文章编号: 1001-0920 (2011) 06-0847-04

直觉模糊 C- 均值聚类算法研究

贺正洪, 雷英杰

(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要: 鉴于直觉模糊集理论作为模糊理论的推广已得到广泛的应用, 研究了将模糊 C- 均值聚类推广为直觉模糊 C- 均值聚类 (IFCM) 的途径和方法, 分析了现有的几种 IFCM 算法, 并提出了一种基于直觉模糊集的模糊 C- 均值聚类算法. 该算法首先定义了直觉模糊集之间的距离; 然后构造了聚类的目标函数; 最后给出了聚类算法步骤. 将算法用于目标识别, 实验结果表明了算法的有效性.

关键词: 模糊 C- 均值聚类；模糊关系；直觉模糊集合；直觉模糊 C- 均值聚类

中图分类号: TP182；C394 **文献标识码:** A

Research on intuitionistic fuzzy C-means clustering algorithm

HE Zheng-hong, *LEI Ying-jie*

(Missile Institute，Air Force Engineering University，Sanyuan 713800，China. Correspondent：HE Zheng-hong, E-mail：lianxiangh66@163.com)

Abstract: The intuitionistic fuzzy set(IFS) theory, which is generalized fuzzy set theory, is used in a wide rang of applications. Therefor the approaches of making the fuzzy C-means(FCM) clustering algorithm expand into an intuitionistic fuzzy C-means(IFCM) clustering algorithm are investigated, and several existing IFCM algorithms are analyzed. A fuzzy C-means clustering algorithm based on IFSs is proposed, which firstly defines the distance of IFSs, then constructs the objective function of clustering, finally gives the clustering procedure. The proposed algorithm is applied to target recognition, and the experiment results show the feasibility of the algorithm.

Key words: fuzzy C-means clustering；fuzzy relations；intuitionistic fuzzy sets；intuitionistic fuzzy C-means clustering

1 引 言

聚类分析是指根据事物间的不同特征、亲疏程度和相似性等关系对它们进行分类. 由于事物之间关系的界限是不分明的, 即为模糊关系, 利用模糊方法来进行聚类分析成为必然. 模糊聚类分析已成功地应用于大规模数据分析、数据挖掘、图像分析、模式识别、信息融合等领域, 出现了多种多样的模糊聚类算法. 在众多模糊聚类算法中, 模糊 C- 均值聚类 (FCM) 算法[1]应用得最广泛且较成功. 它是一种基于目标函数的聚类分析法, 通过优化目标函数得到每个待分类对象对所有聚类中心的隶属度, 从而决定分类对象的类属以达到自动进行分类的目的[2].

直觉模糊集 (IFSs)[3]作为模糊集的重要拓展, 通过增加新的属性参数——非隶属度, 能更加细腻地刻画客观世界的模糊本质, 因此有关 IFS 的研究目前已成为热点, 其中直觉模糊聚类分析是其重要研究领域. 将 FCM 推广到直觉模糊集, 即进行直觉模糊 C- 均值聚类 (IFCM) 分析, 多位学者对其进行了探讨[4-9], 其中文献 [5-6] 将分类对象和聚类中心推广为直觉模糊数, [7] 将分类对象与聚类中心的关系推广为直觉模糊关系, [8-9] 将分类对象和聚类中心及二者之间的关系均推广到直觉模糊集. 本文对现有的 IFCM 算法进行了分析和总结, 并指出其不足之处, 依此提出一种新的 IFCM 算法, 实例表明新算法具有更好的适应性.

2 模糊 C- 均值聚类

设被分类对象的集合为

$$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}, \tag{1}$$

其中每一个对象有 m 个特征指标, 设为

$$A_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}). \tag{2}$$

若进行模糊分类时将 A 分成 c 类, 则认为分类对

收稿日期: 2010-03-08；**修回日期:** 2010-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60773209)；陕西省自然科学基金项目(2010JM8013).

作者简介: 贺正洪(1966−), 男, 教授, 博士, 从事智能信息处理、信息融合等研究；雷英杰(1956−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能信息处理、智能决策等研究.

象集合 A 中的对象 A_j 以一定的隶属度属于某一类, 所有对象分别以不同的隶属度属于某一类. A 的每一种这样的分类对应一个模糊矩阵 $U=(\mu_{ij})_{c\times n}$, 其中 $1\leqslant c\leqslant n$, 且满足

$$\mu_{ij}\in[0,1];\ \sum_{i=1}^{c}\mu_{ij}=1,\ \forall j;\ \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\geqslant 1,\ \forall i.$$

要实现对分类对象的分类, 可根据 n 个对象的特征指标, 寻找在一定条件下的最佳模糊分类矩阵 U. 设 c 个聚类中心向量构成的矩阵为

$$V=(V_1,V_2,\cdots,V_c)^{\mathrm{T}},$$
$$V_i=\{v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{im}\},\ i=1,2,\cdots,c. \tag{3}$$

聚类准则为求出适当的模糊分类矩阵 U 和聚类中心 V, 使目标函数

$$J(U,V)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})^q||A_j-V_i||^2 \tag{4}$$

达到极小值. 其中: q 可取一定的值, 一般取 $q=2$; $\|A_j-V_i\|$ 为对象 A_j 与第 i 类聚类中心向量 V_i 之间的距离.

通常采用迭代运算求取式 (4) 给出的目标函数的近似解. 具体步骤如下:

Step 1: 选定分类数 c, 取一初始模糊分类矩阵 $U^{(0)}$, 逐步迭代, $l=0,1,\cdots$.

Step 2: 对于 $U^{(l)}$, 计算聚类中心

$$V^{(l)}=(V_1^{(l)},V_2^{(l)},\cdots,V_c^{(l)})^{\mathrm{T}},$$
$$V_i^{(l)}=\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}^{(l)})^qA_j\Big/\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}^{(l)})^q. \tag{5}$$

Step 3: 修正模糊分类矩阵 $U^{(l)}$, $\forall i, A_j\neq V_i$, 取

$$\mu_{ij}^{(l+1)}=\Big[\sum_{k=1}^{c}\Big(\frac{\|A_j-V_i^{(l)}\|}{\|A_j-V_k^{(l)}\|}\Big)^{\frac{2}{q-1}}\Big]^{-1}. \tag{6}$$

Step 4: 比较 $U^{(l)}$ 与 $U^{(l+1)}$, 若对于取定的精度 $\varepsilon>0$, 有 $\max\{|\mu_{ij}^{(l+1)}-\mu_{ij}^{(l)}|\}\leqslant\varepsilon$, 则 $U^{(l+1)}$ 和 $V^{(l)}$ 即为所求, 停止迭代; 否则, 令 $l=l+1$, 返回 Step 2.

3 直觉模糊 C-均值聚类

定义 1 设 X 是一个给定论域, 则 X 上的一个直觉模糊集 B 为[3]

$$B=\{\langle x,\mu_B(x),\gamma_B(x)\rangle|x\in X\}, \tag{7}$$

其中 $\mu_B(x):X\to[0,1]$ 和 $\gamma_B(x):X\to[0,1]$ 分别为 B 的隶属函数 $\mu_B(x)$ 和非隶属函数 $\gamma_B(x)$, 且对于 B 上的所有 $x\in X$, $0\leqslant\mu_B(x)+\gamma_B(x)\leqslant 1$ 均成立.

对于 X 中的每一个直觉模糊子集, 称 $\pi_B(x)=1-\mu_B(x)-\gamma_B(x)$ 为 B 中 x 的直觉指数, 它是 x 对于 B 的犹豫程度的一种测度. 显然, 对于每一个 $x\in X$, 有 $0\leqslant\pi_B(x)\leqslant 1$.

通过对 FCM 聚类算法的分析可知, 要将 FCM 推广到直觉模糊集, 可从不同的角度和阶段引入直觉模糊集, 一是将被分类对象的集合 A 推广到直觉模糊集合, 二是将分类对象 A_j 与聚类中心 V_i 之间的关系推广为直觉模糊关系. 当然在作这样的推广以后, 需要对目标函数作相应的修正以适应对直觉模糊信息的处理. 因为推广方式和修正方法的不同会产生多种 IFCM 聚类算法, 所以根据实际需要选择合适的 IFCM 聚类算法成为问题的关键. 本文将现有的 IFCM 算法归纳为 3 类, 并提出一种新的 IFCM 算法作为第 4 类.

3.1 直觉模糊数的模糊 C-均值聚类

文献 [5-6] 将 FCM 中处理的分类对象 A_i 推广为直觉模糊数, 即式 (2) 中特征指标只有一个且为直觉模糊数, 表示为

$$A_j=(\mu_{Aj},\gamma_{Aj}). \tag{8}$$

相应地, 每一个聚类中心 V_i 也用直觉模糊数表示为

$$V_i=(\mu_{Vi},\gamma_{Vi}). \tag{9}$$

对象 A_j 与聚类 V_i 之间的关系仍为模糊关系, 即分类矩阵仍为 $U=(\mu_{ij})_{c\times n}$, 所以称该方法为直觉模糊数的模糊 C-均值聚类. 此时由于 A_j 与 V_i 为直觉模糊数, 目标函数 (4) 中的 $\|A_j-V_i\|$ 项必须进行修正. 描述两直觉模糊集之间的差异或相似程度有距离[10]、相异度[11]和相似度[12]等度量方式, 且每一种度量方式有多种计算方法. 文献 [5] 首先计算两直觉模糊集之间的相似度, 然后将相似度转化为距离替代式 (4) 中的 $\|A_j-V_i\|$. 文献 [6] 用两直觉模糊集之间的距离来替代 $\|A_j-V_i\|$. 式 (5) 和 (6) 也需要作相应修正.

本文算法是 FCM 在直觉模糊集中最简单的推广. 毕竟分类对象的特征只用一个直觉模糊数描述的情况很特殊, 因此这种算法的应用范围非常有限.

3.2 普通集合的直觉模糊 C-均值聚类

文献 [7] 给出的算法中, 假定待分类对象为式 (1) 所描述的普通集合, 对应的聚类中心也可用式 (3) 描述. 分类对象 A_j 与聚类中心 V_i 之间的关系推广为直觉模糊关系, 用直觉模糊集合表示为 $B=\{\langle(A_j,V_i),\mu_{ij},\gamma_{ij}\rangle|A_j\in A,V_i\in V\}$, 一种分类则用一个直觉模糊矩阵 $R=(\mu_{ij},\gamma_{ij})_{c\times n}$ 表示.

在上述假设下, 实现聚类的关键是构造合适的目标函数, 既能反映分类对象 A_j 与聚类中心 V_i 之间差异, 又能体现隶属度、非隶属度以及直觉指数的作用. 为此, 文献 [7] 首先引入直觉模糊熵的概念, 根据信息论原理, 直觉模糊熵最大能够公正地选取隶属度和非隶属度的值; 然后构造一种直觉模糊分类的直觉模糊熵, 取其条件极值作为新的目标函数, 条件为

$$\sum_{i=1}^{c}\mu_{ij}=1,\ \forall j,\tag{10}$$

$$\mu_{ij}+\gamma_{ij}+\pi_{ij}=1;\tag{11}$$

最后进行迭代运算, 因为有非隶属度和直觉指数等新变量参与计算, 所以迭代运算式与式 (5) 和 (6) 不同, 在运算过程中假定直觉指数 π_{ij} 已知.

该算法引入直觉模糊熵改造目标函数, 具有一定的合理性. 算法虽然将分类对象与聚类中心之间的关系推广为直觉模糊关系, 但在具体计算时又违背了直觉模糊思想, 主要体现在:

1) 直接利用式 (10) 的条件, 与直觉模糊理论认为 π_{ij} 代表的犹豫部分有些是偏向支持 μ_{ij} 的观点矛盾.

2) 假定直觉指数 π_{ij} 已知, 显然不够合理, 且失去了推广为直觉模糊关系的意义.

3.3　直觉模糊集合的直觉模糊 C- 均值聚类

文献 [8-9] 将分类对象推广为直觉模糊集, 并将分类对象和聚类中心之间的关系也推广为直觉模糊关系. 为此, 式 (2) 中每一个特征指标均用直觉模糊数表示为

$$A_j=(\langle\mu_{Aj}(x_1),\gamma_{Aj}(x_1)\rangle,\langle\mu_{Aj}(x_2),\gamma_{Aj}(x_2)\rangle,\\ \cdots\langle\mu_{Aj}(x_m),\gamma_{Aj}(x_m)\rangle).\tag{12}$$

相应地, 每一个聚类中心 V_i 表示为

$$V_i=(\langle\mu_{Vi}(x_1),\gamma_{Vi}(x_1)\rangle,\langle\mu_{Vi}(x_2),\gamma_{Vi}(x_2)\rangle,\\ \cdots\langle\mu_{Vi}(x_m),\gamma_{Vi}(x_m)\rangle).\tag{13}$$

分类对象 A_j 与聚类中心 V_i 之间的关系描述与第 3. 2 节相同, 其矩阵形式为 $R=(\mu_{ij},\gamma_{ij})_{c\times n}$.

目标函数为

$$J(R,V)=\\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}((\mu_{ij})^q/2+(1-\gamma_{ij})^q/2)D_w(A_j,V_i)^2,\tag{14}$$

其中 $D_w(A_j,V_i)$ 为 A_j 与 V_i 的加权直觉模糊距离, 且该式同时满足式 (10) 和 (11) 两条件. 算法在后续迭代运算中, 也假定直觉指数 π_{ij} 已知, 即计算出 μ_{ij} 后, 可直接得出 γ_{ij}.

该算法将分类对象推广为直觉模糊集是合理的, 与第 3.1 节的方法相比适应范围广. 但在处理分类对象和聚类中心之间的关系时, 也存在与第 3.2 节方法同样的不足.

3.4　直觉模糊集合的模糊 C- 均值聚类

对大量的分类问题进行分析可知, 分类对象需要用多个特征指标来描述, 这些特征指标往往具有模糊性. 因为直觉模糊集描述模糊性更加细腻, 所以将分类对象拓展为直觉模糊集合成为必然. 至于分类对象与聚类中心之间的关系, 是用模糊关系还是拓展为直觉模糊关系, 取决于哪种关系更有利于实现准确的分类. 通过前述分析可知, 将分类对象与聚类中心之间的关系拓展为直觉模糊关系, 并未带来明显的益处, 处理不当还会带来一些问题. 鉴于此, 本文提出一种新的 IFCM 算法——直觉模糊集合的模糊 C- 均值聚类. 算法描述如下:

待分类对象 A_j 用式 (12) 表示, 每一个聚类中心 V_i 用式 (13) 表示. 分类对象 A_j 与聚类中心 V_i 之间的关系为模糊关系, 模糊分类矩阵为 $U=(\mu_{ij})_{c\times n}$. 聚类的目标函数为

$$J(U,V)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})^qD(A_j,V_i)^2,\tag{15}$$

其中 $D(A_j,V_i)$ 为 A_j 与 V_i 之间的直觉模糊距离. 常用的距离表示有多种, 根据聚类分析的需要, 选用式 (16) 计算距离, 有

$$D(A_j,V_i)=\\ \Big(\sum_{k=1}^{m}w_k[\alpha(\mu_{Aj}(x_k)-\mu_{Vi}(x_k))^2+\beta(\gamma_{Aj}(x_k)-\\ \gamma_{Vi}(x_k))^2+\lambda(\pi_{Aj}(x_k)-\pi_{Vi}(x_k))^2]\Big)^{1/2}.\tag{16}$$

其中: $w_k\in[0,1](k=1,2,\cdots,m)$ 为不同特征所占的权重, 一般取 $w_k=1/2m$; $\alpha,\beta,\lambda\in[0,1]$ 分别为隶属度、非隶属度和直觉指数差异所占的权重, 一般取 $\alpha=\beta=\lambda=1$.

算法的具体步骤如下:

Step 1: 同 FCM.

Step 2: 形式同 FCM, 但式 (5) 中的 A_j 和 $V_i^{(l)}$ 分别用式 (12) 和 (13) 表示.

Step 3: 修正模糊分类矩阵 $U^{(l)}$:

1) 对于 $\forall i,i=1,2,\cdots,c$, 均有 $D(A_j,V_i)>0$, 则

$$\mu_{ij}^{(l+1)}=\Big[\sum_{k=1}^{c}\Big(\frac{D(A_j,V_i^{(l)})}{D(A_j,V_k^{(l)})}\Big)^{\frac{2}{q-1}}\Big]^{-1}.\tag{17}$$

2) 若 $\exists k(k=1,2,\cdots,c)$ 使得 $D(A_j,V_i)=0$, 则有

$$\mu_{ij}^{(l+1)}=\begin{cases}1,\ i=k;\\ 0,\ i\neq k.\end{cases}$$

Step 4: 同 FCM.

下面对该算法的复杂度进行简要分析. 对于时间复杂度, 通过分析可知, 在一次迭代运算过程中, 计算最复杂且运算次数最多的过程在 Step 3. 取 $q=2$, 基本运算为 $(D(A_j,V_i^{(l)})/D(A_j,V_k^{(l)}))^2$, 基本运算的频度为 $n\times c\times c$. 因 $c\leqslant n$ 为简化分析, 取 $c=n$, 则该算法一次迭代的时间复杂度为 $T(n)=O(n^3)$.

算法的最终运行时间取决于迭代次数 l, 而迭代次数取决于初始分类矩阵 $U^{(0)}$ 和精度 ε的选取等多

种因素. 在有实时性要求的场合, 可设置迭代次数 l 的上限, 以控制运行时间.

对于空间复杂度, 运算过程中保存的数据主要有: n 个待分类对象的集合 A, c 个聚类中心的集合 V, 迭代过程中前后两次的分类矩阵 $(\mu_{ij})_{c\times n}$. 由此可得算法的空间复杂度为 $S(n)=O(n^2)$.

4 仿真与结果分析

为了验证本文提出的IFCM算法的有效性, 首先与现有的IFCM算法和FCM算法进行实验对比. 为了便于比较, 对相关文献已给出完整实例数据的算法, 直接利用其数据进行仿真实验.

利用第3.1节的算法, 文献[6]给出了用一组人造直觉模糊数进行分类的实验. 利用本文提出的IFCM算法对该组数据进行实验同样能获得正确结果, 且本文算法不仅能对直觉模糊数进行分类, 还可以对直觉模糊集进行有效分类.

利用第3.3节的算法, 文献[9]给出了一个对5种不同汽车进行分类的实验, 文献[8]给出了对20批空中目标进行分类的实验. 利用本文提出的IFCM算法对两组数据分别进行实验均获得了正确结果, 且本文算法计算更简单, 特别是在待分类样本数较大和实时性要求较高的场合具有明显的优势.

使用第3.2节算法的文献[7]没有给出完整的原始数据. 利用其他数据进行仿真验证可知, 第3.2节的算法计算速度比本文提出的算法慢, 原因是前者在迭代过程中使用了指数运算.

若式(2)表示的目标特征为模糊化后的隶属度, 则将其转换为直觉模糊数据时取 $\pi_{ij}=0$. 使用同一组数据分别用FCM算法与本文提出的IFCM算法进行分类实验, 得到的分类结果一致, 且计算速度差别不明显. 可见, 用普通模糊集合能描述的问题可使用FCM算法或IFCM算法求解, 但含有直觉模糊数据的问题只能使用IFCM算法求解. 然后, 将本文提出的直觉模糊集合的模糊 C-均值聚类算法应用于目标识别. 某空中监视系统共发现8批目标, 即 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_8\}$, 每批目标用4个直觉模糊特征表示, 所有目标特征数据见表1.

表 1 目标特征数据

目标	x_1	x_2	x_3	x_4
A_1	$\langle 0.56, 0.34\rangle$	$\langle 0.40, 0.50\rangle$	$\langle 0.30, 0.40\rangle$	$\langle 0.71, 0.10\rangle$
A_2	$\langle 0.41, 0.40\rangle$	$\langle 0.08, 0.80\rangle$	$\langle 0.05, 0.75\rangle$	$\langle 0.20, 0.50\rangle$
A_3	$\langle 0.38, 0.52\rangle$	$\langle 0.90, 0.10\rangle$	$\langle 0.80, 0.10\rangle$	$\langle 0.01, 0.80\rangle$
A_4	$\langle 0.31, 0.60\rangle$	$\langle 0.40, 0.50\rangle$	$\langle 0.30, 0.50\rangle$	$\langle 0.63, 0.15\rangle$
A_5	$\langle 0.31, 0.61\rangle$	$\langle 0.74, 0.22\rangle$	$\langle 0.70, 0.25\rangle$	$\langle 0.00, 0.90\rangle$
A_6	$\langle 0.44, 0.45\rangle$	$\langle 0.11, 0.80\rangle$	$\langle 0.06, 0.80\rangle$	$\langle 0.31, 0.52\rangle$
A_7	$\langle 0.58, 0.30\rangle$	$\langle 0.37, 0.52\rangle$	$\langle 0.30, 0.50\rangle$	$\langle 0.45, 0.35\rangle$
A_8	$\langle 0.43, 0.45\rangle$	$\langle 0.14, 0.72\rangle$	$\langle 0.07, 0.70\rangle$	$\langle 0.25, 0.55\rangle$

通过初步分析, 将目标分为3类, 即 $c=3$, 取初始模糊分类矩阵为

$$U^{(0)}=\begin{bmatrix}0.7&0.1&0.2&0.7&0.2&0.1&0.7&0.2\\0.2&0.7&0.1&0.2&0.1&0.7&0.1&0.7\\0.1&0.2&0.7&0.1&0.7&0.2&0.2&0.1\end{bmatrix}.$$

取 $q=2$, 利用式(5)可计算出 $V^{(0)}$. 利用式(16)和(17)将 $U^{(0)}$ 更新为 $U^{(1)}$, 在计算 $D(A_j,V_i)$ 时, 取 $w_k=1/2m$, $\alpha=\beta=\lambda=1$. 令 $\varepsilon=0.01$, 进行多次迭代运算发现, $\max\{|\mu_{ij}^{(4)}-\mu_{ij}^{(3)}|\}\leqslant\varepsilon$. 此时, 迭代停止, 得到最佳模糊分类矩阵为

$$U^{(4)}=\begin{bmatrix}0.93&0.02&0.02&0.86&0.02&0.02&0.77&0.02\\0.05&0.97&0.01&0.10&0.02&0.97&0.18&0.97\\0.02&0.01&0.97&0.04&0.96&0.01&0.05&0.01\end{bmatrix}. \tag{18}$$

利用式(18)进行分类, 将分类对象归于隶属度最大的那一类, 可得分类结果为: 第1类 $\{A_1,A_4,A_7\}$, 第2类 $\{A_2,A_6,A_8\}$, 第3类 $\{A_3,A_5\}$. 所得分类结果与实际情况一致.

上述计算过程中, 也可用初始化聚类中心 $V^{(0)}$ 作为起始. 特别是当目标数多、分类数有限且聚类中心比较典型时, 计算将更加方便.

通过上述仿真实验可知, 本文提出的IFCM算法是对FCM算法的有效拓展, 其计算简单, 适用范围广.

5 结 论

聚类分析是直觉模糊理论研究的重要内容. 本文在分析模糊 C-均值聚类方法的基础上, 探讨了将FCM推广到直觉模糊集的各种途径和方法, 对现有的IFCM算法进行了归纳和总结, 分析了这些算法的不足. 提出了一种新的IFCM算法, 该算法将分类对象扩展为直觉模糊集, 对直觉模糊集进行模糊 C-均值聚类. 新算法克服了已有算法的不足, 有更广泛的适应性. 通过目标识别的实例表明了算法的正确性和有效性. 该算法还可在模式识别、决策分析等诸多领域得到应用.

参考文献(References)

[1] Bezdek J C. Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms[M]. New York: Plenum Press, 1981.

[2] 齐淼, 张化祥. 改进的模糊 C-均值聚类算法研究[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(20): 133-135.
(Qi M, Zhang H X. Research on modified fuzzy C-means clustering algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(20): 133-135.)

[3] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

(下转第856页)