文章编号: 1001-0920 (2011) 05-0773-04

一种相关证据的合成规则

肖 文[1], 王正友[1,2], 王耀德[1]

(1. 江西财经大学 信息管理学院，南昌 330032；2. 石家庄铁道大学 信息科学与技术学院，石家庄 050043)

摘 要: 相关证据可视为两个独立源证据与同一相关源证据合成产生, 基于这一假设, 提出了合成规则的逆运算——“去合成”规则, 在此基础上提出一类相关证据的合成规则, 避免了对相关源证据的重复计算. 通过算例进一步验证了该方法的有效性.

关键词: 相关证据；合成规则；证据理论；去合成规则

中图分类号: TP301　　　　**文献标识码:** A

Combination rule for dependent evidences

XIAO Wen[1], *WANG Zheng-you*[1,2], *WANG Yao-de*[1]

(1. School of Information Technology，Jiangxi University of Finance and Economics，Nanchang 330032，China; 2. School of Information Science and Technology，Shijiazhuang Tiedao University，Shijiazhuang 050043，China. Correspondent：WANG Zheng-you，E-mail：zhengyouwang@gmail.com)

Abstract: Dependent evidences can be viewed as the combination results of two independent evidences and the common dependent evidence. Based on this assumption, a reverse operation of combination rule, “de-combination rule”, is proposed in this paper, and a combination rule for dependent evidences is also given so as to avoid the double counting of the same dependent evidence. A numerical example shows the effectiveness of the proposed rule.

Key words: dependent evidence；combination rule；evidence theory；de-combination rule

1 引 言

多源信息融合是将多个不同信息源 (可能是传感器、分类器、专家意见等) 的不确定信息集结, 以产生统一的描述结果. Dempster-Shafer (DS) 证据理论[1-2]在处理这类不确定信息的表示及合成方面具有独特的优势, 引起了国内外学者的广泛关注. 然而, DS 模型的合成规则隐含了证据独立性假设, 违背该假设的证据合成会产生过估计的结果. 在现实中这一假设有时难以满足, 为此, 国内外学者试图寻求合适的相关证据组合方法, 已有的解决方法大致可分为 3 类: 1) 将相关证据分解为独立源证据, 再将相互独立的源证据按 Dempster 规则进行合成. 文献 [3] 利用梯度下降法迭代求解以辨识独立源证据; [4] 采取构建线性方程组的方法反求独立源证据; [5] 针对识别框架为贝叶斯结构的情况, 研究了方程组的构建和求解问题. 2) 对相关证据乘以一个修正系数, 将相关证据转化为近似独立的证据, 再按 Dempster 规则合成. [6-8] 定义了规范证据相关度, 根据规范证据相关度得到修正系数, 用修正系数对相关证据的所有焦元进行修正, 以减少相关性的影响. [9] 将相关证据的焦元分为相关焦元与非相关焦元, 提出仅对相关焦元修正的合成方法, 修正系数是可变参数, 面向具体问题时通过软计算方法学习产生. [10] 提出了基于粒子群神经网络优化的修正系数学习方法. 3) 在无法明确证据相关程度的情况下, 遵循最少承诺准则, 采取谨慎态度对相关证据进行合成. [11] 将冲突最小化视为最少承诺的方式, 通过对冲突增加惩罚因子, 构建函数最大化寻求融合结果. [12]按照将 BBA 等量拆分的方法, 基于最大期望势得到谨慎合成结果. [13] 根据信任函数的加权分解, 通过权值最小化获得谨慎合成结果.

本文延续第 1 类的思路, 假设相关源证据已知, 通过对 Dempster 合成规则的分析, 提出一种更为简洁、方便的相关证据合成方法.

收稿日期: 2010-02-25；**修回日期:** 2010-05-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60963011)；教育部人文社科规划项目(09YJA630055, 09YJC630107)；全国教育科学“十一五”规划项目(ECA080292)；江西省自然科学基金项目(2009GZS0022).

作者简介: 肖文(1976−), 男, 博士生, 从事智能决策的研究；王正友(1972−), 男, 教授, 博士, 从事智能信息处理、视频图像处理等研究.

2 证据的表示及合成

设 Θ 为一个有限、互斥且完备的假设空间, 称为识别框架. 在该识别框架下的基本信任分配 (BBA) 是一个函数 $m: 2^{\Theta} \mapsto [0,1]$ 满足 $m(\varnothing)=0$, $\sum\limits_{A\subseteq\Theta} m(A) = 1$. 所有满足 $m(A)>0$ 的 A 称为焦元, 特别地, 当 BBA 的焦元仅包含 Θ 时, 即 $m(\Theta)=1$, 称为空 BBA.

根据上述定义的 BBA, 对应的信任函数 (Bel), 似然函数 (Pl), 众信度函数 (Q) 分别定义为

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B\subseteq A} m(B), \tag{1}$$

$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{A\cap B\neq\varnothing} m(B), \tag{2}$$

$$Q(A) = \sum_{B\supseteq A} m(B). \tag{3}$$

函数 m, Bel, Pl, Q 等为不确定信息的表示提供了灵活的表达方式, 本质上这些函数是一一对应的[14].

若 m_1 与 m_2 分别是识别框架 Θ 下两个相互独立的 BBA, 则 Dempster 合成规则可表示为

$$m(A) = K^{-1}\cdot \sum_{B_i\cap C_j = A} m_1(B_i)m_2(C_j), \tag{4}$$

其中 $K = \sum\limits_{B_i\cap C_j\neq\varnothing} m_1(B_i)m_2(C_j)$ 为归一化因子.

众信度函数提供了另一种信度函数的表达方式, 对于一般的众信度函数, 均有 $\sum\limits_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q(X) = 1$. 根据众信度函数也可得到等价的 Dempster 合成规则[15]:

$$Q(A) = K^{-1}\cdot Q_1(A)Q_2(A), \tag{5}$$

其中 $K = \sum\limits_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_1(X)Q_2(X)$ 为归一化常数, 与式 (4) 的归一化因子相同[15]. 对于 n 个 BBA 的合成, 具有类似的结果, 即

$$Q(A) = K^{-1}\cdot Q_1(A)Q_2(A)\cdots Q_n(A), \tag{6}$$

其中

$$K = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_1(X)Q_2(X)\cdots Q_n(X).$$

3 相关证据的合成方法

文献 [3] 假设相关证据 E_1 和 E_2 是由两个不相关的源证据 E_{h1} 和 E_{h2} 分别与同一源证据 E_h 合成得到, E_{h1} 和 E_{h2} 表示独立部分, 称为独立源证据; E_h 表示相关部分, 称为相关源证据. 如图 1 所示, E_h 既参与 E_1 的形成, 又参与 E_2 的形成, 因此 E_1 和 E_2 是相关证据.

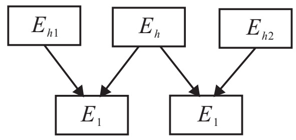

图 1 相关证据的产生

此时, 若直接利用 Dempster 规则合成将得到

$$m = m_1\oplus m_2 = m_{h1}\oplus m_h\oplus m_{h2}\oplus m_h.$$

显然, 相关部分 E_h 多计算了一次, 导致了合成结果的超估计. 按照不重复计数原则[16], 合理结果应为

$$m^* = m_{h1}\oplus m_{h2}\oplus m_h.$$

为了得到 E_1 和 E_2 的正确合成结果, 可以考虑先由相关源证据 E_h 辨识出 E_{h1} 和 E_{h2}, 然后再求 E_1 和 E_2 的合成证据. 证据 E_1 和 E_2 的 BBA 分别为 $m_{h1}\oplus m_h$ 和 $m_{h2}\oplus m_h$, 因此根据 E_1 或 E_2 反求 E_{h1} 或 E_{h2} 是合成的逆运算. 文献 [3] 采用梯度下降法求解, 首先选择初始的 m_{h1}, 并计算其与 m_h 的正交和. 如果这个正交和与 m_1 之间有误差存在, 则按梯度下降算法选择新的 m_{h1}, 以使该误差减少, 如此迭代直到获得满意的解. 由于算法中涉及正交和的迭代求解和误差函数, 计算工作量较大, 得到的是近似解且结果不唯一. [4] 进一步提出了构建线性方程组求解, 该方法较 [3] 具有更低的时间复杂性, 可以得到精确解. 然而, 当识别框架的元素增多时, 线性方程组的构建与求解将渐趋复杂, 对于识别框架 Θ 而言, 方程组至多包含了 $2^{|\Theta|}$ 个未知数, 有 $2^{|\Theta|}$ 个线性无关的方程, 计算量仍然很大. 事实上, 由式 (5) 的合成规则, 可以得到合成规则的逆运算——“去合成”规则.

定理 1 若 m 是识别框架 Θ 下两个 BBA 的合成结果, 即 $m = m_1\oplus m_2$, 如果已知 m_1 且 $m_1(\Theta)\neq 0$, 则 m_2 可通过“去合成”规则得到, 记为 ($m_2 = m\ominus m_1$)

$$Q_2(A) = C^{-1}\cdot\frac{Q(A)}{Q_1(A)}, \tag{7}$$

其中 $C = \sum\limits_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q(X)/Q_1(X)$.

证明 由于涉及除运算, 需要假定 $m_1(\Theta)\neq 0$ (当 $m_1(\Theta)=0$ 时, 不一定存在唯一解[4]). 因为 $m = m_1\oplus m_2$, 由式 (5) 的合成规则可知

$$Q(A) = K^{-1}\cdot Q_1(A)Q_2(A).$$

若 $m_1(\Theta)\neq 0$, 则必有 $Q_1(A)\neq 0, \forall A\subseteq\Theta$, 于是有

$$Q_2(A) = K\cdot\frac{Q(A)}{Q_1(A)}.$$

注意到 $\sum\limits_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_2(X) = 1$, 有

$$\begin{aligned} K = &\Big(\sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_2(X)\Big)^{-1}\cdot K = \\ &\Big(\sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}\frac{K^{-1}Q_1(X)Q_2(X)}{Q_1(X)}\Big)^{-1} = \\ &\Big(\sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}\frac{Q(X)}{Q_1(X)}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

记 $C = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q(X)/Q_1(X)$, 从而有

$$Q_2(A) = C^{-1}\cdot\frac{Q(A)}{Q_1(A)}.$$

由此定理得证. □

Smets 研究了 TBM 模型中的证据相关问题[17], 如果能够知道证据 E_1 与 E_2 的独立合成结果 m^*, 则容易确定这两个证据是否存在相关, 即

$$\forall A\subseteq\Theta,\ q_0(A) = \frac{q_1(A)q_2(A)}{q^*(A)}. \tag{8}$$

其中: q_1 和 q_2 分别是证据 E_1 和 E_2 的众信度函数, q^* 是 m^* 对应的众信度函数, q_0 是相关源证据的众信度函数. 当 q_0 为空信度函数时, 证据 E_1 和 E_2 是独立的; 反之, 根据式 (8), 如果已知相关源证据, 则可得到相关证据的合成方法如下:

$$\forall A\subseteq\Theta,\ q^*(A) = \frac{q_1(A)q_2(A)}{q_0(A)}. \tag{9}$$

在 TBM 模型中, 所有的信度函数均未归一化. 对于归一化的相关证据合成, 有如下定理:

定理 2 若 m_1 和 m_2 是识别框架 Θ 下两个相关的 BBA, 已知相关源证据的 BBA 为 m_h 且 $m_h(\Theta)\neq 0$, 则相关 BBA 的合成规则表示如下:

$$Q^*(A) = c^{-1}\cdot\frac{Q_1(A)Q_2(A)}{Q_h(A)}, \tag{10}$$

其中 $c = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_1(X)Q_2(X)/Q_h(X)$.

证明 由 $m_h(\Theta)\neq 0$, 得 $Q_h(A)\neq 0, \forall A\subseteq\Theta$. 假设存在两个独立源证据 m_{h1} 和 m_{h2}, 使得

$$m_1 = m_{h1}\oplus m_h,\ m_2 = m_{h2}\oplus m_h.$$

根据式 (5), 有

$$Q_1(A) = K_1^{-1}Q_{h1}(A)Q_h(A),$$
$$Q_2(A) = K_2^{-1}Q_{h2}(A)Q_h(A),$$

则

$$Q_{h1}(A)Q_h(A) = K_1Q_1(A),$$
$$Q_{h2}(A)Q_h(A) = K_2Q_2(A).$$

根据 $m^* = m_{h1}\oplus m_{h2}\oplus m_h$, 及式 (6) 的合成规则, 有

$$Q^*(A) = K^{-1}\cdot Q_{h1}(A)Q_{h2}(A)Q_h(A).$$

其中

$$K = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_{h1}(X)Q_{h2}(X)Q_h(X).$$

于是, 有

$$K = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}\frac{Q_{h1}(X)Q_h(X)Q_{h2}(X)Q_h(X)}{Q_h(X)} = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}\frac{K_1Q_1(X)\cdot K_2Q_2(X)}{Q_h(X)} = K_1K_2\sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}\frac{Q_1(X)Q_2(X)}{Q_h(X)},$$

$$Q^*(A) = K^{-1}\cdot\frac{Q_{h1}(A)Q_h(A)Q_{h2}(A)Q_h(A)}{Q_h(A)} = K^{-1}\cdot\frac{K_1Q_1(A)\cdot K_2Q_2(A)}{Q_h(A)} = K^{-1}\cdot K_1K_2\frac{Q_1(A)Q_2(A)}{Q_h(A)} = \Big(\sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}\frac{Q_1(X)Q_2(X)}{Q_h(X)}\Big)^{-1}\cdot\frac{Q_1(A)Q_2(A)}{Q_h(A)}.$$

令 $c = \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Theta}(-1)^{|X|+1}Q_1(X)Q_2(X)/Q_h(X)$, 则

$$Q^*(A) = c^{-1}\cdot\frac{Q_1(A)Q_2(A)}{Q_h(A)}.$$

因此定理得证. □

4 算例分析

以下利用文献 [3] 中的算例验证上述方法. 设识别框架 $\Theta = \{A,B\}$, 假设相关证据 E_1 和 E_2 是由两个独立的源证据 E_{h1} 和 E_{h2} 分别与相关源证据 E_h 合成得到. 如果 3 个源证据 E_{h1}, E_{h2} 和 E_h 的 BBA 分别为

$$m_{h1}(\{A\})=0.1,\ m_{h1}(\{B\})=0.3,\ m_{h1}(\{A,B\})=0.6,$$
$$m_{h2}(\{A\})=0.5,\ m_{h2}(\{B\})=0.2,\ m_{h2}(\{A,B\})=0.3,$$
$$m_h(\{A\})=0.2,\ m_h(\{B\})=0.7,\ m_h(\{A,B\})=0.1,$$

则对应的相关证据 E_1 和 E_2 的 BBA 分别为 (简便起见, 以下结果均以分数表示)

$$m_1(\{A\}) = \frac{5}{29},\ m_1(\{B\}) = \frac{22}{29},\ m_1(\{A,B\}) = \frac{2}{29},$$
$$m_2(\{A\}) = \frac{21}{61},\ m_2(\{B\}) = \frac{37}{61},\ m_2(\{A,B\}) = \frac{3}{61}.$$

按照 $m^* = m_{h1}\oplus m_{h2}\oplus m_h$, 相关证据 E_1 和 E_2 正确的合成结果应为

$$m^*(\{A\}) = \frac{25}{85},\ m^*(\{B\}) = \frac{57}{85},\ m^*(\{A,B\}) = \frac{3}{85}.$$

若已知相关证据 E_1 和 E_2, 则利用定理 1 的“去合成”规则, 可根据相关源证据 E_h 反求独立源证据 E_{h1} 和 E_{h2}, 如表 1 所示. 此外, 如果仅想获得相关证据 E_1 和 E_2 的合成结果, 则无需辨识独立源证据 E_{h1} 和 E_{h2}, 利用定理 2 便可直接得出这两个相关证据的合

表 1 相关证据合成

	E_{h1}		E_{h2}		E^*	
	Q_{h1}	m_{h1}	Q_{h2}	m_{h2}	Q^*	m^*
$\{A\}$	7/10	0.1	8/10	0.5	28/85	25/85
$\{B\}$	9/10	0.3	5/10	0.2	60/85	57/85
$\{A,B\}$	6/10	0.6	3/10	0.3	3/85	3/85

成结果.

在该例中, 文献[3]需设定误差门限进行迭代求解, 计算量大且仅能得到近似结果. 文献[4]能恢复独立源证据, 但需构建和求解线性方程组. 而且, 这些方法均需要辨识出独立源证据才能对相关证据进行合成. 相比而言, 本文方法在证据理论框架下实现, 容易理解和分析, 在合成时无需辨识独立源证据, 利用信任函数的矩阵运算[14]能方便地得到合成结果.

5 结 论

基于证据相关源的假设, 即相关证据是由两个不相关的独立源证据分别与同一相关源证据合成得到, 本文提出了辨识独立源证据的"去合成"规则与组合相关证据的合成规则. 在已知相关证据及相关源证据的前提下, 根据"去合成"规则可以完全恢复独立源证据, 并根据相关证据合成规则可以直接由相关证据获得准确的合成结果, 无需辨识独立源证据, 较已有方法更为简便、易于实现. 然而, 如何获取相关源证据或估计近似的相关源证据仍是需要进一步研究的问题.

参考文献(References)

[1] Dempster A. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325-339.

[2] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.

[3] 孙怀江, 杨静宇. 一种相关证据合成方法[J]. 计算机学报, 1999, 22(9): 1004-1007.
(Sun H J, Yang J Y. A combination method for dependent evidences[J]. Chinese J of Computers, 1999, 22(9): 1004-1007.)

[4] 王明文, 吴根秀, 孙永强. 相关证据合成方法[J]. 江西师范大学学报, 2002, 26(2): 135-137.
(Wang M W, Wu G X, Sun Y Q. The combination method for dependent evidence[J]. J of Jiangxi Normal University, 2002, 26(2): 135-137.)

[5] 张震龙, 刘思伟, 高社生, 等. 相关证据合成方法的研究及改进[J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(2): 452-454.
(Zhang Z L, Liu S W, Gao S S, et al. The study and improve of dependent evidence combining method[J]. J of Projectiles Rockets, Missiles and Guidance, 2006, 26(2): 452-454.)

[6] 肖人彬, 王雪, 费奇, 等. 相关证据合成方法的研究[J]. 模式识别与人工智能, 1993, (9): 227-234.
(Xiao R B, Wang X, Fei Q, et al. Research on combination method for dependent evidences[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1993, (9): 227-234.)

[7] Wu Y G, Yang J Y, Liu K, et al. On the evidence inference theory[J]. Information Sciences, 1996, 89(3/4): 245-260.

[8] 罗志增, 叶明. 用证据理论实现相关信息的融合[J]. 电子与信息学报, 2001, 23(10): 970-974.
(Luo Z Z, Ye M. Fusion of dependency information using Dempster-Shafer evidential reasoning[J]. J of Electronics and Information Technology, 2001, 23(10): 970-974.)

[9] 杨善林, 朱卫东, 任明仑. 基于可变参数优化的相关证据合成方法研究[J]. 管理科学学报, 2003, 6(5): 12-16.
(Yang S L, Zhu W D, Ren M L. Combination theory and method for interrelated evidences based optimal adjustment coefficient[J]. J of Management Sciences in China, 2003, 6(5): 12-16.)

[10] 陈莉. 基于粒子群神经网络优化的相关证据合成及应用[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(3): 711-715.
(Chen L. Related evidence synthesis based on particle swarm optimization neural network parameter and application[J]. J of System Simulation, 2009, 21(3): 711-715.)

[11] Cattaneo M. Combining belief functions issued from dependent sources[C]. Proc of the 3rd Int Symposium on Imprecise Probabilities and Their Application. Lugano, 2003: 133-147.

[12] Destercke S, Dubois D, Chojnacki E. Cautious conjunctive merging of belief functions[C]. Proc of European Conf on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty. Hammamet, 2007: 1031-1102.

[13] Denoux T. Conjunctive and disjunctive combination of belief functions induced by non distinct bodies of evidence[J]. Artificial Intelligence, 2008, 172(2/3): 234-264.

[14] Smets P. The application of the matrix calculus to belief functions[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2002, 31(1/2): 1-30.

[15] 段新生. 证据理论与决策、人工智能[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1993.
(Duan X S. Evidence theory, decision and artificial intelligence[M]. Beijing: China Renmin University Press, 1993.)

[16] Shenoy P P. No double counting semantics for conditional independence[C]. Proc of the 4th Int Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications. Pittsburgh, 2005: 306-314.

[17] Smets P, Kennes R. The concept of distinct evidence[C]. Proc of the 4th Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems(IPMU). Palma de Mayorca, 1992: 789-794.