第 26 卷 第 6 期
Vol. 26 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 6 月
Jun. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 06-0837-04

非线性系统有限时间稳定的一个新的充分条件

陈国培[1,2], 杨 莹[2], 李俊民[1]

(1. 西安电子科技大学 应用数学系，西安 710071；2. 惠州学院 数学系，广东 惠州 516007)

摘 要: 研究了一类非线性系统的有限时间稳定性. 通过函数构造和变量替换的方法, 给出一个新的非线性系统有限时间稳定的充分条件. 该条件与现有结果相比, 具有更少的保守性. 进一步, 将所得的结果推广到不确定性非线性系统, 通过构造 Lyapunov 函数方法, 给出系统有限时间稳定的充分条件. 仿真例子表明了所得结论的有效性.

关键词: 有限时间稳定性；不确定性；非线性系统

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

New sufficient condition of finite time stability for nonlinear systems

CHEN Guo-pei[1,2], *YANG Ying*[2], *LI Jun-min*[1]

(1. Department of Applied Mathematics，Xidian University，Xi'an 710071，China；2. Department of Mathematics, Huizhou University，Huizhou 516007，China．Correspondent：CHEN Guo-pei，E-mail：cgpken1977@163.com)

Abstract: This paper considers the finite time stability of nonlinear systems. By using the method of function construction and variable substitution, a new sufficient condition of finite time stability is derived for nonlinear system. This condition is less conservative than the existing results. Furthermore, it is applied to analyze the finite time stability of a class of uncertain nonlinear systems. A sufficient condition for finite time stability is given by the method of constructing Lyapunov function. A numerical example shows the effectiveness of the theoretical results.

Key words: finite time stability；uncertainty；nonlinear systems

1 引 言

在系统的收敛性分析中, 渐近稳定性是一个重要的概念, 它表示系统是 Lyapunov 稳定的, 且系统的运动轨迹在时间趋向无穷大时收敛到系统的平衡点. 然而, 在许多实际应用中, 往往需要系统的运动轨迹在有限时间内就能收敛到系统的平衡点. 因此, 提出了一个更强的概念——有限时间稳定性, 它是指系统的运动轨迹在有限时间内收敛到系统的平衡点. 近年来, 研究学者已对几类重要系统的有限时间稳定性及其稳定化进行了研究. 文献 [1] 给出了非线性系统有限时间稳定的充要条件以及系统在原点连续的 settling-time 函数. [2] 利用上下 Lyapunov 函数对, 研究了非线性时变系统的有限时间稳定性. [3-4] 利用 backstepping 技术, 研究了非线性 (不确定) 系统的有限时间稳定化问题. [5] 针对具有结构不确定性的动态系统, 利用终端滑模控制方法解决了系统的有限时间镇定问题. [6-8] 通过构造 Lyapunov 函数的方法给出了几类重要系统的有限时间稳定性条件, 并构造出相应的有限时间控制器. [9] 利用几何特性给出了系统有限时间稳定的充要条件: 系统是渐近稳定的且具有负的齐次度. [10] 研究了连续线性系统的输出稳定化问题, 利用 LMI 的最优解构造出输出反馈控制器使闭环系统达到有限时间稳定. [11-12] 利用加幂积分器技巧结合非光滑观测器的方法, 明确构造出动态反馈控制器使闭环系统达到全局有限时间稳定. [13] 针对具有参数和动态不确定性的非线性系统, 结合 Lyapunov 函数, backstepping 以及 input-to-state 稳定等技术构造了偏状态控制器, 使闭环系统达到有限时间稳定. [14] 针对一类线性时不变脉冲系统, 通过对固定和可变时刻加入脉冲控制使系统达到有限时间稳定. [15] 利用齐次系统方法, 研究了不确定切换系统的有限时间稳定性及其鲁棒稳定化等问题. [16] 针对非线性脉冲动态系统, 利用公共 Lyapunov 函数和向量 Lyapunov 函数给出了系统有限时间稳定的充分条件以及控制器的构造方法. 针对不同系统, 尽管运用了不同的方法来分析系统的有限时间稳定性和 (或)

收稿日期: 2010-03-15；**修回日期:** 2010-07-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974139)；校级博士科研启动基金项目(C509.0213).

作者简介: 陈国培(1977−), 男, 博士, 从事混合动态系统的研究；李俊民(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性动态系统等研究.

稳定化等问题, 但结果仍以 [1-2] 的结论为基础, 且对系统均有要求, 即: 系统的 Lyapunov 函数在整个时间区间上必须是单调减少的. 该要求限制了已有结果在实际中的应用, 因为对于许多实际系统 (如周期变化的系统), 该要求是难以满足的.

本文通过函数构造和变量替换的方法, 给出一个新的非线性系统有限时间稳定的充分条件, 该条件允许系统的 Lyapunov 函数在时间区间 I 上出现单调增加的情况; 然后, 利用此条件进一步研究了不确定性非线性系统的有限时间稳定性问题; 最后, 通过仿真例子说明了定理的有效性.

2 系统描述

本文考虑如下的非线性系统:

$$\dot{x}(t)=f(x,t),\ x(t)\in U,\ t\in I. \tag{1}$$

其中: U 为 R^n 中原点的邻域; $f:U\times I\to R^n$ 连续且满足 $f(0,t)=0, t\in I$. 将系统 (1) 由初始状态 (t_0,x_0) 出发的运动轨迹记为 $x(t,t_0,x_0)$, 或简记为 $x(t)$.

定义 1[1] 非线性系统 (1) 是有限时间稳定的, 若:

1) 系统 (1) 是 Lyapunov 稳定的, 即 $\forall t_0\in I$ 以及 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ 使得对于任意的 $x_0\in B_\delta(0)$, 有 $x(t)\in B_\varepsilon(0), t\geqslant t_0$.

2) $\forall t_0\in I$, 存在一个原点的开邻域 $N(t_0)\subseteq U$ 使得当 $x_0\in N(t_0)$ 时, 有

a) $x(t), t\in I$ 有定义;

b) 存在 $0\leqslant T(t_0,x_0)<+\infty$ 使得 $x(t)=0, t\geqslant t_0+T(t_0,x_0)$. 其中 $T_0(t_0,x_0)=\inf\{T(t_0,x_0):x(t,t_0)=0,\ t\geqslant t_0+T(t_0,x_0)\}$ 称为系统 (1) 的 Settling time 函数.

另外, 若系统 (1) 是有限时间稳定的, 且 $N(t_0)=U=R^n$, 则它是全局有限时间稳定的.

3 非线性系统的有限时间稳定性

为了便于分析, 假设系统 (1) 在前向时间上存在唯一解.

定理 1 考虑系统 (1) 的非时变情况, 即 $f(x(t),t)=f(x(t))$. 若存在一个连续函数 $V:U\to R$ 使得如下的条件成立:

1) V 正定;

2) 存在实数 $c>0$, $a\in(0,1)$ 以及一个原点的开邻域 $D\subseteq U$ 使得

$$\dot{V}(x(t))+c(V(x(t)))^a\leqslant 0,\ x\in D\backslash\{0\}.$$

则系统 (1) 是有限时间稳定的, 且 Settling time 函数为

$$T_0(t_0,x_0)\leqslant\frac{1}{c(1-a)}V(x(t_0))^{1-a},\ x(t_0)\in D.$$

定理 2 对于系统 (1), 若存在一个连续函数 $V:U\to R$ 和一个正定函数 $r:R\to R^+$ 使得下面的条件成立:

1) V 正定;

2) $\dot{V}(x,t)\leqslant -r(V(x,t)),\ \forall(x,t)\in U\times I$;

3) 存在实数 $\varepsilon>0$ 使得 $\int_0^\varepsilon\frac{\mathrm{d}z}{r(z)}<+\infty$.

则系统 (1) 是有限时间稳定的, 且 Settling time 函数为

$$T_0(t_0,x_0)\leqslant(t^*-t_0)+\int_0^{V(x(t^*),t^*)}\frac{\mathrm{d}z}{r(z)},$$

其中时刻点 t^* 使得 $V(x(t^*),t^*)\in[0,\varepsilon]$.

现在, 通过放松对系统 Lyapunov 函数的限制, 给出非线性系统 (1) 有限时间稳定的一个新的充分条件.

定理 3 对于系统 (1), 若存在连续可微函数 $V:U\times I\to R^+$, 正定函数 $g(t)$, 连续函数 $h(x(t),t)$ 以及函数 $\varphi\in C[R^+,R^+]$ 满足 $\varphi(0)=0$ 及如下条件:

1) V 正定;

2) $V(x(t),t)\leqslant\varphi(V(x(t_0),t_0)), t\geqslant t_0$;

3) $\dot{V}(x(t),t)\leqslant g(V)h(x(t),t)$;

4) 存在 $\bar{\varepsilon}>0, t_0\leqslant\bar{t}<+\infty$, 使得对于 $\forall t_0\in I$ 有

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}+\int_{t_0}^{\bar{t}}\max_{x\in B}h(x(s),s)\mathrm{d}s<0, \tag{2}$$

其中

$$B=\{x|V(x(t),t)\leqslant\phi(V(x(t_0),t_0))\text{且}x\neq 0\}.$$

则系统 (1) 有限时间稳定, 且

$$T(x_0,t_0)\leqslant t^*,\ t^*=\min\{\bar{t}|\text{ 满足式 (2)}\}.$$

证明 由条件 1) 可知, 存在一个 K 类函数 $\alpha(s)$ ($\alpha(s), s\geqslant 0$, 严格递增且 $\alpha(0)=0$) 使得

$$\alpha(\|x(t)\|)\leqslant V(x(t),t),\ t\in[t_0,\bar{t}]. \tag{3}$$

进一步, 根据条件 2) 和函数 V, φ 的定义可知, 对于 $\forall t_0\in I$, 存在一个数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ 使得当 $\|x(t_0)\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0)$ 时有

$$V(x(t),t)\leqslant\varphi(V(x(t_0),t_0))\leqslant\alpha(\varepsilon).$$

结合式 (3), 有

$$\alpha(\|x(t)\|)\leqslant\alpha(\varepsilon),\ t\in[t_0,\bar{t}],$$

即 $\|x(t)\|\leqslant\varepsilon, t\in[t_0,\bar{t}]$.

值得注意的是, 若 $x(t)=0, t\in(\bar{t},+\infty)$, 则 $\|x(t)\|\leqslant\varepsilon, t\geqslant t_0$, 即系统 (1) 是 Lyapunov 稳定的.

下面, 证明存在一点 $t^*\in[t_0,\bar{t}]$ 使得 $x(t^*)=0$ (这将导致 $x(t)=0, t\in(\bar{t},+\infty)$).

反证法. 假设对于 $\forall t\in[t_0,\bar{t}]$, 有 $x(t)\neq 0$, 则由条件 3) 有

$$\frac{\dot{V}(x(t),t)}{g(V)}\leqslant h(x(t),t),\ t\in[t_0,\bar{t}]. \tag{4}$$

另外, 由前述稳定性分析可知, 存在一个原点的邻域 $N(t_0)$, 使得对于 $\forall x(t_0)\in N(t_0)$, 有

$$V(x(t),t)\leqslant\varphi(V(x(t_0),t_0))\leqslant\bar{\varepsilon},\ t\in[t_0,\bar{t}].$$

令 $x(t_0)\in N(t_0)$, 对式 (4) 两边由 t_0 到 $\bar{t}$ 进行积分有

$$\int_{t_0}^{\bar{t}}\frac{\dot{V}(x(s),s)}{g(V(x(s),s))}\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_0}^{\bar{t}}h(x(s),s)\mathrm{d}s.$$

通过变量代换 $z=V(x(s),s)$ 有

$$\int_{V(x(t_0),t_0)}^{V(x(\bar{t}),\bar{t})}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}=\int_{t_0}^{\bar{t}}\frac{\dot{V}(x(s),s)}{g(V(x(s),s))}\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_0}^{\bar{t}}h(x(s),s)\mathrm{d}s,$$

或

$$\int_{V(x(\bar{t}),\bar{t})}^{V(x(t_0),t_0)}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}+\int_{t_0}^{\bar{t}}h(x(s),s)\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

注意到 $V(x(t_0),t_0)\leqslant\bar{\varepsilon}, V(x(\bar{t}),\bar{t})\leqslant\bar{\varepsilon}$ 及函数 g 的正定性, 有

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}+\int_{t_0}^{\bar{t}}\max_{x\in B}h(x(s),s)\mathrm{d}s\geqslant\int_{V(x(\bar{t}),\bar{t})}^{V(x(t_0),t_0)}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}+\int_{t_0}^{\bar{t}}h(x(s),s)\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

这与条件 4) 相矛盾, 因此必存在一点 $t^*\in[t_0,\bar{t}]$ 使得 $x(t^*)=0$, 这导致 $x(t)=0, t\in(\bar{t},+\infty)$. 综上所述, 系统 (1) 是 Lyapunov 稳定的且有限时间内收敛, 即系统 (1) 是有限时间稳定的. □

注 1　定理 1 和定理 2 均要求系统的 Lyapunov 函数在整个 I 上是单调减少的, 但定理 3 仅需要系统的 Lyapunov 函数满足条件 3) 和 4), 它允许系统的 Lyapunov 函数在 I 上出现单调增加的情况, 因此定理 3 比定理 1 和定理 2 具有更少的保守性.

4　不确定性非线性系统的有限时间稳定性

利用定理 3 的结果, 进一步研究不确定性非线性系统的有限时间稳定性. 考虑如下的不确定性非线性系统:

$$\dot{x}(t)=f(x,t)+\Delta f(x,t),\ x(t)\in U,\ t\in I. \tag{5}$$

其中: U 为 R^n 中原点的邻域; $f:U\times I\to R^n, \Delta f:U\times I\to R^n$ 连续且满足 $f(0,t)=0,\ \Delta f(0,t)=0, t\in I$. 将系统 (4) 由初始状态 (t_0,x_0) 出发的运动轨迹记为 $x(t,t_0,x_0)$, 或简记为 $x(t)$.

定理 4　对于系统 (5), 若存在常数 $b_i>1/2(i=1,2,\cdots,n)$, $\bar{t}(t_0\leqslant\bar{t}<+\infty)$ 以及连续函数 $\rho(t)$, $h(x,t)$ 满足如下条件:

1) $Q^{\mathrm{T}}(x)\Delta f(x,t)\leqslant h(x,t), t\in I$. 其中: $Q(x)=\partial W(x)/\partial x$, $W(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i(t))^{2b_i}$, $x_i(t)$ 表示 $x(t)$ 的第 i 个分量.

2) $Q^{\mathrm{T}}(x)f(x,t)+h(x,t)\leqslant\rho(t)[W(x)]^a,\ 0<a<1,\ t\geqslant t_0$.

3) $\int_{t_0}^{\bar{t}}\rho(s)\mathrm{d}s<0$ 且 $\int_{t_0}^{t}\rho(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,\ \forall t\geqslant t_0$.

则系统 (5) 有限时间稳定.

证明　对于系统 (5), 构造 Lyapunov 函数 $V(x,t)=W(x(t))$. 下面验证定理 3 的所有条件成立:

1) $V(x,t)$ 正定, 定理 3 的条件 1) 显然成立.

2) 由条件 1) 和条件 2), 有

$$\dot{V}(x,t)=Q^{\mathrm{T}}(x)(f(x,t)+\Delta f(x,t))\leqslant Q^{\mathrm{T}}(x)f(x,t)+h(x,t)\leqslant\rho(t)[W(x)]^a,$$

或

$$\frac{\dot{V}(x,t)}{[W(x(t))]^a}\leqslant\rho(t),\ \|x(t)\|\neq 0. \tag{6}$$

注意到 $V(x,t)=W(x(t))$ 且 $0<a<1$, 对式 (6) 两边从 t_0 到 t 进行积分可得

$$V(x,t)\leqslant\Big(V^{1-a}(x_0,t_0)+(1-a)\int_{t_0}^{t}\rho(s)\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{1-a}},\quad\forall t\geqslant t_0.$$

再由条件 3) 有

$$V(x,t)\leqslant V(x_0,t_0),\ \forall t\geqslant t_0.$$

取 $\phi(s)=s$, 可知定理 3 的条件 2) 成立.

3) 取 $g(V)=V^a$, $h(x(t),t)=\rho(t)$, 可知定理 3 的条件 3) 成立.

4) 记 $G(t)=\int_0^t\frac{1}{g(z)}\mathrm{d}z$, 则 $G(t), t\geqslant 0$ 连续且 $G(0)=0$, 同时注意到 $\int_{t_0}^{\bar{t}}\rho(s)\mathrm{d}s<0$, 故必存在 $\bar{\varepsilon}>0$, 使得对于 $\forall t_0\in I$ 有

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}+\int_{t_0}^{\bar{t}}\max_{x\in B}h(x(s),s)\mathrm{d}s=\int_0^{\bar{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}z}{g(z)}+\int_{t_0}^{\bar{t}}\rho(s)\mathrm{d}s<0.$$

即定理 3 的条件 4) 也成立.

综上所述, 定理 3 的条件全部成立. 由定理 3 可知, 系统 (5) 有限时间稳定. □

5　数值例子

考虑如下的不确定性非线性系统:

$$\dot{x}(t)=f(x,t)+\Delta f(x,t),\ x(t)\in R^2,\ t\geqslant 0. \tag{7}$$

其中

$$x(t_0)=[2\ \ 3],$$

$$f(x,t)=\begin{bmatrix}(-5.5t+4.74t^2-t^3)|x_1(t)|^{\frac{1}{3}}\\(-8.3t+8.5t^2-2.1t^3)|x_2(t)|^{\frac{2}{5}}\end{bmatrix},$$

$$\Delta f(x,t)=\begin{bmatrix}0.5\sin(0.8t)|x_1(t)|^{\frac{1}{3}}\\0.3\sin t|x_2(t)|^{\frac{2}{5}}\end{bmatrix}.$$

取系统 (7) 的 Lyapunov 函数为 $V(x,t)=x_1^{4/3}+x_2^{6/5}$, 则存在常数 $a=1/2, b_1=2/3, b_2=3/5, \bar{t}=6$ 以及连续函数

$$\rho(t)=\max_{t\geqslant 0}\Big\{\frac{4}{3}(-5t+4.74t^2-t^3),\frac{6}{5}(-8t+8.5t^2-2.1t^3)\Big\},$$

$$h(x,t)=\frac{2}{3}|x_1|^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{25}|x_2|^{\frac{3}{5}}$$

满足定理4的3个条件. 由Matlab仿真可得, 系统状态 $x(t)$ 的运动轨迹如图1所示, 系统Lyapunov函数 $V(x,t)$ 随时间的变化过程如图2所示.

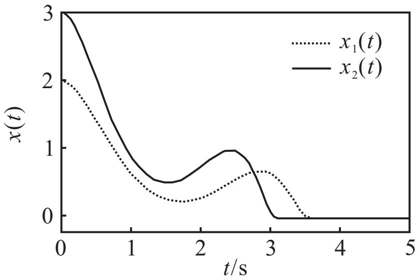

图 1 系统状态 $x(t)$ 的运动轨迹

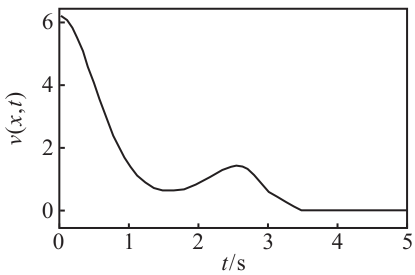

图 2 系统 Lyapunov 函数 $V(x,t)$ 随时间的变化过程

从图1可以看出, 系统(7)是有限时间稳定的, 从图2可以看出, 系统的Lyapunov函数不是单调减少的, 而是在某些时间区间(如[2,2.5])上单调增加的. 对于该情况, 原有理论(定理1和定理2)并不适用.

6 结 论

本文研究了一类非线性系统的有限时间稳定性. 首先, 利用函数构造和变量替换的方法, 给出一个新的非线性系统有限时间稳定的充分条件, 该条件允许系统的Lyapunov函数在时间区间 I 上出现单调增加的情况, 与已有的结果相比, 此条件具有更少的保守性; 然后, 将所得结果推广到不确定性非线性系统, 给出其有限时间稳定的充分条件.

未来的研究内容包括: 1) 进一步放松混合动态系统的有限时间稳定性条件; 2) 应用现有的有限时间稳定性结果, 研究时滞非线性系统的有限时间稳定性问题、非线性系统的有限时间稳定化及其跟踪等问题.

参考文献(References)

[1] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.

[2] Moulay E, Perruquetti W. Finite time stability of nonlinear systems[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Hawii, 2003: 3641-3646.

[3] Hong Y G, Wang J K. Nonsmooth finite-time stabilization of a class of nonlinear systems[J]. Science in China, 2005, 35(5): 663-672.

[4] Huang X Q, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 2005, 41(5): 881-888.

[5] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.

[6] Moulay E, Dambrine M, Yeganefar N, et al. Finite-time stability and stabilization of time-delay systems[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(7): 561-566.

[7] Zhao S W, Sun J T, Liu L. Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects[J]. Int J of Control, 2008, 81(11): 1824-1829.

[8] Germain G, Sophie T, Jacques B. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 364-369.

[9] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 2005, 17(2): 101-127.

[10] Francesco A, Marco A, Carlo C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2006, 42(2): 337-342.

[11] Li J, Qian C J. Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 879-884.

[12] Qian C J, Li J. Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 885-890.

[13] Hong Y G, Jiang Z P. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(12): 1950-1956.

[14] Liu L, Sun J. Finite-time stabilization of linear systems via impulsive control[J]. Int J of Control, 2008, 81(5): 905-909.

[15] Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2004, 43(4): 1253-1271.

[16] Sergey G N, Wassim M H. Finite-time stabilization of nonlinear impulsive dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2008, 2(3): 832-845.