

文章编号: 1001-0920(2011)05-0727-05

## 一类非匹配不确定非线性系统的鲁棒跟踪控制

王坚浩, 胡剑波

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

**摘要:** 针对一类半严格反馈型不确定非线性系统, 提出一种鲁棒反演滑模变结构控制方法. 采用反演控制方法设计了使前  $n-1$  阶子系统稳定的虚拟控制律, 抑制非匹配不确定性的影响; 在第  $n$  步设计了一种连续可导的滑模变结构控制律, 消除控制抖振, 实现了对存在未知不确定性及扰动系统的鲁棒输出跟踪. 通过 Lyapunov 定理证明了闭环系统所有信号最终有界. 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 不确定非线性系统; 反演; 滑模控制; 抖振; 鲁棒输出跟踪

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Robust tracking control for a class of nonlinear systems with unmatched uncertainties

WANG Jian-hao, HU Jian-bo

(Engineering College, Air Force University of Engineering, Xi'an 710038, China. Correspondent: WANG Jian-hao, E-mail: hamilton\_wang@sina.com)

**Abstract:** A robust backstepping sliding mode control is proposed for a class of uncertain nonlinear systems in semi-strict feedback form. The backstepping method is employed to design the virtual controller to guarantee the stabilization of the preceding  $n-1$  steps subsystem and restrain unmatched uncertainties. In the  $n$ -th step, a continuous and differentiable sliding mode variable structure control law is designed to eliminate the chattering and achieve robust output tracking in the presence of unknown uncertainties and disturbances. Using Lyapunov approach, it is proved that all signals in the closed loop systems are ultimately bounded. Finally, the simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** uncertain nonlinear systems; backstepping; sliding mode control; chattering; robust output tracking

### 1 引言

不确定系统的鲁棒控制问题历来是控制领域的热点研究方向之一, 其中滑模变结构控制是一种较为有效的方法, 但要求系统的不确定性满足匹配条件<sup>[1]</sup>. 对于非匹配不确定系统, 一个较为成功的策略是采用反演控制法<sup>[2-3]</sup>, 即在逐步递推的设计过程中引入中间虚拟控制量, 并基于 Lyapunov 稳定性理论给出整个系统控制器的设计方法. 然而, 反演控制法要求系统不确定性可参数化表示, 并且存在“计算膨胀”和控制律高度非线性问题<sup>[4-5]</sup>, 使得控制器难以实现.

近年来, 一些学者将滑模变结构控制与反演控制法相结合, 发表了一系列研究成果. 文献[6]针对一类最小相位仿射非线性系统, 设计了自适应反演滑模变结构控制器, 但只允许在模型的最后一个表达式中出

现非参数化不确定性. [7]针对一类非匹配不确定非线性系统, 提出了一种基于递推方式的多模反演滑模控制方法, 但在设计虚拟控制律时, 引入不可导的饱和函数来修正虚拟控制律, 只能保证跟踪误差收敛于指定的跟踪误差带内; 同时, 因对虚拟控制律求导而要求降低虚拟控制为光滑信号, 导致了系统性能下降. [8]为了减弱抖振, 将边界层应用到滑模面的设计中, 设计了一种适用于输出跟踪的反演滑模变结构控制器. [7-8]在每一步设计过程中需要指定边界层厚度, 然而这一要求在实际应用中一般很难预知, 需要在系统所处的不同状态及滑动模态的不同阶段采用不同的边界层厚度, 否则无法兼顾不同阶段的控制性能要求<sup>[9]</sup>. [10]在电液伺服系统位置跟踪控制中采用多模反演滑模控制策略, 减少了算法计算量, 但不确定性

收稿日期: 2010-01-17; 修回日期: 2010-03-27.

基金项目: 空军工程大学学术基金项目(XS0901008).

作者简介: 王坚浩(1982-), 男, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 胡剑波(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事先进控制理论与应用、飞行控制等研究.

仍需要可参数化表示.

本文针对一类半严格反馈型不确定非线性系统, 提出了一种鲁棒反演滑模变结构控制方法. 利用反演控制方法设计使前  $n-1$  阶子系统稳定的虚拟控制律, 抑制非匹配不确定性对系统的影响; 在第  $n$  步, 基于反演法设计结果构造一类连续可导的滑模变结构控制器, 使闭环系统输出跟踪误差在有限时间内趋于给定参考轨迹的任意小领域内. 本文所提出的控制方法, 使系统对于匹配和非匹配不确定性均具有鲁棒性, 并且消除了控制器抖振.

## 2 问题描述

考虑如下  $n$  阶不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \psi_i(\mathbf{x}_i), i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + [g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})]u + d(t); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为可测状态向量;  $u, y \in \mathbf{R}^1$  分别为系统控制输入和输出;  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$  为已知非线性函数;  $\Delta f(\mathbf{x}), \Delta g(\mathbf{x})$  为满足匹配条件的有界不确定项;  $d(t)$  为未知外界扰动;  $\psi_i(\mathbf{x}_i)$  为不满足匹配条件的有界非参数化不确定项.

**注 1** 一般的非线性系统满足一定的微分几何条件便可通过微分同胚变换转换为系统(1)的形式, 许多实际系统也可描述或转化成这一模型.

**假设 1** 系统匹配不确定性及外界扰动满足如下有界条件:

$$\begin{aligned} |\Delta f(\mathbf{x})| &\leq F(\mathbf{x}), |d(t)| \leq D, \\ 0 &\leq \Delta g_{\min} \leq \Delta g(\mathbf{x}) \leq \Delta g_{\max}. \end{aligned}$$

**假设 2** 存在光滑函数  $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x}_i)$  及常数  $\delta_i$  使得

$$|\psi_i(\mathbf{x}_i)| \leq \delta_i \varphi_i.$$

**假设 3** 参考轨迹  $y_d$  及其一阶导数  $\dot{y}_d$  有界且已知.

控制系统设计的任务是针对不确定非线性系统(1), 在满足假设 1~假设 3 的条件下, 消除不确定性和未知扰动对系统的影响, 稳定跟踪给定参考轨迹  $y_d$ .

## 3 控制器设计及稳定性分析

### 3.1 控制器设计

定义系统(1)的状态跟踪误差为

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - y_d, \\ e_2 = x_2 - \alpha_1(x_1), \\ \vdots \\ e_n = x_n - \alpha_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\alpha_i(x_1, \dots, x_i)$  为第  $i$  步期望的虚拟控制.

设计分为 2 个阶段: 第 1 阶段 (Step 1~Step  $n-1$ ) 根据标准反演算法的设计思想设计虚拟控制律, 处理非匹配不确定性; 第 2 阶段 (Step  $n$ ) 设计一种连续可导的滑模变结构控制器, 使系统对于匹配不确定性也具有鲁棒性, 并且消除控制器抖振.

**Step 1** 考虑闭环系统(1)的第 1 个子系统

$$\dot{x}_1 = x_2 + \psi_1,$$

由状态跟踪误差  $e_1 = x_1 - y_d$ , 可得系统输出跟踪误差  $e = e_1$ . 对状态跟踪误差  $e_1$  求导得

$$\dot{e}_1 = x_2 + \psi_1 - \dot{y}_d. \quad (3)$$

根据式(3)可设计如下虚拟控制律:

$$\beta_1 = -c_1 e_1 - \delta_1 \varphi_1 \text{sign}(e_1) + \dot{y}_d.$$

在反演法设计过程中, 最关键的问题是如何构造合适的虚拟控制律, 消除不确定性的影响. 符号函数的引入带来了虚拟控制律的不连续和不可导问题, 导致闭环系统的稳定性难以得到保证<sup>[11]</sup>. 通常采用连续但不可导的饱和函数近似表示, 但边界层厚度的选取比较困难. 因此, 简便且有效的方法是采用连续可导函数近似表示<sup>[12]</sup>.

由式(3)可设计如下虚拟控制律:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -c_1 e_1 + \dot{y}_d - \\ &\delta_1 \varphi_1 \frac{1 - \exp[-\eta_1(t)\delta_1 \varphi_1 e_1]}{1 + \exp[-\eta_1(t)\delta_1 \varphi_1 e_1]}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中函数  $\eta_1(t) > 0$  连续可导, 且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_1(t)} = 0$ .

针对反演设计存在“计算膨胀”问题, 避免下一步设计中对虚拟控制律求导需满足虚拟控制为光滑信号的要求, 本文采用动态面控制设计思想<sup>[13]</sup>, 使用一系列低通滤波器对虚拟控制律进行滤波, 以降低控制器的复杂性.

选取一阶低通滤波器, 其动态方程如下:

$$\tau_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 = \beta_1, \alpha_1(0) = \beta_1(0). \quad (5)$$

其中:  $\tau_1$  为滤波器时间常数,  $\alpha_1$  为  $\beta_1$  的估计值.

定义第 1 个子系统的估计误差为

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \beta_1. \quad (6)$$

**Step  $i$**  考虑闭环系统(1)的第  $i$  个子系统

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \psi_i, 2 \leq i \leq n-1.$$

状态跟踪误差  $e_i = x_i - \alpha_{i-1}$ , 对其求导得

$$\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = x_{i+1} + \psi_i - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (7)$$

根据式(7)设计如下虚拟控制律:

$$\begin{aligned} \beta_i &= -e_{i-1} - c_i e_i + \dot{\alpha}_{i-1} - \\ &\delta_i \varphi_i \frac{1 - \exp[-\eta_i(t)\delta_i \varphi_i e_i]}{1 + \exp[-\eta_i(t)\delta_i \varphi_i e_i]}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中函数  $\eta_i(t) > 0$  连续可导, 且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_i(t)} = 0$ .

对  $\beta_i$  进行滤波, 得到估计值  $\alpha_i$ , 定义第  $i$  个子系统估计误差为  $\varepsilon_i = \alpha_i - \beta_i$ .

将虚拟控制律代入式 (3) 和 (7), 经过  $n - 1$  步反演设计, 系统变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

其中

$$\omega_i = \varepsilon_i - \delta_i \varphi_i \frac{1 - \exp[-\eta_i(t)\delta_i \varphi_i e_i]}{1 + \exp[-\eta_i(t)\delta_i \varphi_i e_i]},$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -c_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -c_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & c_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

经过上述  $n - 1$  步设计过程, 得到  $n - 1$  个期望虚拟控制  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ . 在此基础上, 设计最终的滑模变结构控制律.

**Step n** 考虑闭环系统 (1) 的第  $n$  个子系统

$$\dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + [g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})]u + d(t).$$

状态跟踪误差  $e_n = x_n - \alpha_{n-1}$ , 对  $e_n$  求导得

$$\dot{e}_n = f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + d(t) - \dot{\alpha}_{n-1} + [g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})]u. \quad (10)$$

定义滑模面  $s = \sigma_1 e_1 + \dots + \sigma_{n-1} e_{n-1} + e_n$ . 选择系数  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ , 使得多项式  $p^{n-1} + \sigma_{n-1} p^{n-2} + \dots + \sigma_2 p + \sigma_1$  为 Hurwitz 稳定.

对  $s$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \dot{e}_i + \dot{e}_n = \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i [\rho_i + \psi_i + \omega_i] + f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + \\ & [g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})]u + d(t) - \dot{\alpha}_{n-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

设计如下控制律:

$$\begin{cases} u = u_c + u_{vss}, \\ u_c = -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i [\rho_i + \omega_i] + f(\mathbf{x}) - \dot{\alpha}_{n-1} + ks \right\}, \\ u_{vss} = -\frac{\lambda}{g(\mathbf{x}) + \Delta g_{\min}} \cdot \frac{1 - \exp[-\eta_n(t)\lambda s]}{1 + \exp[-\eta_n(t)\lambda s]}, \\ \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} |\sigma_i \varphi_i| \delta_i + \Delta g_{\max} |u_c| + F(\mathbf{x}) + D. \end{cases} \quad (12)$$

其中:  $u_c$  为非线性补偿项,  $u_{vss}$  为切换控制项,  $k$  为控制增益, 函数  $\eta_n(t) > 0$  连续可导, 且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_n(t)} = 0$ .

### 3.2 稳定性分析

为了便于稳定性分析, 首先给出如下引理<sup>[14-15]</sup>:

**引理 1** 设  $K : D \rightarrow \mathbf{R}$  是定义域为  $D \subset \mathbf{R}^n$  且包含原点的连续正定函数, 并设对于某个  $r > 0$  有  $B_r \subset D$ , 则对于所有  $\mathbf{x} \in B_r$ , 存在定义在  $[0, r]$  上的  $\kappa$  类函数  $a_1$  和  $a_2$ , 满足

$$a_1(\|\mathbf{x}\|) \leq K(\mathbf{x}) \leq a_2(\|\mathbf{x}\|).$$

如果  $D = \mathbf{R}^n$  且  $K(\mathbf{x})$  是径向无界的, 则存在  $\kappa_\infty$  类函数  $a_1$  和  $a_2$  在  $[0, \infty)$  上有定义, 使得上式对于任意  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  都成立.

**引理 2** 设  $D \subset \mathbf{R}^n$  是包含原点的定义域, 假设存在一个连续可微的正定函数  $L(t, \mathbf{x})$ , 对于  $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times D$  满足如下条件:

$$W_1(\mathbf{x}) \leq L(t, \mathbf{x}) \leq W_2(\mathbf{x}),$$

$$\dot{L}(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma W_3(\mathbf{x}) + \phi,$$

则函数  $L(t, \mathbf{x})$  将在有限时间内收敛到有界紧集内. 其中:  $\phi$  为正实数,  $\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in D, W_1(\mathbf{x}), W_2(\mathbf{x}), W_3(\mathbf{x})$  都是  $D$  上的连续正定函数, 且存在大于零的常数  $c$ , 使得  $\Xi = \{W_1(\mathbf{x}) \leq c \ \& \ W_2(\mathbf{x}) < c\}$  是  $D$  的一个紧子集.

定义闭环系统 (1) 的 Lyapunov 函数为

$$V = s^2/2 + \sum_{i=1}^{n-1} (e_i^2 + \varepsilon_i^2)/2, \quad (13)$$

对  $V$  按时间  $t$  求导得

$$\dot{V} = s\dot{s} + \sum_{i=1}^{n-1} (e_i \dot{e}_i + \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i). \quad (14)$$

由  $\varepsilon_i = \alpha_i - \beta_i$  得

$$\dot{\varepsilon}_i = -\varepsilon_i/\tau_i - \dot{\beta}_i. \quad (15)$$

由引理 1 可知, 存在  $\kappa_\infty$  类函数  $\kappa_{i1}$  和  $\kappa_{i2}$ , 使得

$$\kappa_{i1} \leq |\dot{\beta}_i|^2 \leq \kappa_{i2}. \quad (16)$$

将式 (11) 及控制律 (12) 代入 (14), 并根据假设 1 和假设 2 及式 (16) 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -c_i^* |e_i|^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_i} - \frac{\kappa_{i2}}{2\mu_i} \right) |\varepsilon_i|^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{\eta_i(t)} + \frac{\mu_i}{2} \right] + s \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \psi_i + \Delta f(\mathbf{x}) + d(t) + \right. \\ & \left. \Delta g(\mathbf{x}) u_c \right\} - \lambda s \frac{1 - \exp[-\eta_n(t)\lambda s]}{1 + \exp[-\eta_n(t)\lambda s]} - ks^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -c_i^* |e_i|^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_i} - \frac{\kappa_{i2}}{2\mu_i} \right) |\varepsilon_i|^2 + \frac{1}{\eta_i(t)} + \right. \\ & \left. \frac{\mu_i}{2} \right] + \lambda |s| \left\{ 1 + \frac{1 - \exp[\eta_n(t)\lambda |s|]}{1 + \exp[\eta_n(t)\lambda |s|]} \right\} - ks^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -c_i^* |e_i|^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_i} - \frac{\kappa_{i2}}{2\mu_i} \right) |\varepsilon_i|^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{\eta_i(t)} + \frac{\mu_i}{2} \right] + \frac{2\lambda|s|}{1 + \exp[\eta_n(t)\lambda|s|]} - ks^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -c_i^* |e_i|^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_i} - \frac{\kappa_{i2}}{2\mu_i} \right) |\varepsilon_i|^2 \right] - ks^2 + \phi. \end{aligned} \quad (17)$$

其中:  $\phi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i(t)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i}{2}$ ,  $c_i^* = c_i - 1$ .

**注 2** 推导过程中对于所有  $\delta_i \varphi_i |e_i| \geq 0$ ,  $\lambda|s| \geq 0$ ,  $\eta_i(t) > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 如果选择  $\eta_i(t) = \varepsilon|t| + t_0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 > 0$ , 或  $\eta_i(t) = \exp(lt)$ ,  $l > 0$ , 则以下两个不等式恒成立:

$$\begin{aligned} \frac{2\delta_i \varphi_i |e_i|}{1 + \exp[\eta_i(t)\delta_i \varphi_i |e_i|]} &< \frac{1}{\eta_i(t)}, \\ \frac{2\lambda|s|}{1 + \exp[\eta_n(t)\lambda|s|]} &< \frac{1}{\eta_n(t)}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \gamma = 2 \min\{c_i^*, k\}, \quad \mu_i = \kappa_{i2}/[2(\gamma - 1/\tau_i + 1/4)], \\ 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

将其代入式(17), 得

$$\dot{V} \leq -\gamma V + \phi. \quad (18)$$

**定理 1** 考虑闭环系统(1), 给定已知有界参考轨迹  $y_d$  及初始紧集

$$\Omega_0 = \left\{ s^2/2 + \sum_{i=1}^{n-1} (e_i^2 + \varepsilon_i^2)/2 \leq p \right\},$$

其中  $p$  为任意给定正数. 在假设 1~假设 3 条件下, 采用控制律(12), 选择适当控制器参数  $c_i, \sigma_i, k$ , 可保证闭环系统输出跟踪误差在有限时间趋于给定参考轨迹的任意小的有界紧集内, 且系统所有状态均有界.

**证明** 令  $\gamma > \phi/p$ , 当  $V = p$  时, 有  $\dot{V} \leq 0$ , 因而  $V \leq p$  为不变集; 当系统满足初始条件  $V(0) \leq p$  时, 可得  $V \leq p$ , 因此闭环系统(1)跟踪误差  $e_i$  及系统输出跟踪误差  $e$  有界.

由  $e_1 = x_1 - y_d$  可知状态  $x_1$  有界, 根据式(4)可知虚拟控制  $\beta_1$  有界, 则  $\alpha_1$  及  $\dot{\alpha}_1$  有界; 根据  $e_2 = x_2 - \alpha_1$  可知, 状态  $x_2$  有界. 以此类推, 闭环系统所有状态均有界.

定义紧集  $\Xi_1 = \{W_1(\mathbf{x}) \leq p \ \& \ W_2(\mathbf{x}) \leq p\}$ ,  $\vartheta > 0$  是紧集  $\Xi_1$  上  $V$  的极小值, 即  $\vartheta = \min_{\mathbf{x} \in \Xi_1} V > 0$ , 则  $\forall \mathbf{x} \in \Xi_1, \forall \phi \leq \gamma\vartheta/2$ , 式(18)可表示为

$$\dot{V} \leq -\gamma V/2 - \gamma\vartheta/2 + \phi \leq -\gamma V/2 \leq -\gamma\vartheta/2. \quad (19)$$

由于函数  $V$  连续可微, 对于某个正常数  $a = \sup_{\mathbf{x} \in \Xi_1} \{W_1(\mathbf{x}) < p\}$ , 存在紧集  $\Theta = \{a \leq V \leq c\}$ , 则由不等式(19)可知集合  $\Omega_a = \{V \leq a\}$  和  $\Omega_p =$

$\{V \leq p\}$  是两个正不变集. 因在边界  $\partial\Omega_a$  和  $\partial\Omega_p$  上,  $\dot{V}$  为负, 故始于  $\Xi_1$  内的轨线一定沿  $V$  减小的方向运动.

将不等式(19)两边同时对  $t$  进行积分, 得

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}) &\leq V(t, \mathbf{x}_0) - \gamma\vartheta(t - t_0)/2 \leq \\ & p - \gamma\vartheta(t - t_0)/2, \end{aligned} \quad (20)$$

则根据式(20)和引理 2 可知,  $V(t, \mathbf{x})$  将在时间区间  $[t_0, t_0 + 2(p-a)/(\gamma\vartheta)]$  内收敛到紧集  $\Omega_a = \{V \leq a\}$  内. 显然闭环系统输出跟踪误差将在有限时间内收敛到给定参考轨迹任意小的有界紧集内.  $\square$

**注 3** 滤波器时间常数选取原则: 若时间常数过小, 则容易使系统不稳定; 若时间常数过大, 则容易造成幅值和相位失真. 一般情况下, 取时间常数在 0.01~0.05 之间, 效果较好.

#### 4 仿真算例

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = 2x_1^3 + 3x_1x_2 + \xi_1(t)x_1^3 + \\ \quad [1 + \xi_2(t)]u + d(t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (21)$$

其中: 不确定性项的实际值为  $\psi_1(x_1) = 0.5x_1^2 \sin t$ ,  $\xi_1(t) = \sin(4t)$ ,  $\xi_2(t) = 1 + 0.2 \sin(2t)$ ; 外界扰动  $d(t) = 2 \cos t$  未知; 给定界  $F(\mathbf{x}) = |x_1^3|$ ,  $\Delta g_{\min} = 0.8$ ,  $\Delta g_{\max} = 1.2$ ,  $D = 2.5$ ; 光滑函数  $\varphi_1(x_1) = x_1^2$ , 常数  $\delta_1 = 0.5$ .

在初始状态  $x_1(0) = x_2(0) = 0.5$  条件下, 采用本文设计的反演滑模变结构控制方法, 控制器参数设置为  $c_1 = 1, \sigma_1 = 2.5, k = 0.5$ . 参考轨迹  $y_d = 1 + \cos(5t)$ , 仿真结果如图 1~图 4 所示.

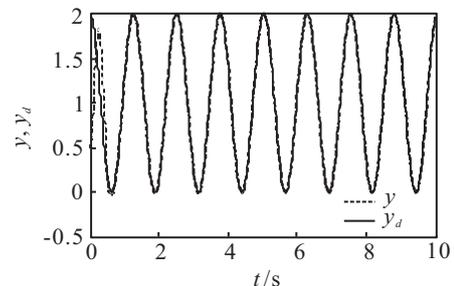


图 1 输出  $y$  与参考轨迹  $y_d$

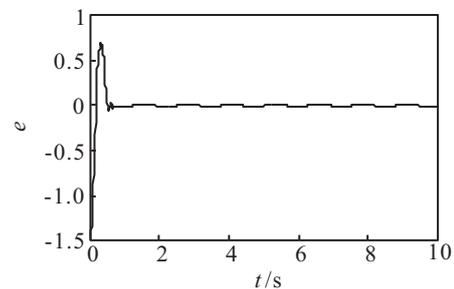


图 2 输出跟踪误差  $e$

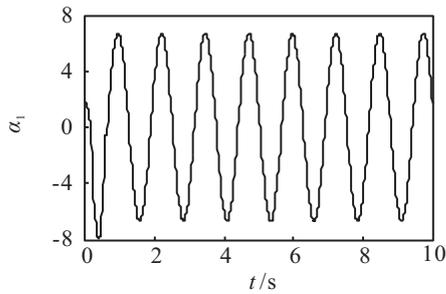


图3 虚拟控制律  $\alpha_1$

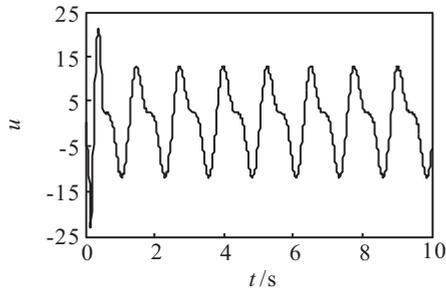


图4 本文设计的控制器  $u$

将采用饱和函数近似表示符号函数设计的虚拟与切换控制律与本文所设计的虚拟与切换控制律进行控制性能仿真对比, 取饱和函数的边界层厚度为0.05, 其他参数设计为  $c_1 = 1, \sigma_1 = 2.5, k = 0.5$ . 控制器输出如图5所示.

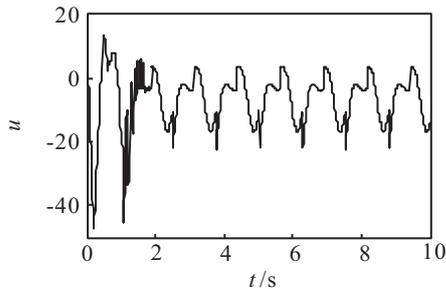


图5 采用饱和函数近似表示符号函数的控制器  $u$

定义过渡过程时间  $t_s$ , 控制能耗  $E = \int_0^{50} |u|dt$ , 控制变化量  $\Delta u = u_{\max} - u_{\min}$ . 两种方法的控制性能比较如表1所示.

表1 两种方法的控制性能比较

控制器类型	$t_s$	$E$	$\Delta u$
本文设计的控制	0.8	321.7422	44.1726
基于饱和函数的控制器	1.5	373.9219	60.3383

仿真结果表明, 闭环系统对给定参考轨迹具有良好的跟踪性能, 系统输出跟踪误差在0.8s内收敛到给定参考轨迹的任意小的有界范围内, 并且去除了抖振现象, 控制器输出更加平滑. 而采用饱和函数近似表示符号函数的控制器输出存在一定的抖振现象. 此外, 从过渡过程时间、控制能耗以及控制变化量上综合考虑, 本文设计的控制系统也具有更优的控制性能.

## 5 结 论

本文针对一类半严格反馈型不确定性非线性系统, 提出了一种鲁棒反演滑模变结构控制方法. 利用反演控制方法设计了使前  $n - 1$  个子系统稳定的虚拟控制律; 在第  $n$  步, 设计得到了具有全局收敛的滑模变结构控制器, 使闭环系统所有信号最终有界并且输出跟踪误差在有限时间内趋于给定参考轨迹的任意小的有界紧集内. 仿真结果表明, 本文所提出的控制方法对匹配、非匹配不确定性和未知扰动均具有鲁棒性, 并且去除了控制器抖振现象, 控制信号更加平滑, 便于实际应用.

## 参考文献(References)

- [1] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996.  
(Gao W B. Variable structure control theory and design approach[M]. Beijing: Science Press, 1996.)
- [2] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(11): 1241-1253.
- [3] Kristic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- [4] 董文瀚, 孙秀霞, 林岩. 反推自适应控制的发展及应用[J]. 控制与决策, 2006, 21(10): 1081-1086.  
(Dong W H, Sun X X, Lin Y. Adaptive backstepping control: Development and applications[J]. Control and Decision, 2006, 21(10): 1081-1086.)
- [5] Wu Z J, Xie X J, Zhang S Y. The reduced-order design of robust adaptive backstepping controller[J]. Acta Automatic Sinica, 2006, 31(4): 543-548.
- [6] 李俊, 徐德民. 非匹配不确定非线性系统的自适应反演滑模控制[J]. 控制与决策, 1999, 14(1): 46-50.  
(Li J, Xu D M. Adaptive sliding mode controller for nonlinear systems with mismatched uncertainties based on adaptive backstepping scheme[J]. Control and Decision, 1999, 14(1): 46-50.)
- [7] 李俊, 徐德民. 不确定非线性系统的多模反演滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(5): 801-804.  
(Li J, Xu D M. Multi-mode backstepping sliding mode control for nonlinear systems with unmatched uncertainties[J]. Control Theory & Applications, 2001, 18(5): 801-804.)