第 24 卷 第 9 期
Vol. 24 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2009 年 9 月
Sep. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)09-1371-06

不确定广义系统的输出反馈鲁棒预测控制

刘晓华, 王利杰
(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘 要: 针对一类具有范数有界不确定性的广义系统,当系统状态不可测时,提出了一种基于输出反馈的鲁棒预测控制器综合算法.采用LMI方法以及变量变换思想,将无限时域"最小-最大"优化问题转化为线性规划问题.确定出一组分段连续的输出反馈控制序列,给出了输出反馈控制律存在的充分条件,证明了优化问题在初始时刻的可行解可以保证广义闭环系统是渐近稳定且正则无脉冲的.仿真实例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 鲁棒预测控制; 动态输出反馈; 不确定广义系统; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Robust model predictive control for uncertain singular systems via dynamic output feedback

LIU Xiao-hua, WANG Li-jie
(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China. Correspondent: LIU Xiao-hua, E-mail: xhliu@ldu.edu.cn)

Abstract: The problem of robust output feedback model predictive control is studied for the singular systems with norm-bounded uncertainties when the states of controlled systems are unmeasurable. Based on the idea of variable transformation and LMI methods, the infinite time domain "min-max" optimization problems are converted into linear programming problems. A piecewise continuous output feedback control law is obtained and the sufficient conditions for the existence of this control law are given. It is proved that the robust stability of the closed-loop singular systems is guaranteed by the initial feasible solutions of the optimization problems, and the regular and the impulse-free of singular systems are also held. A simulation example shows the effectiveness of this method.

Key words: Robust model predictive control; Dynamic output feedback; Uncertain singular systems; Linear matrix inequalities

1 引 言

经典模型预测控制具有模型预测、滚动优化、反馈校正等特性,能够处理状态和控制等硬约束问题,但难以处理模型的不确定性[1].由于线性矩阵不等式(LMI)技术能够有效地处理模型不确定性且支持在线优化,基于LMI方法,提出了鲁棒模型预测控制方法[2-5].随着对鲁棒预测控制的进一步研究,广义系统的鲁棒预测控制也引起了人们的关注.文献[6]针对输入带约束的连续时间广义系统,给出了可以保证闭环系统稳定的预测控制方法.文献[7]针对连续时间范数有界不确定广义系统,采用LMI方法,给出了鲁棒预测控制性能指标的上界和系统稳定的充分条件.以上对鲁棒预测控制的研究都是基于状态反馈的.

在实际系统中,系统的状态往往不易直接测量,或者由于测量设备在经济上和使用性上的限制,使状态反馈不可能在物理上实现.因此,基于输出反馈的鲁棒预测控制更具有实际意义.目前,对于正常系统的输出反馈鲁棒预测控制的研究已有不少成果[8-10],而对于不确定广义系统的输出反馈鲁棒预测控制的研究结果还较为少见.

本文针对一类具有范数有界不确定性的广义系统,提出了鲁棒预测输出反馈控制器的综合方法.基于LMI,在线求解无穷时域二次型性能指标下的"最小-最大"优化问题,确定出一组分段连续的输出反馈控制序列,给出输出反馈控制律存在的约束条

收稿日期: 2008-11-09; **修回日期**: 2008-12-31.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60774016).
作者简介: 刘晓华(1959—),男,山东烟台人,教授,博士,从事预测控制、自适应控制理论及应用等研究; 王利杰(1982—),女,山东聊城人,硕士生,从事预测控制的研究.

件. 在此基础上,分析了广义闭环系统的渐近稳定性和正则无脉冲性. 最后通过仿真实例验证了所提出方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = [A + D_1 F(t) H_1] x(t) + \\ \qquad [B + D_1 F(t) H_2] u(t), \\ y(t) = [C + D_2 F(t) H_1] x(t) + \\ \qquad [D + D_2 F(t) H_2] u(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中:矩阵 E 是确定的,而其他系数矩阵均存在不确定性; $x(t) \in R^n$ 是状态向量; $u(t) \in R^m$ 是控制输入向量; $y(t) \in R^p$ 是测量输出; $F(t) \in R^{i\times j}$ 是出现在模型中的不确定参数矩阵,假定其范数有界,即满足 $\psi = \{F(t) \mid F(t)^{\mathrm{T}} F(t) \leq I\}$; $E, A, B, C, D, D_1, D_2, H_1, H_2$ 是已知常数矩阵,且 $\mathrm{rank}(E) = r < n$.

对于系统(1),定义鲁棒预测控制的滚动优化性能指标为

$$\min_{u(kT+\tau, kT),\ \tau\geq 0} J_k, \tag{2}$$

$$J_k := \max_{F(kT+\tau),\ \tau\geq 0} \int_0^\infty (x(kT+\tau, kT)^{\mathrm{T}} R_1 x(kT+\tau, kT) + u(kT+\tau, kT)^{\mathrm{T}} R_2 u(kT+\tau, kT))\,\mathrm{d}\tau.$$

其中: $R_1 > 0$ 和 $R_2 > 0$ 是给定的加权矩阵; T 是采样周期; $\{t_k\}_{k=0,1,\cdots}$ 是采样时刻,且满足 $t_{k+1} - t_k = T$; $x(kT) = x(kT, kT)$ 是 kT 采样时刻的状态, $x(kT+\tau, kT)$ 是在 kT 时刻基于模型(1) 的 $kT+\tau$ 时刻的状态预测值; $u(kT+\tau, kT)$ 是 kT 时刻使性能指标(2) 优化的受控输入序列在 $kT+\tau$ 时刻的值. 假定系统状态不完全可测,但在每一采样时刻 kT, $x(kT)$ 属于集合 S[11],则有

$$S = \{x(kT) \in R^n : x(kT) = Uv, v^{\mathrm{T}} v \leq 1\},$$

其中 U 是已知矩阵.

考虑如下结构的全维输出反馈控制器:

$$\begin{cases} E\dot{\hat{x}}(t) = A_c \hat{x}(t) + B_c y(t), \\ \hat{x}(0) = x(0),\ u(t) = C_c \hat{x}(t). \end{cases} \tag{3}$$

其中: $\hat{x}(t) \in R^n$ 是控制器的状态向量; A_c, B_c, C_c 是待定的控制器系数矩阵.

将式(3) 代入(1) 中,得广义闭环系统为

$$\overline{E}\dot{\overline{x}}(t) = (\overline{A} + \overline{D}F(t)\widetilde{H})\overline{x}(t), \tag{4}$$

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix},\ \overline{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c + B_c D C_c \end{bmatrix},$$

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_c D_2 \end{bmatrix},\ \widetilde{H} = [H_1 \quad H_2 C_c],$$

$$\overline{E} = \mathrm{diag}\{E, E\}.$$

相应的闭环系统性能指标为

$$\min_{u(kT+\tau, kT),\ \tau\geq 0} J_k, \tag{5}$$

$$J_k := \max_{F(kT+\tau),\ \tau\geq 0} \int_0^\infty (\overline{x}(kT+\tau, kT)^{\mathrm{T}} \times \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & C_c^{\mathrm{T}} R_2 C_c \end{bmatrix} \overline{x}(kT+\tau, kT)\,\mathrm{d}\tau = \max_{F(kT+\tau),\ \tau\geq 0} \int_0^\infty \overline{x}(kT+\tau, kT)^{\mathrm{T}} \overline{C}^{\mathrm{T}} \overline{C}\, \overline{x}(kT+\tau, kT)\,\mathrm{d}\tau.$$

其中

$$\overline{x}(kT+\tau, kT) = \begin{bmatrix} x(kT+\tau, kT) \\ \hat{x}(kT+\tau, kT) \end{bmatrix},$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & 0 \\ 0 & R_2^{1/2} C_c \end{bmatrix}.$$

鲁棒预测控制的目的是:在每一采样时刻 kT, 求解闭环优化问题(5),确定出输出反馈控制律 $\{A_c, B_c, C_c\}$,使得不确定广义系统(1) 在满足可行性条件时渐近稳定.

3 基于输出反馈的鲁棒预测控制

求解广义系统的输出反馈鲁棒预测控制的关键问题是求解优化问题(5),但性能指标 J_k 在不确定矩阵 $F(kT+\tau) \in \psi$ 的约束条件下求最小化是不易处理的. 采用文献[2]的方法,利用一个假定的不等式条件,先推得 J_k 的一个上确界,然后将最小化性能指标 J_k 转化为对上确界的最小化.

考虑如下二次 Lyapunov 函数:

$$V(\overline{x}(t)) = \overline{x}(t)^{\mathrm{T}} \overline{E}^{\mathrm{T}} P \overline{x}(t). \tag{6}$$

其中: P 满足

$$\overline{E}^{\mathrm{T}} P = P^{\mathrm{T}} \overline{E} \geq 0; \tag{7}$$

矩阵 $\overline{E} \in R^{2n\times 2n}$,且 $\mathrm{rank}(\overline{E}) = 2r \leq 2n$. 不失一般性,假设

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P \in R^{2n\times 2n}$$

为可逆矩阵,并设

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$P_{11} \in R^{2r\times 2r},\ P_{11}^{\mathrm{T}} = P_{11},\ P_{11} > 0,$$

$$P_{21} \in R^{(2n-2r)\times 2r},\ P_{22} \in R^{(2n-2r)\times(2n-2r)},$$

且 P_{22} 是可逆的. 由式(7) 得到 $\overline{E}^{\mathrm{T}} P = P^{\mathrm{T}} \overline{E} = P_{11}$, P_{11} 为对称正定矩阵.

在每一采样时刻 kT,假设 V 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[V(\overline{x}(kT+\tau, kT))] \leq -\overline{x}(kT+\tau, kT)^{\mathrm{T}} \overline{C}^{\mathrm{T}} \overline{C}\, \overline{x}(kT+\tau, kT). \tag{8}$$

为确保性能指标为有限值,假设 $\overline{x}(\infty, kT) = 0$,则有 $V(\overline{x}(\infty, kT)) = 0$. 将式(8) 从0到 ∞积分,得到

$J_k \le V(\bar{x}(kT))$. 显然, $V(\bar{x}(kT))$ 即为 J_k 的上确界. 在下面的讨论中, 将最小化性能指标 J_k 转化为对 $V(\bar{x}(kT))$ 求最小.

为了证明定理 1, 首先引入下面的引理:

引理 1[7]　给定适当维数的矩阵 G_1, G_2 和对称矩阵 Ω, 对所有满足 $F(t)^{\mathrm{T}}F(t) \le I$ 的矩阵 $F(t)$, 有

$$\Omega + G_1F(t)G_2 + G_2^{\mathrm{T}}F(t)^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}} < 0$$

成立的充分必要条件是存在常数 $\varepsilon > 0$, 不等式 $\Omega + \varepsilon G_1G_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}G_2^{\mathrm{T}}G_2 < 0$ 成立.

定理 1　考虑不确定广义系统(1), 采用输出反馈控制结构(3), 假设在每一采样时刻 kT, 不等式约束(8) 成立, 则闭环优化问题(5) 可转化为满足以下矩阵不等式约束的优化问题:

$$\min_{\varepsilon,\gamma,Q,\bar{Q},\bar{A},\bar{C},\tilde{H},\bar{D}} \gamma, \tag{9}$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}(kT)^{\mathrm{T}} \\ \bar{x}(kT) & Q \end{bmatrix} \ge 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}} + \bar{A}\bar{Q} & \bar{D} & \bar{Q}^{\mathrm{T}}\tilde{H}^{\mathrm{T}} & \bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}} \\ \bar{D}^{\mathrm{T}} & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ \tilde{H}\bar{Q} & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ \bar{C}\bar{Q} & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其中: $Q = \gamma P_{11}^{-1}$, $\bar{Q} = \gamma P^{-1}$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$ 为待定变量.

证明　最小化 $V(\bar{x}(kT)) = \bar{x}(kT)^{\mathrm{T}}\bar{E}^{\mathrm{T}} \times P\bar{x}(kT)$ 等价于

$$\min_{\gamma,\bar{E}^{\mathrm{T}}P} \gamma,$$

$$\text{s.t.}\ \bar{x}(kT)^{\mathrm{T}}\bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{x}(kT) \le \gamma. \tag{12}$$

令 $Q = \gamma(\bar{E}^{\mathrm{T}}P)^{-1} = \gamma P_{11}^{-1} > 0$, 则根据 Schur 补引理, 式(12) 等价于

$$\min_{\gamma,Q} \gamma,$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}(kT)^{\mathrm{T}} \\ \bar{x}(kT) & Q \end{bmatrix} \ge 0. \tag{13}$$

将状态方程(4) 代入(8), 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[V(\bar{x}(kT+\tau,kT))] = \\
&\dot{\bar{x}}^{\mathrm{T}}(kT+\tau,kT)\bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{x}(kT+\tau,kT) + \\
&\bar{x}^{\mathrm{T}}(kT+\tau,kT)P^{\mathrm{T}}\bar{E}\dot{\bar{x}}(kT+\tau,kT) = \\
&\bar{x}^{\mathrm{T}}(kT+\tau,kT)[\bar{A}+\bar{D}F(kT+\\
&\tau)\tilde{H}]^{\mathrm{T}}P\bar{x}(kT+\tau,kT) + \\
&\bar{x}^{\mathrm{T}}(kT+\tau,kT)P^{\mathrm{T}}[\bar{A}+\\
&\bar{D}F(kT+\tau)\tilde{H}]\bar{x}(kT+\tau,kT) \le \\
&-\bar{x}(kT+\tau,kT)^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}\bar{x}(kT+\tau,kT).
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&[\bar{A}+\bar{D}F(kT+\tau)\tilde{H}]^{\mathrm{T}}P + \\
&P^{\mathrm{T}}[\bar{A}+\bar{D}F(kT+\tau)\tilde{H}] + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} \le 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

在不等式(14) 前后同乘以 $P^{-\mathrm{T}}$ 和 P^{-1}, 且令 $\bar{Q} = \gamma P^{-1}$, 则有

$$\begin{aligned}
&\bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}} + \bar{A}\bar{Q} + \bar{Q}^{\mathrm{T}}\tilde{H}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(kT+\tau)\bar{D}^{\mathrm{T}} + \\
&\bar{D}F(kT+\tau)\tilde{H}\bar{Q} + \frac{1}{\gamma}\bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}\bar{Q} < 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

根据 Schur 补引理和引理 1, 不等式(15) 等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}} + \bar{A}\bar{Q} & \bar{D} & \bar{Q}^{\mathrm{T}}\tilde{H}^{\mathrm{T}} & \bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}} \\ \bar{D}^{\mathrm{T}} & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ \tilde{H}\bar{Q} & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ \bar{C}\bar{Q} & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

因此, 闭环优化问题(5) 转化为

$$\min_{\varepsilon,\gamma,Q,\bar{Q},\bar{A},\bar{C},\tilde{H},\bar{D}} \gamma,$$

$$\text{s.t. 式(10), (11).}$$

综上定理 1 得证. □

在不等式(11) 中, 控制器系数矩阵 A_c, B_c, C_c 与其他变量以非线性的方式耦合在一起, 因此, 很难从式(11) 中直接确定这些变量. 以下应用文献[12] 提出的变量变换思想, 给出鲁棒预测输出反馈控制器的综合方法.

首先将矩阵 $\bar{Q}$ 和 $\bar{Q}^{-1}$ 作如下分解:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix},\ \bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}.$$

则 $Q = \bar{Q}_{11}$, 其中 $\bar{P}_{11}$, $\bar{Q}_{11} \in R^{2r\times 2r}$ 是对称矩阵. 因为 $\bar{Q}\bar{Q}^{-1} = I$, 有

$$\bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

设

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & I \\ \bar{Q}_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

在广义限制条件(7) 的左右两端分别乘以 Π_1^{T} 和 Π_1, 则式(7) 等价于

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \\ 0 & I_{2r}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}\bar{Q}_{11} & I \\ I & \gamma\bar{P}_{11} \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}\bar{Q}_{11}^{\mathrm{T}} & I \\ I & \gamma\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{2r}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I_{2r} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$I_{2r} = \bar{Q}_{11}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{11} + \bar{Q}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{21}. \tag{17}$$

定义一组新的变量为

$$\begin{cases} \mathbb{A} = \bar{P}_{11}A\bar{Q}_{11} + \bar{P}_{21}A_c\bar{Q}_{21}^{\mathrm{T}} + \\ \qquad \mathbb{B}C\bar{Q}_{11} + \mathbb{B}D\mathbb{C} + \bar{P}_{11}B\mathbb{C}, \\ \mathbb{B} = \bar{P}_{21}B_c,\ \mathbb{C} = C_c\bar{Q}_{21}^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{18}$$

则给定正定矩阵 $\bar{P}_{11}$, $\bar{Q}_{11}$ 及可逆矩阵 $\bar{P}_{21}$, $\bar{Q}_{21}$, 由 $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ 可确定矩阵 A_c, B_c 和 C_c.

定理 2　对式(1) 描述的不确定广义系统, 在每

一采样时刻 kT,如果存在一个输出反馈鲁棒预测控制器(3),使得 $V(\overline{x}(kT))$ 最小,则 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\overline{P}_{11},\overline{Q}_{11}$ 是下述LMI问题的最优解,同时由式(18)可以确定出输出反馈控制器系数矩阵 A_c,B_c,C_c.

$$\min_{\gamma,\delta,\varepsilon,\overline{P}_{11},\overline{Q}_{11},\hat{A},\hat{B},\hat{C}} \gamma+\varepsilon+\delta, \tag{19}$$

$$\text{s.t.}\ \lambda_{\max}(U^{\mathrm{T}}\overline{P}_{11}U)\leqslant 1, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix}\delta & 1\\ 1 & \varepsilon\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{12}^{\mathrm{T}} & J_{22}\end{bmatrix}<0. \tag{22}$$

其中

$$J_{11}=\begin{bmatrix}J_{11}^{1} & \hat{A}^{\mathrm{T}}+A\\ \hat{A}+A^{\mathrm{T}} & J_{11}^{2}\end{bmatrix},$$

$$J_{12}=\begin{bmatrix}\hat{B}D_2+\overline{P}_{11}D_1 & H_1^{\mathrm{T}} & R_1^{1/2} & 0\\ D_1 & \overline{Q}_{11}H_1^{\mathrm{T}}+\hat{C}^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}} & \overline{Q}_{11}R_1^{1/2} & \hat{C}^{\mathrm{T}}R_2^{1/2}\end{bmatrix},$$

$$J_{22}=\mathrm{diag}\{-\delta I,-\varepsilon I,-\gamma I,-\gamma I\},$$

$$J_{11}^{1}=\overline{P}_{11}A+A^{\mathrm{T}}\overline{P}_{11}+\hat{B}C+C^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}},$$

$$J_{22}^{2}=A\overline{Q}_{11}+\overline{Q}_{11}A^{\mathrm{T}}+B\hat{C}+\hat{C}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}.$$

证明 考虑到

$$\overline{x}(kT)^{\mathrm{T}}\overline{E}^{\mathrm{T}}P\overline{x}(kT)\leqslant v^{\mathrm{T}}(\gamma\overline{P}_{11})v,$$

最小化

$$V(\overline{x}(kT))=\overline{x}(kT)^{\mathrm{T}}\overline{E}^{\mathrm{T}}P\overline{x}(kT),$$

等价于

$$\min_{\gamma,R}\gamma,$$

$$\text{s.t.}\ \lambda_{\max}(U^{\mathrm{T}}\overline{P}_{11}U)\leqslant 1. \tag{23}$$

根据 Schur 补引理以及定义式(16),不等式(11)等价于

$$\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{12}^{\mathrm{T}} & \tilde{J}_{22}\end{bmatrix}<0. \tag{24}$$

其中

$$J_{11}=\begin{bmatrix}J_{11}^{1} & \hat{A}^{\mathrm{T}}+A\\ \hat{A}+A^{\mathrm{T}} & J_{11}^{2}\end{bmatrix},$$

$$J_{12}=\begin{bmatrix}\hat{B}D_2+\overline{P}_{11}D_1 & H_1^{\mathrm{T}} & R_1^{1/2} & 0\\ D_1 & \overline{Q}_{11}H_1^{\mathrm{T}}+\hat{C}^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}} & \overline{Q}_{11}R_1^{1/2} & \hat{C}^{\mathrm{T}}R_2^{1/2}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{J}_{22}=\mathrm{diag}\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}I,-\varepsilon I,-\gamma I,-\gamma I\Big\},$$

$$J_{11}^{1}=\overline{P}_{11}A+A^{\mathrm{T}}\overline{P}_{11}+\hat{B}C+C^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}},$$

$$J_{11}^{2}=A\overline{Q}_{11}+\overline{Q}_{11}A^{\mathrm{T}}+B\hat{C}+\hat{C}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}.$$

引入变量 $\delta>0$,且满足 $\delta\varepsilon>1$,则不等式(24)等价于

$$\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{12}^{\mathrm{T}} & J_{22}\end{bmatrix}<0,\ \begin{bmatrix}\delta & 1\\ 1 & \varepsilon\end{bmatrix}\geqslant 0. \tag{25}$$

其中:$J_{22}=\mathrm{diag}\{-\delta I,-\varepsilon I,-\gamma I,-\gamma I\}$,$J_{11}$ 和 J_{12} 表达式同上.于是,定理1所提出的优化问题可转化为如下形式的线性规划问题求解:

$$\min_{\gamma,\delta,\varepsilon,\overline{P}_{11},\overline{Q}_{11},\hat{A},\hat{B},\hat{C}} \gamma+\varepsilon+\delta,$$

$$\text{s.t.}\ 式(23),(25).$$

假设上述问题的解为 $(\gamma,\varepsilon,\delta,\overline{P}_{11},\overline{Q}_{11},\hat{A},\hat{B},\hat{C})$,则根据式(18)可求得 A_c,B_c 和 C_c,这里 $\overline{P}_{21}$ 和 $\overline{Q}_{21}$ 由限制条件(17)决定. □

下面给出不确定广义系统的输出反馈鲁棒预测控制算法的具体步骤:

Step1:选择 $t_k(k=0,1,\cdots)$ 和 T,使得 $t_k=kT$,并令 $k=0$;

Step2:在 kT 时刻,求解优化问题(19)~(22),得出 $\overline{P}_{11},\overline{Q}_{11},\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 等变量,并由式(17)决定 $\overline{P}_{21}$ 和 $\overline{Q}_{21}$,使得滚动时域闭环系统的鲁棒预测性能指标值在线最小化;

Step3:将矩阵 $\overline{P}_{11},\overline{Q}_{11},\overline{P}_{21},\overline{Q}_{21},\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 代入式(18),确定出控制器(3)的系数矩阵 A_c,B_c,C_c;

Step4:将 A_c,B_c,C_c 代入式(3),计算得到在 kT 时刻基于模型(1)的 $kT+\tau$ 时刻的状态预测值 $x(kT+\tau,kT)$,以及输出反馈控制器状态 $\hat{x}(kT+\tau,kT)$;

Step5:基于 $\hat{x}(kT+\tau,kT)$ 和 $y(kT)$ 的测量值,重复 Step1~Step4.

4 鲁棒稳定性分析

为了给出相应的鲁棒性结论,首先引入下面两个引理:

引理 2[2] 定理1在 kT 时刻的任意可行解,在 $NT(N\geqslant k)$ 时刻仍是可行的.

引理 3[13] 广义系统 $E\dot{x}(t)=Ax(t)$ 是正则无脉冲且稳定的,当且仅当存在可逆矩阵 $P\in R^{n\times n}$,使得以下两个不等式成立:

$$A^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}+PA<0,\ E^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}=PE\geqslant 0.$$

根据第3节的算法,可确定出 kT 时刻的输出反馈控制器 A_c^k,B_c^k,C_c^k,当 k 从0到 ∞ 变化时,得到分段连续的输出反馈控制序列 $\{A_c^k,B_c^k,C_c^k\}$.

根据引理1,采样时刻的可行解保证了优化问题(19)~(22)的解是始终可行的.将控制序列代入方程(1),得到分段连续广义闭环系统表达式为

$$\overline{E}_k\dot{\overline{x}}(t)=(\overline{A}_k+\overline{D}_kF(t)\widetilde{H}_k)\overline{x}(t),$$

$$t\in[kT,(k+1)T),\ k\geqslant 0. \tag{26}$$

下面给出闭环系统(26)的鲁棒稳定性结果.

定理 3　假设定理 2 中的优化问题(19)～(22)在初始时刻存在可行解，则闭环系统(26)是正则、无脉冲以及渐近稳定的. 此时控制器的参数 $\{A_c^k, B_c^k, C_c^k\}$ 由式(18)决定.

证明　由式(6)可知，闭环系统的分段连续 Lyapunov 函数为

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}(t)^{\mathrm{T}} \bar{E}_k^{\mathrm{T}} P_k \bar{x}(t),\quad t \in [kT, (k+1)T],\ k \geq 0. \tag{27}$$

由不等式(8)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[V(\bar{x}(kT+\tau, kT))] \leq - \bar{x}(kT+\tau, kT)^{\mathrm{T}} \bar{C}^{\mathrm{T}} \bar{C} \bar{x}(kT+\tau, kT).$$

由于矩阵 R_1 和 R_2 为正定矩阵，存在 $\mathrm{d}[V(\bar{x}(kT+\tau, kT))]/\mathrm{d}\tau$ 为负定的，由于 $V(\bar{x}(kT+\tau, kT))$ 是严格单调递减的，有 $\mathrm{d}[V(\bar{x}(kT+\tau, kT))]/\mathrm{d}\tau < 0$. 将式(26)代入并由 Schur 补引理，得

$$[\bar{A}_k + \bar{D}_k F(kT+\tau)\tilde{H}_k]^{\mathrm{T}} P_k + P_k^{\mathrm{T}}[\bar{A}_k + \bar{D}_k F(kT+\tau)\tilde{H}_k] \leq 0.$$

又因为 P_k 满足 $\bar{E}^{\mathrm{T}} P_k = P_k^{\mathrm{T}} \bar{E} \geq 0$，故由引理 3 可知，广义闭环系统是渐近稳定且正则无脉冲的. □

5　仿真实例

考虑不确定广义系统(1)，其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ D_2 = [0\quad 0.5],$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & \sin t \end{bmatrix},\ H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = [1\quad 0].$$

初始状态 $x(0) = [-1, 1.8]^{\mathrm{T}}$，鲁棒预测性能指标的加权矩阵为 $R_1 = 0.5I$, $R_2 = I$，采样周期为 $T = 0.3\,\mathrm{s}$.

综合系统的鲁棒预测输出反馈控制器. 根据本文提出的输出反馈鲁棒预测控制算法，应用 LMI Toolbox 中的 mincx 求解器，可得相应的线性规划问题(23)和(25)有解. 由 Step3 可得 kT 采样时刻的输出反馈控制器系数矩阵为

$$A_c = \begin{bmatrix} -23.8183 & -0.6597 \\ 6.8771 & -0.5570 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 24.5939 \\ -0.0711 \end{bmatrix},\ C_c = \begin{bmatrix} -0.7013 \\ 0.0537 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

将 A_c, B_c, C_c 带入式(3)得到如图 1 所示的控制信号. 根据定理 2，得到闭环系统输出轨迹、闭环系统状态轨迹以及性能指标的变化情况如图 2～图 4 所示. 仿真结果表明，在系统状态不完全可测时，采用本文提出的输出反馈鲁棒预测控制方法，得到的不确定广义闭环控制系统是鲁棒渐近稳定且正则无脉冲的，并能够保证滚动时域鲁棒预测优化性能指标在线最小化.

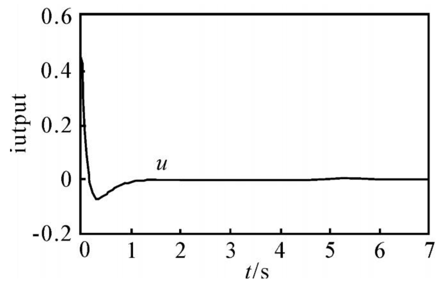

图 1　控制信号

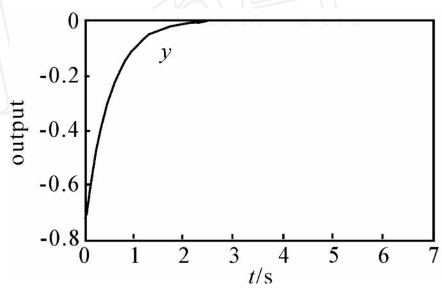

图 2　闭环系统输出轨迹

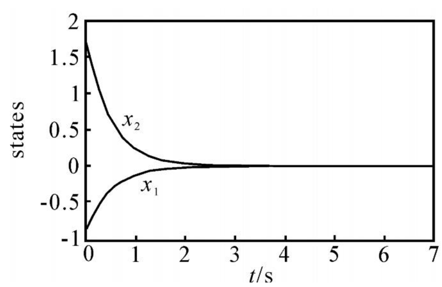

图 3　闭环系统状态轨迹

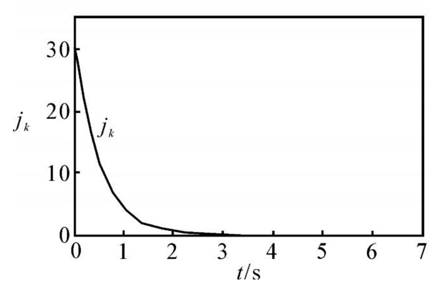

图 4　性能指标变化情况

6　结　　论

本文针对一类具有范数有界不确定性的广义系统，综合鲁棒预测输出反馈控制器. 运用 LMI 方法以及变量变换思想，将无限时域"min-max"优化问题转化为线性规划问题，并得到了输出反馈控制律存在的充分条件，证明了广义闭环系统的渐近稳定性以及正则无脉冲性. 最后，通过仿真实例说明了该

方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Rodrigues M A, Odloak D. MPC for stable linear systems with model uncertainty[J]. Automatica, 2003, 39(3): 569-583.

[2] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.

[3] Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(8): 1545-1549.

[4] Lee Y I, Kouvaritakis B. Constrained robust model predictive control based on periodic invariance [J]. Automatica, 2006, 42(12): 2175-2181.

[5] Feng L, Wang L J, Poh E K. Improved robust model predictive control with structured uncertainty[J]. J of Process Control, 2007, 17(7): 683-688.

[6] Andrey Y, Rolf F, Christian E, et al. Model predictive control of linear continuous time singular systems subject to input constraints[C]. IEEE Conf on Decision and Control. Atlantls, 2004, 2047-2051.

[7] Zhang L Q, Huang B. Robust model predictive control of singular systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 1000-1006.

[8] Ch Perez T, Goodwin G C. Stochastic output feedback model predictive control [C]. Proc of the American Control Conf. Piscataway: IEEE Press, 2001: 2412-2417.

[9] Xu Lee S M, Park Ju H. Output feedback model predictive control for LPV systems using parameter dependent Lyapunov function[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190(2): 671-676.

[10] 韩春艳, 刘晓华. 基于输出反馈的不确定连续系统的鲁棒预测控制[J]. 信息与控制, 2006, 35(6): 721-725.
(Han C Y, Liu X H. Robust predictive control for uncertain continuous-time system based on output feedback[J]. Information and Control, 2006, 35(6): 721-725.)

[11] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu L. Robust control — Using linear matrix inequalities[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[12] Esfahani S H, Petersen I R. An LMI approach to the output-feedback guaranteed cost control for uncertain time-delay systems [C]. Proc of the IEEE Conf on Decision and Control. Piscataway: IEEE Press, 1998: 1358-1363.

[13] Xu S Y, Paul V D, Stefan R, et al. Robust stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

(上接第 1370 页)

[4] Lina C J, Chungb I F, Chenc C H. An entropy-based quantum neuro-fuzzy inference system for classification applications[J]. Neurocomputing, 2007, 70 (13/15): 2502-2516.

[5] 吕红丽, 贾磊, 王雷, 等. 基于模糊线性化预测模型的 HVAC 系统温度控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(12): 1412-1416.
(Lv H L, Jia L, Wang L, et al. Model predictive control based on fuzzy linearization technique for temperature control of HVAC systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(12): 1412-1416.)

[6] Burges C J C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition[J]. Knowledge Discovery and Data Mining, 1998, 2(2): 121-167.

[7] Zhang Ying, Su Hong-ye, Chu Jian. Rules extraction from trained support vector machines [J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2005, 3518: 61-70.

[8] Chiang J H, Hao P Y. Support vector learning mechanism for fuzzy rule-based modeling: A new approach[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2004, 12(1): 1-12.

[9] Chen Y X, Wang J Z. Support vector learning for fuzzy rule-based classification systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(6): 716-728.

[10] Merz C J, Murphy P M. UCI repository for machine learning data-Bases[EB/OL]. http://www.ics.uci.edu/,～mlearn/MLRepository.html, 1998.