第 26 卷 第 5 期
Vol. 26 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 5 月
May 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 05-0661-06

有向网络下线性多个体系统的整体行为 —— 矩阵方法

金继东[1,2], 郑毓蕃[1]

(1. 上海大学 数学系，上海 200444；2. 首都经济贸易大学 计算机科学与技术系，北京 100070)

摘 要: 研究了有向通讯网络条件下一阶和二阶线性多个体协同动力学系统整体行为的矩阵代数性质. 利用矩阵分析的方法将系统的系数矩阵变换为Frobenius 标准型, 由此将系统分解为独立基本子系统和非独立基本子系统的组成结构. 通过研究行和为零的对角占优矩阵的性质, 得出了对线性多个体协同动力学系统整体行为起决定作用的系数矩阵的性质, 从而将这一问题转换为普通线性代数问题.

关键词: Frobenius 标准型；对角占优；惯性；带权中心；凸组合

中图分类号: N941.3；O231.5 **文献标识码:** A

Collective behavior of linear multi-agent system in directed network: A matrix approach

JIN Ji-dong[1,2], *ZHENG Yu-fan*[1]

(1. Department of Mathematics，Shanghai University，Shanghai 200444，China；2. Department of Computer Science and Technology，Capital University of Economics and Business，Beijing 100070，China. Correspongent：JIN Ji-dong，E-mail: jjd@cueb.edu.cn)

Abstract: This paper studies the matrix algebra properties of the collective behavior of liner multi-agent dynamic systems in directed network, where the agent is with dynamical order one or two. By means of matrix analysis approach, the coefficient matrix of system can be transformed into Frobenius canonical form. Thus, the system is decomposed into several basic independent subsystems and basic non-independent subsystems. Based on the study of diagonally dominant matrices with the sum of entries in each row being zero, some properties of coefficient matrix are obtained, which play a key role in the collective behavior of liner multi-agent dynamic systems. Thus, the study of collective behavior of system is reduced to some elementary linear algebra problems.

Key words: Frobenius canonical form；diagonally dominant；inertia；weighted center；convex combination

1 引 言

动力学与多体问题是紧密相关的, 如牛顿天体力学系统是多体系统. 由于作用与反作用的关系, 经典多体动力学的作用关系网络是对称的. 尽管集体行为可采用动力学方法进行研究是近20年来形成的一个共识, 但基于作用关系网络对称的研究占较大的比重. 然而, 自然界中许多集体行为 (例如动物的集体行为), 其作用关系网络是非对称的. 本世纪初, Olfati-Saber 等人[1-2]的一项研究得到了非对称作用关系网络条件下一阶线性多个体协同动力学系统状态一致的一个重要的充分条件. 此后林志贇等人[3]又将其改进为充分必要条件. Ren 等人[4-5]研究了二阶线性多个体协同动力学系统问题, 并获得了与一阶系统类似的状态一致充分必要条件.

本文完善了此前的研究[6-7], 给出了任意有向网络条件下一阶和二阶线性多个体协同动力学系统整体行为的完整理论结果. 非对称作用关系网络条件下多个体系统整体行为的研究已经有了一个很好的开端, 本文将寻求尽可能初等的分析解答此类问题的数学工具和方法.

2 多个体动力学系统及其结构

考虑由 n 个个体组成的线性多个体动力学系统, $A=\{a_i|i=1,2,\cdots,n\}$ 为个体的集合, $a_i\in A$ 的状态记为 $x_i\in \boldsymbol{R}$, $N(a_i)$ 为 a_i 的邻集, 即影响个体 a_i 状态变化的所有其他个体的集合.

对于 $i=1,2,\cdots,n$, 一阶和二阶线性多个体动

收稿日期: 2010-02-22；**修回日期:** 2010-06-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674046).

作者简介: 金继东(1962−), 男, 副教授, 博士生, 从事多个体系统的基础理论与应用的研究；郑毓蕃(1941−), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性复杂性、多个体系统的基础理论与应用等研究.

力学系统的状态方程分别为

$$\dot{x}_i = \sum_{a_j \in N(a_i)} \gamma_{ij}(x_i - x_j), \tag{1}$$

$$\dot{v}_i = \sum_{a_j \in N(a_i)} \gamma_{ij}[w_x(x_i - x_j) + w_v(v_i - v_j)]. \tag{2}$$

式中: $w_x \geqslant 0$ 称为位置协同系数, $w_v \geqslant 0$ 称为速度协同系数.

如果 $\forall a_j \in N(a_i)$, $\gamma_{ij} < 0$, 则称式 (1) 或 (2) 为多个体协同动力学系统[1-8].

A 中所有个体的邻集定义了 A 上的有向图 $\boldsymbol{G} = \langle A, \mathcal{E} \rangle$, 其中 $\boldsymbol{G}$ 的边集为

$$\mathcal{E} = \bigcup_{a_i \in A} \{(a_i, a_j) \,|\, a_j \in N(a_i)\}.$$

令 $x = (x_1, \cdots, x_n)^\tau, v = (v_1, \cdots, v_n)^\tau$, 系统状态方程 (1), (2) 的矩阵方程形式分别为

$$\dot{x} = \boldsymbol{L}x; \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ w_x\boldsymbol{L} & w_v\boldsymbol{L} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

系统的 Laplacian 矩阵[7-9] $\boldsymbol{L} = [l_{ij}]_{n\times n}$ 的元素

$$l_{ii} = \sum_{a_s \in N(a_i)} \gamma_{is},$$

$$l_{ij} = \begin{cases} -\gamma_{ij}, \ a_j \in N(a_i); \\ 0, \ a_j \notin N(a_i); \end{cases} \ j \neq i. \tag{5}$$

协同动力学系统的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 是行零和对角占优矩阵. 与此前的研究主要依托《非负矩阵论》不同, 本文直接从行零和对角占优矩阵的性质得出与式 (1), (2) 整体行为相关的 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的性质.

定义 1[9] 如果存在置换矩阵 P 使得

$$PMP^\tau = \begin{bmatrix} M_{11} & \boldsymbol{0} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

M_{11} 和 M_{22} 为阶大于等于 1 的方阵, 则 M 是可约的; 否则 M 是不可约的.

对 n 阶方阵 M, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为行列编号的集合, M 的矩阵图 $\mathit{\Gamma}(M) = \langle N, \mathcal{E} \rangle$ 定义为[10]

$$\mathcal{E} = \{(i, j) \in N \times N \,|\, m_{ij} \neq 0\}.$$

引理 1[9] M 不可约等价于 $\mathit{\Gamma}(M)$ 强连通.

M 可约则存在置换 P, 使得

$$M' = PMP^\tau = $$
$$\begin{bmatrix} M_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M_{pp} & & \\ M_{p+11} & & M_{p+1p} & M_{p+1p+1} & \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ M_{p+q1} & & M_{p+qp} & M_{p+qp+1} & \cdots & M_{p+qp+q} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

如果所有对角块 M_{ii} 均为不可约方阵, 则 M' 为 Frobenius 标准型. $\mathit{\Gamma}(M_{ii})$ 是 $\mathit{\Gamma}(M)$ 的强分量 (极大强连通子图), 对角块 M_{ii} 称为 M 的 Frobenius 块. 当 $1 \leqslant i \leqslant p$ 时, $\forall r \neq i$, $M_{ir} = \boldsymbol{0}$, 因此称其为独立块; 当 $p+1 \leqslant j \leqslant p+q$ 时, $\exists\, r < j, M_{jr} \neq \boldsymbol{0}$, 称其为非独立块.

假定系统 (1) 的 Lapacian $\boldsymbol{L}$ 已有 Frobenius 标准形式 (6), 即式 (6) 中 M_{ij} 用 L_{ij} 替代, 则有以下命题.

命题 1 令

$$\begin{cases} H_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ w_xL_{ii} & w_vL_{ii} \end{bmatrix}, \ j = i; \\ H_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_xL_{ij} & w_vL_{ij} \end{bmatrix}, \ j < i. \end{cases}$$

则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{11} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \boldsymbol{H}_{pp} & 0 & \ldots & 0 \\ H_{p+1,1} & \ldots & H_{p+1,p} & H_{p+1,p+1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{q+p,1} & \ldots & H_{q+p,p} & H_{q+p,p+1} & \ldots & H_{q+p,q+p} \end{bmatrix} \tag{7}$$

为二阶系统 (4) 的系数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的 Frobenius 标准型.

证明 由 L_{ii} 不可约易知 H_{ii} 不可约, 因此式 (7) 是 $\boldsymbol{H}$ 的 Frobenius 标准型. □

令

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{L}_{pp} & \\ C_1 & \cdots & C_p & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{H}_{pp} & \\ D_1 & \cdots & D_p & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

式 (8) 为非独立块合并后 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的 Frobenius 标准型. $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 合并非独立块, $C_i = (L_{p+1,i}, \cdots, L_{p+q,i})^\tau$ 为 $\boldsymbol{B}$ 相对 $\boldsymbol{L}_{ii}$ 的通讯块. $\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 合并非独立块, $D_i = (H_{p+1,i}, \cdots, H_{p+q,i})^\tau$ 为 $\boldsymbol{E}$ 相对 $\boldsymbol{H}_{ii}$ 的通讯块.

假定 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 已是 Frobenius 标准型, 则式 (3) 和 (4) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \\ \xi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{L}_{pp} & \\ C_1 & \cdots & C_P & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \\ \xi_B \end{bmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \\ \zeta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{H}_{pp} & \\ D_1 & \cdots & D_P & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \\ \zeta_E \end{bmatrix}.$$

其中

$$\xi_s = \xi_s^{(x)} = (x_{s1}, \cdots, x_{sn_s})^\tau,$$

$$\zeta_s = (\zeta_s^{(x)}, \zeta_s^{(v)})^\tau = (x_{s1}, \cdots, x_{sn_s}, v_{s1}, \cdots, v_{sn_s})^\tau$$

分别为一阶和二阶系统 s 子系统的状态向量; n_s 为第 $s (s = 1, 2, \cdots, p, \cdots, p+q)$ 个子系统的个体数.

定义 2 一阶系统的独立基本子系统, 非独立基

本子系统及非独立子系统分别为

$$\dot{\xi}_i = \boldsymbol{L}_{ii}\xi,\ i=1,2,\cdots,p;$$

$$\dot{\xi}_j = L_{jj}\xi_j + \sum_{s=1}^{j-1} L_{js}\xi_s,\ j=p+1,\cdots,p+q;$$

$$\dot{\xi}_B = \boldsymbol{B}\xi_B + \sum_{i=1}^{p} C_i\xi_i.$$

二阶系统的独立基本子系统、非独立基本子系统及非独立子系统分别为

$$\dot{\zeta}_i = \boldsymbol{H}_{ii}\zeta_i,\ i=1,2,\cdots,p;$$

$$\dot{\zeta}_j = H_{jj}\zeta_j + \sum_{s=1}^{j-1} H_{js}\zeta_s,\ j=p+1,\cdots,p+q;$$

$$\dot{\zeta}_E = \boldsymbol{E}\zeta_E + \sum_{i=1}^{p} D_i\zeta_i.$$

3　行零和对角占优矩阵

定义 3　令 $M=[m_{ij}]_{n\times n}, \forall i=1,2,\cdots,n$, 有:

1) $|m_{ii}| \geqslant \sum\limits_{i=1,j\neq i}^{n} |m_{ij}|$, 则 M 为对角占优的; 若第i行严格不等号成立, 则第 i 行为严格对角占优行.

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = 0$, 则 M 为行零和的.

下面给出一个基于 Gauss 消元的 Taussky 定理的证明.

定理 1[9](Taussky)　矩阵 M 若不可约, 对角占优, 且存在严格对角占优行, 则 M 满秩.

证明　不妨令 M 的第 1 行严格对角占优, 第 p 行对角占优, 则有:

1) $|cm_{11}| > |cm_{1p}| + \sum\limits_{j\neq 1,p} |cm_{1j}|$;

2) $|m_{pp}| \geqslant |m_{p1}| + \sum\limits_{j\neq 1,p} |m_{pj}| \Rightarrow$

$$|m_{pp}| - |cm_{1p}| >$$
$$(|m_{p1}| - |cm_{11}|) + \sum_{j\neq 1,p} (|m_{pj}| + |cm_{1j}|).$$

将第 1 行对第 p 行进行消元, 即将第 1 行乘以 $c=-m_{p1}/m_{11}$ 后加到第 p 行 (此时 $(|m_{p1}|-|cm_{11}|)=0$), 有

$$|m_{pp}+cm_{1p}| \geqslant |m_{pp}| - |cm_{1p}| >$$
$$\sum_{j\neq 1,p} (|m_{pj}| + |cm_{1j}|) \geqslant \sum_{j\neq 1,p} |m_{pj}+cm_{1j}|.$$

消元后第 p 行第 1 列为 0, 因此消元后第 p 行严格对角占优.

令 $L=\{l_1,\cdots,l_n\}$, 由 M 定义 L 的非交子集为

$$L_1 = \{l_1\},$$

$$L_s = \left\{ l_i \in L - \bigcup_{r=1}^{s-1} L_r | m_{ij}\neq 0;\ l_j \in L_{s-1} \right\}. \qquad (9)$$

假设 $L_k \neq \varnothing$, $L_{k+1}=\varnothing$, 令 $L_{k+1} = L - (L_0 \bigcup \cdots \bigcup L_k)$, 并从 $1\sim n$ 指定 $L_s(s=1,2,\cdots,k+1)$ 中元素的值, 使 $s<r$ 时 L_s 中元素的值小于 L_r 中元素的值. 按以上指定对 M 进行行列置换, 即将 M 的第 i 行置换后为 l_i 行, M 的第 i 列置换后为 l_i 列, 则有

$$M' = P^{\tau} M P =$$
$$\begin{bmatrix} m'_{11} & & & & & \\ M'_{21} & M'_{22} & & & M'' & \\ & M'_{32} & M'_{33} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \boldsymbol{0} & & M'_{kk-1} & M'_{kk} & \\ & & & & 0 & M'_{k+1k+1} \end{bmatrix}.$$

其中: $M'_{ss}(s=1,2,\cdots,k+1)$ 是方阵, $s=1$ 时为一阶方阵; $s=2,\cdots,k$时, M'_{ss-1} 中的任意一行均为非零行.

M 不可约, M'_{k+1k+1} 是 0 阶矩阵, 即 $L_{k+1}=\varnothing$. 假设 M 的第 1 行严格对角占优, 对 M' 按以下规则由上向下递次消元 $(s=2,\cdots,k)$: 1) m'_{s-1s-1} 对 $m'_{s,s-1}$ 消元; 2) m'_{ss} 内部消元, 将 M' 消元为上三角形. M' 消元后各行均严格对角占优, 因此对角元素的绝对值大于零, 即对角元素不为零. □

推论 1　M 为行零和对角占优矩阵, $n_s\times n_s$ 阶方阵 M_{ss} 为 M 的 Frobenius 块, 有:

1) M_{ss} 为独立块, 则 Rank $M_{ss}=n_s-1$;

2) M_{ss} 为非独立块, 则 M_{ss} 满秩.

证明　1) 修改 M_{ss} 任意一行对角元素使该行严格对角占优. 由 Taussky 定理, 修改后矩阵满秩, 因此 M_{ss} 任意 n_s-1 行 (列) 线性无关, 又 M_{ss} 为独立块时行零和, 所以不满秩, 即 Rank $M_{ss}=n_s-1$.

2) M_{ss} 为非独立块, $\exists r<s,\ M_{sr}\neq\boldsymbol{0}$, M_{ss} 存在严格对角占优行. 由 Taussky 定理, M_{ss} 满秩. □

定理 2　1) 行零和对角占优矩阵的 Gauss 行消元不改变矩阵元素的原有符号方向 (保号性); 2) 消元后依然是行零和对角占优矩阵 (封闭性).

证明　M 是行零和对角占优的, 则对 $p\neq i$ 有 $\mathrm{sign}(m_{ip})=-\mathrm{sign}(m_{ii})$, 并且 $|m_{ii}|\geqslant|m_{ip}|$. 令 $k_p=-(m_{ip}/m_{ii})$, 则 $0\leqslant k_p\leqslant 1$. 将第 i 行对第 j 行消元, 有

$$m'_{jp} = m_{jp} - (m_{ji}/m_{ii})\, m_{ip} =$$
$$m_{jp} - (m_{ip}/m_{ii})\, m_{ji} = m_{jp} + k_p m_{ji}.$$

对于 $p\neq j$, 有 m_{jp} 和 m_{ji} 同为 j 行非对角元素, 又 $k_p\geqslant 0$, 所以 $\mathrm{sign}(m'_{jp})=\mathrm{sign}(m_{jp})$.

对于 $p=j$, 有 $|m_{jj}|\geqslant|m_{ji}|$, 又 $k_j\leqslant 1$, 因此 $\operatorname{sign}(m'_{jj})=\operatorname{sign}(m_{jj})$.

1) 得证. 另外, 显然 Gauss 行消元不改变被消元行的行零和性, 结合 1), 可得 2). □

定理 3 $M=[m_{ij}]_{n\times n}$ 是不可约行零和对角占优矩阵, $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$ 是 M 零特征根左特征向量, 则有:

1) $\operatorname{sign}(\rho_1 m_{11})=\cdots=\operatorname{sign}(\rho_n m_{nn})$;

2) M 的零特征根为单根当且仅当 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho_i\neq 0$.

证明 令 $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$ 是 M 零特征根左特征向量, 定义 $M'=[m'_{ij}]$, 有

$$M'=\begin{bmatrix}\rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n\end{bmatrix}M.$$

按定义 M' 保持了 M 的行零和对角占优性, 同时 M' 列零和. 据此, M' 的各行 (各列) 非对角元素与同行 (同列) 对角元素符号相反. M' 不可约, $\Gamma(M')$ 强连通, 因此 M' 对角元素必取相同符号. 1) 得证.

M 的各行和为零, 将 $\det(M-\lambda\boldsymbol{I})$ 的第 2∼第 n 列全部加到第 1 列后, 第 2∼第 n 行各行均分别减第 1 行, 得

$$|M-\lambda\boldsymbol{I}|=$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & m_{12} & \ldots & m_{1n}\\ 0 & (m_{22}-m_{12})-\lambda & \ldots & (m_{2n}-m_{1n})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & (m_{n2}-m_{12}) & \ldots & (m_{nn}-m_{1n})-\lambda\end{vmatrix},$$

$$\det(M-\lambda\boldsymbol{I})=-\lambda\det(\hat{M}-\lambda\boldsymbol{I}).$$

根据推论 1 的 1), 可知 M 的第 1 行是 M 其他各行的线性组合. $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$ 是 M 零特征根左特征向量, M 第 1 行的线性组合系数为

$$k_2=-\rho_2/\rho_1,\ \cdots,\ k_n=-\rho_n/\rho_1;$$

$$\hat{M}=\begin{bmatrix}1-k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n\\ -k_2 & 1-k_3 & \cdots & -k_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -k_2 & -k_3 & \cdots & 1-k_n\end{bmatrix}M(m_{11})=$$

$$KM(m_{11}).$$

$M(m_{11})$ 是 M 消去 m_{11} 所在行列的余子阵, 由推论 1 的 1)可知, $M(m_{11})$ 满秩. 将 K 的第 2∼第 n 行各行分别减第 1 行后, 第2∼第 n 列全部加到第 1 列, 变换为

$$K'=\begin{bmatrix}1-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}k_i & K''\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ K''=(k_2,\cdots,k_n).$$

$\det(M-\lambda\boldsymbol{I})$ 中 λ^s 因子项次数 $s=1$ 等价于

$$\sum_{i=2}^{n}k_i\neq 1,\ \sum_{j=2}^{n}-\frac{\rho_j}{\rho_1}\neq 1,\ \sum_{j=1}^{n}\rho_j\neq 0. \qquad \square$$

4 协同动力学系统 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的性质

$\boldsymbol{L}$ 是协同动力学系统 (3) 和 (4) 的 Laplacian 矩阵, 其行零和、对角占优, 且对角元素均非正. 由 Gersgorin 圆盘定理[9] 易得以下性质.

引理 2[1] 协同动力学系统 (3) 和 (4) 的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的非零特征根实部小于 0.

$\boldsymbol{H}$ 的特征根可由 $\boldsymbol{L}$ 的特征根确定, 即

$$\boldsymbol{H}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\ w_x\boldsymbol{L} & w_v\boldsymbol{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix},$$

$$(w_x+w_v\lambda)\boldsymbol{L}x=\lambda^2 x,\ \boldsymbol{L}x=(\lambda^2/(w_x+w_v\lambda))x.$$

其中 $\mu=\lambda^2/(w_x+w_v\lambda)$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的特征根. 记 λ_μ 为 $\boldsymbol{L}$ 的特征根 μ 对应的 $\boldsymbol{H}$ 的特征根, 有

$$\lambda_\mu=(w_v\mu\pm\sqrt{(w_v\mu)^2+4w_x\mu})/2.$$

当 $w_v=0$ 时, $\boldsymbol{H}$ 存在实部大于零的特征根, 二阶系统 (4) 不可能趋于平衡状态, 因此约定 $w_v>0$.

$$\lambda_\mu=\frac{w_v}{2}(\mu\pm\sqrt{\mu^2+4w\mu}),\ w=w_x/w_v^2. \tag{10}$$

令 $\mathcal{U}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 矩阵的非零特征根的集合, 定义

$$\bar{w}=\min\{-\operatorname{Re}(\mu)(1+\operatorname{ctg}^2\theta_\mu)|\mu\in\mathcal{U}\}, \tag{11}$$

其中 $\operatorname{Re}(\mu)$ 是 μ 的实部, θ_μ 为 μ 的幅角.

文献 [4] 给出了 $\boldsymbol{H}$ 非零特征根实部小于 0 的条件, 可等价表述为如下引理, 基于这一表述将给出一个更直接的证明.

引理 3 $\boldsymbol{L}$ 是协同动力学系统 (4) 的 Laplacian 矩阵, 则其系数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 所有非零特征根实部小于 0, 当且仅当 $w=w_x/w_v^2<\bar{w}$.

证明 令 $\mu=a+b\mathrm{i}$, 求 $\operatorname{Re}(\lambda_\mu)=0$ 时 w 的根.

$$S=\mu^2+4w\mu=$$

$$(a^2-b^2+4wa)+(2ab+4wb)\mathrm{i}=(|a|+c\mathrm{i})^2.$$

联立复方程的实部和虚部, 消去 c 后可得两个根, 即

$$w_1=0,\ w_2=-a|\mu|^2/b^2=-a(1+\operatorname{ctg}^2\theta_\mu).$$

μ 为 $\boldsymbol{L}$ 非零特征根, 由引理 2, μ 的实部 $a<0$, 所以 $w_2>0$. 取 $w=-a/2\in(w_1,w_2)=(0,w_2)$, 则

$$S=-(a^2+b^2),\ \lambda_\mu=(w_v/2)(\mu\pm\sqrt{S}).$$

μ 的实部小于零且 $\sqrt{S}$ 是虚数, 因此 $\operatorname{Re}(\lambda_\mu)<0$. 由 $\operatorname{Re}(\lambda_\mu)$ 是相对于 w 的连续函数, 充分性得证. $w\to\infty$, S 的模趋近于 ∞ 且其幅角趋近于 θ_μ. 结合 S 相对于 w 的连续性可得必要性. □

定理 4 令 $\boldsymbol{L}$ 是协同动力学系统 (3) (或 (4)) 的 Laplacian 矩阵, 并具有 Frobinius 标准型, 有:

1) $\boldsymbol{L}_{ii}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的独立块, 则 $\boldsymbol{L}_{ii}$ 的欠秩数为 1 且零特征根是单根[1], 零特征根归一化左特征向量是唯一确定的正向量.

2) $\boldsymbol{L}$ 合并非独立块 $\boldsymbol{B}$ 满秩, 且

$$\boldsymbol{0} \leqslant -\boldsymbol{B}^{-1}C_i\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{1},\ i=1,2,\cdots,p,$$

$$\sum_{i=1}^{p} -\boldsymbol{B}^{-1}C_i\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1},$$

其中 $\boldsymbol{1} := (1,\cdots,1)^\tau$.

证明　1) $\boldsymbol{L}_{ii}$ 是独立块, 其对角元素符号相同. 由定理 3 的 1)可知, 其零特征根左特征向量 $\kappa_i = (\kappa_{i1},\cdots,\kappa_{in_i})$ 分量符号相同, 且由推论 1 的 1)可得, $\boldsymbol{L}_{ii}$ 的欠秩数为 1, 因此 κ_i 的分量均非零. κ_i 的归一化形式 $\rho_i = \kappa_i \Big/ \sum_{s=1}^{n_i} \kappa_{is}$ 存在, 唯一并且为正向量. 根据定理 3 的 2) 还可得 $\boldsymbol{L}_{ii}$ 的零特征根是单根.

2) $\boldsymbol{L}$ 是具有式 (8) 形式的 Frobenius 标准型. 合并非独立块 $\boldsymbol{B}$ 是下三角分块矩阵. 由推论 1 的 2), 其对角块 (非独立块) 满秩, 因此 $\boldsymbol{B}$ 满秩.

令 G 是针对 $\boldsymbol{B}$ 所在行的行消元变换, $G\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵. 消元后左乘 $(G\boldsymbol{B})^{-1}$, 有

$$(G\boldsymbol{B})^{-1}(GC_1,\cdots,GC_p,G\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}^{-1}C_1,\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}C_p,\boldsymbol{I}).$$

由定理 2 的 1) 及 $\boldsymbol{B}$ 对角元素符号相同, 可知 $\boldsymbol{B}^{-1}C_i = (G\boldsymbol{B})^{-1}(GC_i)$ 的元素全部非正.

由定理 2 的 2) 可知, 行消元不改变矩阵行零和性, 左乘对角矩阵 $(G\boldsymbol{B})^{-1}$ 亦不改变矩阵的行零和性, 因此

$$(\boldsymbol{B}^{-1}C_1,\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}C_p,\boldsymbol{I})\boldsymbol{1} = \sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{B}^{-1}C_i\boldsymbol{1}+\boldsymbol{1}=\boldsymbol{0}.$$ □

由定理 4, 命题 1 和式 (10) 易得:

定理 5　给定 $\boldsymbol{H}$ 的 Frobenius 标准型 (7) (或 (8)), 若 $\boldsymbol{L}_{ss}$ 的阶为 $n_s \times n_s$, 则 $\boldsymbol{H}_{ss}$ 的阶为 $2n_s \times 2n_s$.

1) $\boldsymbol{H}$ 的独立块 $\boldsymbol{H}_{ii} (i=1,2,\cdots,p)$ 的秩为 $2n_i-1$, 零特征根是二重根. $\boldsymbol{H}_{ii}$ 零特征根的线性无关的广义特征向量为

$$h_1 = (\boldsymbol{1},\boldsymbol{0})^\tau,\ \boldsymbol{H}_{ii}h_1 = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})^\tau;$$

$$h_2 = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})^\tau,\ \boldsymbol{H}_{ii}h_2 = (\boldsymbol{1},\boldsymbol{0})^\tau.$$

2) $\boldsymbol{H}$ 的合并非独立块 $\boldsymbol{E}$ 满秩.

5　协同动力学系统的渐近性质

上一节根据行零和对角占优矩阵性质 (定理 1～定理 5), 给出了 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的性质, 它们完全决定了协同动力学系统 (3) 和 (4) 的渐近性.

$\boldsymbol{L}_{ii}$ 是协同动力学系统 (3) 或 (4) 独立基本子系统的 Laplacian, $\rho_i = (\rho_{i1},\cdots,\rho_{in_i})$ 是 $\boldsymbol{L}_{ii}$ 零特征根归一化左特征向量. 根据定理 4 的 1), ρ_i 是唯一确定的正向量.

定义 4

1) ρ_i 称为 i 独立基本子系统的权重系数向量.

2) $\chi_i(t) = \sum_{r=1}^{n_i} \rho_{ir}x_{ir}(t)$ 称为 i 独立基本子系统的 t 时带权中心.

3) $\upsilon_i(t) = \dot{\chi}_i(t) = \sum_{r=1}^{n_i} \rho_{ir}\dot{\upsilon}_{ir}(t)$ 称为 i 独立基本子系统的 t 时带权中心速度.

由零特征根左特征向量的性质[6-7]易得:

引理 4　一阶协同动力学系统 (3) 的独立基本子系统的带权中心是不变量, 即对任意的 $t \geqslant 0$, 有

$$\dot{\chi}_i = \rho_i\dot{\xi}_i = \rho_i\boldsymbol{L}_{ii}\xi_i = 0,$$

$$\chi_i(t) = \chi_i(0) = \sum_{s=1}^{n_i}\rho_{is}x_{is}(0).$$

引理 5　二阶协同动力学系统 (4) 的独立基本子系统的带权中心保持匀速运动, 即对任意 $t \geqslant 0$, 有

$$\dot{\upsilon}_i = \rho_i\dot{\zeta}_i^{(v)} = \rho_i(w_x\boldsymbol{L}_{ii}\zeta_i^{(x)} + w_x\boldsymbol{L}_{ii}\zeta_i^{(v)}) = 0,$$

$$\upsilon_i(t) = \upsilon_i(0) = \rho_i\zeta_i^{(v)}(0) = \sum_{s=1}^{n_i}\rho_{is}\upsilon_{is}(0),$$

$$\chi_i(t) = \chi_i(0) + \upsilon_i(0)t = \sum_{s=1}^{n_i}\rho_{is}x_{is}(0) + t\sum_{s=1}^{n_i}\rho_{is}\upsilon_{is}(0).$$

根据 $\boldsymbol{L}$ 的代数性质 (引理 2, 定理 4), 结合引理 4 易得如下定理:

定理 6[6]　一阶协同动力学系统 (3) 有以下性质:

1) 系统稳定且存在稳定极限点.

2) 系统的独立基本子系统个体状态趋于一致, 并且一致极限状态为子系统的带权中心, 即对第 i 独立基本子系统, 有

$$\lim_{t\to\infty}\xi_i = \boldsymbol{1}\chi_i(t) = \boldsymbol{1}\chi_i(0) = \boldsymbol{1}\Big(\sum_{r=1}^{n_i}\rho_i x_{ir}(0)\Big).$$

3) 非独立子系统个体的状态极限是系统独立子系统带权中心的凸组合, 即非独立子系统有

$$\lim_{t\to\infty}\xi_B = \sum_{i=1}^{p} -\boldsymbol{B}^{-1}C_i\boldsymbol{1}\chi_i(0) = \sum_{i=1}^{p} -\boldsymbol{B}^{-1}C_i\boldsymbol{1}\Big(\sum_{r=1}^{n_i}\rho_{ir}x_{ir}(0)\Big).$$

二阶多个体动力学系统平衡态可通过经典动力学中熟悉的惯性概念描述.

定义 5　如果存在一组常量 $\upsilon_i (i=1,2,\cdots,n)$, 当 $t\to\infty$ 时, $\upsilon_i(t)\to\upsilon_i$, 即 $x_i(t)\to\chi_i(t) (\chi_i(t) = \chi_i + \upsilon_i t)$, 称二阶多个体动力学系统 (2) 趋于惯性状态.

惯性状态如果有 $\upsilon_1 = \cdots = \upsilon_n$, 则称为速度一致惯性状态; 速度一致惯性状态还满足 $\chi_1 = \cdots = \chi_n$, 则称为位置一致惯性状态.

根据 $\boldsymbol{H}$ 的代数性质(引理3, 定理5), 结合定理4的2)和引理5易得如下定理:

定理 7[7] 二阶协同动力学系统(4)有以下性质:

1) 当且仅当 $w < \bar{w}$, 系统(4)趋于惯性状态.

2) 系统趋于惯性状态, 则独立基本子系统个体趋于位置一致惯性状态, 且该状态为子系统的带权中心, 即对 $s = 1, 2, \cdots, n_i$, 当 $t \to \infty$ 时, 有

$$\zeta_i^{(v)}(t) \to \mathbf{1}\upsilon_i(0),$$

$$\zeta_i^{(x)}(t) \to \mathbf{1}\chi_i(t) = \mathbf{1}(\chi_i(0) + \upsilon_i(0)t).$$

3) 系统趋于惯性状态, 系统非独立基本子系统中的个体趋于系统独立基本子系统带权中心确定的凸组合, 即 $t \to \infty$ 时, 有

$$\zeta_E^{(v)}(t) \to \sum_{i=1}^{p}(-\boldsymbol{B}^{-1}C_i\mathbf{1})\upsilon_i(0);$$

$$\zeta_E^{(x)}(t) \to \sum_{i=1}^{p} -\boldsymbol{B}^{-1}C_i\mathbf{1}\chi_i(t) = \sum_{i=1}^{p} -\boldsymbol{B}^{-1}C_i\mathbf{1}(\chi_i(0) + \upsilon_i(0)t).$$

定理6和定理7可针对个体状态为高维的情形, 即 $x_i \in \boldsymbol{R}^m(m)$ 的情况.

6 结 论

本文将线性多个体协同动力学系统的渐近性建立在普通矩阵代数的基础上, 用初等线性代数系统地整理了相关结果, 从而为这方面已经相对完善的理论研究成果的传播与应用作了数学方法上的铺垫.

参考文献(References)

[1] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching tpology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[2] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proce of the IEEE, 2007, 95(2): 215-233.

[3] Zhiyun Lin, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient conditions for formation control of unicyles[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(1): 121-127.

[4] Wei Ren, Ella Atkin. Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf and Exhibit 2005. San Francisco: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.

[5] Peter Wieland, Jungsu Kim, Scheu H, et al. On consensus in multi-agent systems with linear high-order agents[C]. Proc of the 17th World Congress of The Int Federation of Automatic Control. Seoul, 2008: 1541-1546.

[6] Jin Jidong, Zheng Yufan. The consensus of multi-agent system under directed network — A matrix analysis approach[C]. 7th IEEE Int Conf on Control and Automation. Piscataway: IEEE Computer Society, 2010: 280-284.

[7] Jin Jidong, Zheng Yufan. Collective behavior of second-order multi-agent system in directed network[C]. 8th IEEE Int Conf on Control and Automation. Piscataway: IEEE Computer Society, 2010: 376-381.

[8] Jin Jidong, Zheng Yufan, Shao Haibin, et al. Consensus problem of second-order multi-agent system in directed network: A matrix analysis approach[C]. Chinese Control and Decision Conf. Piscataway: IEEE Computer Society, 2010: 3970-3975.

[9] Biggs N Algebraic. Graph theory[M]. Combridge: Cambridge University Press, 1994.

[10] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Combridge: Cambridge University Press, 1991.

(上接第654页)

[10] Bloemen H H J, Van den Boom T J J, Verbruggen H B. Model-based predictive control for Hammerstein-Wiener systems[J]. International J of Control, 2001, 74(5): 482-495.

[11] Zhang F. The Schur complement and its applications[M]. New York: Springer, 2005.

[12] 金伟强, 李济顺. 电弧炉电极调节系统的设计[J]. 工业加热, 2008, 37(2): 45-47.
(Jin W Q, Li J S. The design of electrode regulation system for electric arc furnace[J]. Industrial Heating, 2008, 37(2): 45-47.)