t))\mathrm{d}y.$$

其中 $P\{a \leqslant y(t) \leqslant \zeta, u(t)\}$ 表示系统在 $u(t)$ 作用下，输出 $y(t)$ 落在区间$[a,\zeta]$内的概率，即 $y(t)$ 的概率密度函数 $\gamma(y,u(t))$ 由 $u(t)$ 控制. 假定区间$[a,b]$已知，$\gamma(y,u(t))$ 连续且有界. 由 B 样条逼近原理[13]知，可用 B 样条来逼近概率密度函数 $\gamma(y,u(t))$[14]. 在无逼近误差的条件下，有

$$\gamma(y, u(t)) = \sum_{i=1}^n w_i B_i(y).$$

其中：$w_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是权值系数，$B_i(y)$ 是预先选定的基函数.

PDF 需要满足自然隐含条件

$$\int_a^b \gamma(y, u(t))\mathrm{d}y = 1.$$

即 w_i 一定能用一组数 $w_j(j=1,2,\cdots,n)$ 来表示，这意味着 n 个权值只有 $n-1$ 个是独立的. 在一些工业应用中，如造纸中的纤维长度分布与系统的动态变化密切相关. 一般而言，概率密度函数的动态改变可用非线性偏微分方程的解来表达[14]. 系统的 PDF 模型可表示为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + f(x(t)),\\ v(t) = Ex(t),\\ \gamma(y,u(t)) = C(y)v(t) + L(y),\ y \in [a,b].\end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t) \in R^m$ 是状态向量，$u(t) \in R^m$ 是控制输入，$v(t)$ 是权值向量；A, B_1 和 E 是已知的参数矩阵；$C(y)$ 和 $L(y)$ 是基函数向量，且

$$C(y) = \begin{bmatrix} B_1(y) - \dfrac{B_n(y)}{\int_a^b B_n(y)\mathrm{d}y}\int_a^b B_1(y)\mathrm{d}y \\ \vdots \\ B_{n-1}(y) - \dfrac{B_n(y)}{\int_a^b B_n(y)\mathrm{d}y}\int_a^b B_{n-1}(y)\mathrm{d}y \end{bmatrix},$$

$$L(y) = B_n(y) \Big/ \int_a^b B_n(y)\mathrm{d}y,$$

$$v(t) = [w_1(t) \quad w_2(t) \quad \cdots \quad w_{n-1}(t)]^{\mathrm{T}}.$$

上式反映了权系数系统的状态变量与控制输入之间的关系，也描述了 B 样条函数对概率密度函数的逼近，同时揭示了随机分布系统与传统系统模型之间的继承关系.

由上述描述可知，一旦选定了一组基函数，$C(y)$ 和 $L(y)$ 便已知.

假设系统的参数在某个有界区间随机变化，并且考虑系统受到未知扰动的影响，则系统(1) 可表述为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1u(t) + \\ \qquad B_2w(t) + f(x(t)),\\ \gamma(y,u(t)) = C(y)Ex(t) + L(y).\end{cases} \tag{2}$$

其中：$w(t) \in R^q$ 是未知输入信号，假设在有限时间 $T > 0$ 内，满足条件

$$\int_0^T w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t \leqslant d,\ d \geqslant 0; \tag{3}$$

$A(t) = A + \Delta A$, ΔA 是由系统的参数随机变化引起的不确定性，可描述为 $\Delta A = DF(t)H$. 式中：D 和 H 分别为适当维数的常矩阵；时变矩阵 $F(t)$ 随机变化，且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$.

对于式(2) 中的非线性环节 $f(x(t))$，可用单隐层神经网络 $N(x(t), W_1, W_2)$ 来表示[15]，将其写成矩阵向量形式

$$N(x(t), W_1, W_2) = \boldsymbol{\Psi}_2[W_2\boldsymbol{\Psi}_1[W_1x]].$$

其中 W_1 和 W_2 为权矩阵；

$$\boldsymbol{\Psi}_i[\xi] = [\psi_1(\xi_1),\ \cdots,\ \psi_{n_i}(\xi_{n_i})]^{\mathrm{T}},\ i = 1,2.$$

式中 $\psi_j(\xi_j)(j=1,2,\cdots,n_i)$ 为神经元基函数，i 为网络层数，n 为神经元数.

假设 1 对于

$$\psi_j(\xi_j) \in [-\lambda_j, \lambda_j],\ \lambda_j > 0,$$
$$\forall\, t \geqslant 0, \forall\, \xi_j \in R, \psi_j(0) = 0.$$

隐含层和输出层基函数的集合为

$$M = \Big\{\psi_j(\cdot): R \to R \mid \psi_j(\xi_j) = \lambda_j\Big(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\xi_j/q_j}}{1 + \mathrm{e}^{-\xi_j/q_j}}\Big), q_j, \lambda_j > 0\Big\}.$$

网络的所有连接权值都可通过反传算法来调节.

根据神经网络理论，对于给定精度的 $\rho > 0$，存在如下最优的逼近权值：

$$\{W_1^*, W_2^*\} = \underset{\{W_1^*, W_2^*\}}{\arg\min}\{\max\| f(x) - N(x(t), W_1, W_2)\|\},$$

满足

$$\max\| f(x) - N(x(t), W_1, W_2)\| \leqslant \rho\| x(t)\|.$$

定义激活函数导数的最大和最小值为

$$s_j(k, \psi_j) = \begin{cases}\max_{\xi_j} \partial\psi_j(\xi_j)/\partial\xi_j, k = 1;\\ \min_{\xi_j} \partial\psi_j(\xi_j)/\partial\xi_j, k = 0.\end{cases}$$

则有

$$\psi_j(\xi_j) = h_j(0)s_j(0, \psi_j) + h_j(1)s_j(1, \psi_j),$$

其中 $h_j(k) \geqslant 0$, $k = 0,1$, 且 $h_j(0) + h_j(1) = 1$. 因此对于 $\psi_j(\xi_j) \in M$, 有 $s_j(0, \psi_j) = 0, s(1, \psi_j) = \lambda_j/2q_j$.

定义第 $i(i=1,2)$ 层神经网络的 n_i 维系数向量

$$\gamma_{n_i} = \gamma_{n_i}(\sigma) = \{\sigma \in R^{n_i} \mid \sigma_j \in \{0,1\}, j = n_1, n_2\}, \tag{4}$$

则有

$$N(x(t),W_1^*,W_2^*)=$$

$$\boldsymbol{\Psi}_2\left[W_2^*\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{1}h_{11}(k)s_{11}(k,\psi_{11})(W_1^*x)_1\\ \vdots\\ \sum_{k=0}^{1}h_{1n_1}(k)s_{1n_1}(k,\psi_{1n_1})(W_1^*x)_{n_1}\end{bmatrix}\right]=$$

$$\sum_{\sigma\in\gamma_{n_2}\oplus\gamma_{n_1}}\mu_\sigma A_\sigma(\sigma,\boldsymbol{\Psi},W^*)x(t).\tag{5}$$

其中

$$A_\sigma=\mathrm{diag}[s_{2i}(k_{2i},\psi_{2i})]W_2^*\,\mathrm{diag}[s_{1i}(k_{1i},\psi_{1i})]W_1^*;\tag{6}$$

$$\sum_{\sigma\in\gamma_{n_2}\oplus\gamma_{n_1}}\mu_\sigma=1,h_{ij}(\sigma_{ij})\geqslant 0,\sigma_{ij}=0,1;$$

$$h_{ij}(0)+h_{ij}(1)=1,i=1,2,j=n_1,n_2.$$

通过神经网络模型逼近非线性系统(2)，可得到线性微分方程组合

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A'+\Delta A)x(t)+B_1u(t)+\\ \qquad B_2w(t)+\Delta f(x(t)),\\ \gamma(y,u(t))=C(y)Ex(t)+L(y).\end{cases}\tag{7}$$

其中：$A'=\sum_{\sigma}\mu_\sigma(A_\sigma+A)$；$\Delta f(x)$ 是神经网络逼近非线性函数 $f(x(t))$ 时产生的非线性不确定项，且满足

$$\Delta f(x)=f(x(t))-\sum_{\sigma}\mu_\sigma A_\sigma x(t)\leqslant\rho\|x(t)\|.\tag{8}$$

为了便于描述，以下用 $\gamma(t)$ 代替 $\gamma(y,u(t))$.

3　有限时间控制器设计

在 PDF 控制的实际应用中，系统的状态往往是不可测的，因此难以直接用状态反馈控制律对系统进行控制，这便引出了基于观测器的方法. 与确定性系统中将系统的输出变量 $y(t)$ 引入观测器不同，本文利用系统的随机输出概率密度函数 $\gamma(t)$，构造如下观测器和控制器：

$$\dot{\hat{x}}=A'\hat{x}+B_1u+K_1(\gamma(t)-C(y)E\hat{x}-L(y)),\tag{9}$$

$$u(t)=-K_2\hat{x}(t).\tag{10}$$

其中：$\hat{x}$ 是观测器状态变量，K_1 和 K_2 分别是观测器和控制器增益.

将观测器(9)和控制器(10)代入系统(7)，并令 $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$，可得到 PDF 闭环系统方程

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}x(t)+\tilde{B}w(t)+\tilde{E}\Delta f(\tilde{x}).\tag{11}$$

其中

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A'+\Delta A-B_1K_2 & B_1K_2\\ \Delta A & A'-K_1C(y)E\end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}B_2\\ B_2\end{bmatrix},\ \tilde{E}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix},\ \Delta f(\tilde{x})=\begin{bmatrix}\Delta f(x)\\ \Delta f(e)\end{bmatrix}.$$

本文的目的是设计有限时间控制器，使得对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$ 的 $F(t)$ 和满足条件(3)的未知扰动 $w(t)$，PDF 闭环系统(11)是有限时间有界和有限时间镇定的.

首先引入如下定义：

定义 1　设 $u(t)=0$，对于满足条件(3)的 $w(t)$，如果有下列条件成立：

$$x_0^{\mathrm{T}}Rx_0\leqslant c_1\Rightarrow x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)<c_2,\quad\forall t\in[0\quad T].\tag{12}$$

则系统(2)关于 (c_1,c_2,T,R,d) 有限时间有界. 其中：$c_1<c_2$，$R>0$，T 为给定的正整数.

定义 2　设 $u(t)=-K_2\hat{x}(t)$，对于满足条件(3)的 $w(t)$，如果均有式(9)成立，则系统(2)关于 (c_1,c_2,T,R,d) 有限时间镇定. 其中：$c_1<c_2$，$R>0$，T 为给定的正整数，d 为外部干扰 $w(t)$ 的上界.

引理 1[16]　设 D，E 和 F 为适维实矩阵，且 $\|F\|\leqslant 1$. 对于任意的标量 $\varepsilon>0$，有

$$E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}+DFE\leqslant\varepsilon E^{\mathrm{T}}E+\varepsilon^{-1}D^{\mathrm{T}}D.$$

对于系统

$$\dot{x}=Ax+Bw(t)+E\Delta f(x),\tag{13}$$

有如下引理：

引理 2　如果存在常数 $\eta>0$，对称正定矩阵 P 和 S，正实数 ε_1，使得如下不等式成立：

$$\begin{bmatrix}PA+A^{\mathrm{T}}P+\varepsilon_1PEE^{\mathrm{T}}P-\eta P & PB & \rho I\\ B^{\mathrm{T}}P & -\eta S & 0\\ \rho I & 0 & -\varepsilon_1 I\end{bmatrix}<0,\tag{14}$$

$$\frac{c_1\lambda_{\max}(\tilde{P})+d\lambda_{\max}(S)(1-\mathrm{e}^{-\eta t})}{\lambda_{\min}(\tilde{P})}<\mathrm{e}^{-\eta t}c_2.\tag{15}$$

其中：$\tilde{P}=R^{-1/2}PR^{-1/2}$，$\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别为矩阵的最大特征值和最小特征值. 则系统(13)是关于 (c_1,c_2,T,R,d) 有限时间有界的.

证明　对于系统(13)，构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $V(x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$. 沿系统(13)的解轨迹，$V(x(t))$ 的导数为

$$\dot{V}=x^{\mathrm{T}}[PA+A^{\mathrm{T}}P]x+2x^{\mathrm{T}}PBw+2x^{\mathrm{T}}PE\Delta f(x).$$

假设如下条件成立：

$$\dot{V}(x(t))<\eta V(x(t))+\eta w^{\mathrm{T}}(t)Sw(t).\tag{16}$$

首先证明不等式(16)和(15)将保证系统(13)是关于 (c_1,c_2,T,R,d) 有限时间有界的.

不等式(16) 两边同乘 $e^{-\eta t}$,得

$$d[Ve^{-\eta t}]/dt < \eta e^{-\eta t} w^{T}(t) S w(t). \qquad (17)$$

对式(17) 从 0 到 t 积分,$t \in [0 \quad T]$,则有

$$e^{-\eta t}V(x(t)) - V(x(0)) < \eta\int_0^t e^{-\eta\tau}w^{T}(\tau)Sw(\tau)d\tau.$$

因此

$$\begin{aligned}&V(x(t)) < \\ &e^{\eta t}V(x(0)) + \eta e^{\eta t}\int_0^t e^{-\eta\tau}w^{T}(\tau)Sw(\tau)d\tau < \\ &e^{\eta t}V(x(0)) + \eta d\lambda_{\max}(S)e^{\eta t}\int_0^t e^{-\eta\tau}d\tau = \\ &e^{\eta t}\Big[V(x(0)) + \eta d\lambda_{\max}(S)\frac{1-e^{-\eta t}}{\eta}\Big].\end{aligned}$$

注意到 $\tilde{P} = R^{-1/2}PR^{-1/2}$,代入上式可得

$$V(x) < e^{\eta t}[c_1\lambda_{\max}(\tilde{P}) + d\lambda_{\max}(S)(1-e^{-\eta t})]. \qquad (18)$$

另一方面

$$V(x(t)) > \lambda_{\min}(\tilde{P})x^{T}(t)Rx(t). \qquad (19)$$

由条件(18) 和(19) 可得

$$x^{T}(t)Rx(t) < \frac{e^{\eta t}[c_1\lambda_{\max}(\tilde{P}) + d\lambda_{\max}(S)(1-e^{-\eta t})]}{\lambda_{\min}(\tilde{P})}.$$

因此对于 $\forall t \in [0 \ T]$,由条件(15) 知 $x^{T}(t)Rx(t) < c_2$.

然后证明不等式(16)和(14)等价. 由式(16)得

$$\begin{aligned}&x^{T}[PA + A^{T}P - \eta P]x + 2x^{T}PBw + \\ &2x^{T}P\Delta f(x) - \eta w^{T}Sw < 0. \qquad (20)\end{aligned}$$

利用引理 1 及 $\Delta f(x) \leqslant \rho\|x(t)\|$,则存在

$$\begin{aligned}&2x^{T}PE\Delta f(x) \leqslant 2x^{T}PE\rho x \leqslant \\ &x^{T}(\varepsilon_1 PEE^{T}P + \varepsilon_1^{-1}\rho^2 I)x.\end{aligned}$$

因此,如果下式成立:

$$\begin{aligned}&x^{T}[PA + A^{T}P - \eta P + \varepsilon_1 PEE^{T}P + \\ &\varepsilon_1^{-1}\rho^2 I]x + 2x^{T}PBw - \eta w^{T}Sw < 0, \qquad (21)\end{aligned}$$

则可确保式(20) 成立. 通过矩阵的 Schur 补运算,不等式(14) 可由式(21) 推导得到. □

下面由引理 2 得出系统(11) 有限时间镇定的充分条件. 选取观测器增益为 $K_1 = -P_2^{-1}E^{T}C^{T}(y)$.

定理 1 对于 $\eta > 0$,如果存在对称正定矩阵 X 和 S,矩阵 Y,正实数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda_1,\lambda_2$,使下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^{T} & \Sigma_{22}\end{bmatrix} < 0, \qquad (22)$$

$$\lambda_1 R^{-1} < X < R^{-1}, \qquad (23)$$

$$0 < S < \lambda_2 I, \qquad (24)$$

$$\begin{bmatrix}-e^{\eta t}c_2 + \lambda_2 d(1-e^{-\eta t}) & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_1} & -\lambda_1\end{bmatrix} < 0. \qquad (25)$$

其中

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix}\Gamma & B_1Y + \varepsilon_1 I + \varepsilon_2 DD^{T} \\ * & \begin{matrix}A_{\sigma i}X + XA_{\sigma i}^{T} + \\ \varepsilon_2 I + \varepsilon_2 DD^{T} - \eta X\end{matrix}\end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{12} = \begin{bmatrix}B_2 & \rho X & XH^{T} & 0 \\ B_2 & 0 & 0 & XE^{T}C^{T}(y)\end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{22} = -\mathrm{diag}[\eta S \quad \varepsilon_1 I \quad \varepsilon_2 I \quad 0.5I].$$

式中

$$\begin{aligned}\Gamma = &A_{\sigma i}X + XA_{\sigma i}^{T} - B_1Y - \\ &Y^{T}B_1^{T} + \varepsilon_1 I + \varepsilon_2 DD^{T} - \eta X, \\ A_{\sigma i} = &A_\sigma + A.\end{aligned}$$

则闭环系统(11) 是关于(c_1,c_2,T,R,d) 有限时间镇定的.

进而,如果式(11) 存在一组可行解 X^* 和 Y^*,则 $u(t) = -Y^*(X^*)^{-1}\hat{x}(t)$ 是系统(2) 的鲁棒有限时间控制器.

证明 在引理 2 中,将 A,B 和 E 分别用 $\tilde{A}$,$\tilde{B}$ 和 $\tilde{E}$ 代替,并令 $P = \begin{bmatrix}P_1 & 0 \\ 0 & P_2\end{bmatrix}$,则不等式(11) 等价于 $\Theta + \Delta\Xi < 0$. 其中

$$\Theta = \begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_3 & P_1B_2 & \rho I \\ \Lambda_3^{T} & \Lambda_2 & P_2B_2 & 0 \\ B_2^{T}P_1 & B_2^{T}P_2 & -\eta S & 0 \\ \rho I & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I\end{bmatrix},$$

$$\Delta\Xi = \begin{bmatrix}P_1\Delta A + \Delta A^{T}P_1 & \Delta A^{T}P_2 & 0 & 0 \\ P_2\Delta A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

式中

$$\begin{aligned}\Lambda_1 = &P_1A' - P_1B_1K_2 + A'^{T}P_1 - \\ &K_2^{T}B_1^{T}P_1 + \varepsilon_1 P_1P_1 - \eta P_1, \\ \Lambda_2 = &P_2A' - P_2K_1C(y)E + A'^{T}P_2 - \\ &E^{T}C^{T}(y)K_1^{T}P_2 + \varepsilon_2 P_2P_2 - \eta P_2, \\ \Lambda_3 = &P_1B_1K_2 + \varepsilon_1 P_1P_2.\end{aligned}$$

利用引理 1 消除 $\Delta\Xi$ 中的不确定项,得

$$\begin{aligned}&\Delta\Xi \leqslant \\ &\varepsilon_2[D^{T}P_1 \quad D^{T}P_2 \quad 0 \quad 0]^{T} \times \\ &[D^{T}P_1 \quad D^{T}P_2 \quad 0 \quad 0] + \\ &\varepsilon_2^{-1}[H \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{T}[H \quad 0 \quad 0 \quad 0].\end{aligned}$$

根据矩阵的 Schur 补性质,如果下列条件成立:

$$\left[\begin{matrix}\Lambda_1 + \varepsilon_2 P_1DD^{T}P_1 & \Lambda_3 + \varepsilon_2 P_1DD^{T}P_2 \\ \Lambda_3^{T} + \varepsilon_2 P_2DD^{T}P_1 & \Lambda_2 + \varepsilon_3 P_2DD^{T}P_2 \\ B_2^{T}P_1 & B_2^{T}P_2 \\ \rho I & 0 \\ H & 0\end{matrix}\right. \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{cccc} & P_1B_2 & \rho I & H^{\mathrm{T}} \\ & P_2B_2 & 0 & 0 \\ \leftarrow & \eta S & 0 & 0 \\ & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{array}\right] < 0, \tag{26}$$

则有 $\Theta + \Delta\Xi < 0$ 成立.

为进一步简化结果，假定 $P_1 = P_2 = P$. 对式(26) 左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, I, I, I\}$，令 $X = P^{-1}$，$Y = K_2P^{-1}$，代入 $K_1 = -P_2^{-1}E^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(y)$，并用 $\sum_{\sigma}\mu_{\sigma} = 1$，即可得线性矩阵不等式(22).

另一方面，令 $\widetilde{X} = \widetilde{P}^{-1} = R^{1/2}XR^{1/2}$，并考虑 $\lambda_{\max}(\widetilde{X}) = 1/\lambda_{\min}(\widetilde{P})$，可将式(15) 改写为

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(\widetilde{X})} + d\lambda_{\max}(S)(1-\mathrm{e}^{-\eta t}) < \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}c_2}{\lambda_{\max}(\widetilde{X})}. \tag{27}$$

令

$$\lambda_{\max}(S) < \lambda_2,\ \lambda_{\max}(\widetilde{X}) < 1,\ \lambda_1 = \lambda_{\min}(\widetilde{X}). \tag{28}$$

式(28) 代入式(27)，通过 Schur 补运算，可得线性矩阵不等式(25). 由式(28) 可得到定理 1 中的式(23) 和(24). □

4　仿真实例

为了验证本文方法的可行性，下面对所提出的算法进行仿真. 采用如下 B 样条基函数来表示随机系统的输出 PDF：

$$\begin{aligned} B_1(y) =& 0.5(y-2)^2I_1 + [-y^2 + \\ & 7y - 11.5]I_2 + 0.5(y-5)^2I_3, \\ B_2(y) =& 0.5(y-3)^2I_2 + [-y^2 + \\ & 9y - 19.5]I_3 + 0.5(y-6)^2I_4, \\ B_3(y) =& 0.5(y-4)^2I_3 + [-y^2 + \\ & 11y - 29.5]I_4 + 0.5(y-7)^2I_5. \end{aligned}$$

其中

$$I_i(y) = \begin{cases} 1,\ y \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}); \\ 0,\ \text{otherwise}. \end{cases}$$

$$\lambda_i = i + 1, i = 1,2,3,4,5.$$

经计算

$$C(y) = [B_1(y) - B_3(y) \quad B_2(y) - B_3(y)],$$

$$L(y) = B_3(y)\Big/\int_2^7 B_3(y)\mathrm{d}y = B_3(y).$$

系统(2) 的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)}\sin\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)\cos\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \end{bmatrix}.$$

本文选用 $2\times3\times1$ 的神经网络逼近非线性函数 $f(x)$. 取 $q_j = 0.5$，$\lambda_j = 1$，则 $s_j(0, \psi_j) = 0$，$s_j(1, \psi_j) = 1$. 采用误差反向传播算法训练后，可得最优权值

$$W_1^* = \begin{bmatrix} -1.8430 & -0.59507 \\ 1.8253 & 1.6552 \\ 0.44971 & 0.64645 \end{bmatrix},$$

$$W_2^* = [0.95646 \quad -0.22755 \quad 2.1085].$$

逼近误差的上界 $\rho = 2.14 \times 10^{-2}$.

考虑到系统(2) 是关于$(1,3,7,I_2,2)$(I_2 是二阶单位阵) 有限时间有界的，令 $\eta = 0.5$，由定理 1 可得控制器

$$K_2 = [0.0053 \quad -0.1368].$$

在实际控制中，考虑系统初始状态 $x_0 = [0.5 \quad 0.8]^{\mathrm{T}}$，观测器初始状态 $\hat{x}_0 = [0.4 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}$，仿真结果如图 1 所示.

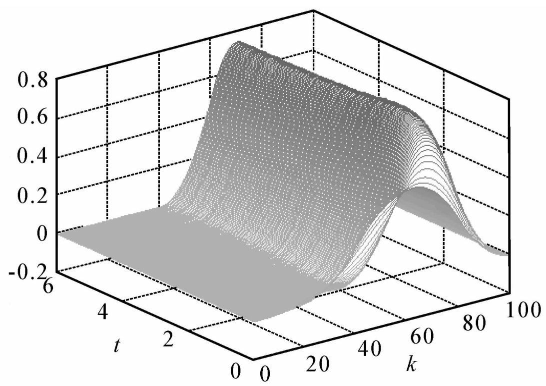

图 1　输出随机过程 3-D Mesh 图

5　结　　论

本文利用 B 样条逼近，对于具有未知扰动的随机动态系统，引入基于观测器的概率密度函数有限时间控制的概念. 利用构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函和线性矩阵不等式方法，给出了保证闭环系统随机有限时间有界和随机有限时间镇定的充分条件. 仿真结果表明，本文提出的方法是有效而可行的.

参考文献(References)

[1] Bruno A, Luciano A, Stefano B. Estimation based on entropy matching for generalized Gaussian PDF modeling[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(6): 138-140.

[2] Crespo L G, Sun J Q. Nonlinear stochastic control via stationary probability density functions[C]. Proc of American Control Conf. Anchorage, 2002: 2029-2034.

[3] Wang H. Robust control of output probability density

functions for multivariable stochastic systems with guaranteed stability[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(11): 2103-2107.

[4] Michael G F, Martin G, Forbes J F. Probabilistic control design for continuous-time stochastic nonlinear systems: A PDF shaping approach[C]. Proc of IEEE Int Symp on Intelligent Control. Taipei, 2004: 132-136.

[5] Wang H, Sun X B. Neural network based probability density function shape control for unknown stochastic systems[C]. Proc of IEEE Int Symp on Intelligent Control. Taipei, 2004: 120-125.

[6] Wang H. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 398-403.

[7] Guo L, Wang H. PID controller design for output PDFs of stochastic systems using linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 2005, 35(1): 65-71.

[8] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record. New York, 1961: 83-87.

[9] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.

[10] Amoto F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback [J]. Automatica, 2006, 42(2): 337-342.

[11] Amato F, Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 724-729.

[12] 沈艳军. 一类线性离散时间系统有限时间控制问题[J]. 控制与决策, 2008, 23(1): 107-113.
(Shen Y J. Finite-time control for a class of linear discrete-time systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(1): 107-113.)

[13] Girosi F, Poggio T. Networks and the best approximation property[J]. Biological Cybernetics, 1990, 63(1): 169-176.

[14] Wang H. Bounded dynamic stochastic systems: Modeling and control[M]. London: Springer-Verlag, 2000.

[15] Tanaka K. An approach to stability criteria of neural-network control systems[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1996, 7(3): 629-642.

[16] Zhou K, Khargonekar P P. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty[J]. Systems and Letters, 1988, 10(1): 17-20.

(上接第 1160 页)

[5] Storn R, Price K. Differential evolution: A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. J of Global Optimization, 1997, 11(4): 341-359.

[6] 刘波, 王凌, 金以慧. 差分进化研究进展[J]. 控制与决策, 2007, 22(7):721-729.
(Liu B, Wang L, Jin Y H. Advances in differential evolution[J]. Control and Decision, 2007, 22(7): 721-729.)

[7] Nelder J A, Mead R. A simplex method for function minimization[J]. J of Computer, 1965, 7(3): 308-313.

[8] Wang L, Li L L, Tang F. Directing orbits of chaotic systems using a hybrid optimization strategy[J]. Physics Letters A, 2004, 324(1): 22-25.

[9] Wang L, Li L L, Tang F. Optimal reduction of models using a hybrid searching strategy [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168(2): 1357-1369.

[10] Runarsson T P, Yao X. Search biases in constrained evolutionary optimization[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics — Part C, 2005, 35(2): 233-243.