

文章编号: 1001-0920(2011)06-0953-04

# 一类欠驱动系统的非线性输出跟踪控制

王红睿<sup>1,2</sup>, 田彦涛<sup>1</sup>

(1. 吉林大学通信工程学院, 长春 130025; 2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130031)

**摘要:** 针对一类模型结构为非下三角的欠驱动系统, 在反步法的框架下研究了其非线性输出跟踪控制问题. 鉴于在此类欠驱动系统的反步法设计中, 沿用一般下三角系统的偏差难以镇定全部的偏差动态, 由此引入了“联系函数”的概念. 在反步法设计中, 构造了异于下三角系统的偏差, 设计了状态反馈跟踪控制器, 保证了系统偏差的全局一致渐近稳定性. 仿真结果表明该设计方法是有效的.

**关键词:** 非线性控制; 欠驱动系统; 反步法; 球杆系统

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Nonlinear output tracking control for a class of underactuated systems

WANG Hong-rui<sup>1,2</sup>, TIAN Yan-tao<sup>1</sup>

(1. School of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China; 2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130031, China. Correspondent: WANG Hong-rui, E-mail: wang\_hongrui@yahoo.com.cn)

**Abstract:** Nonlinear output tracking control problem for a class of non-triangular underactuated systems is discussed by backstepping method. For the non-triangular underactuated systems, if errors in the backstepping design procedure are defined the same as errors of lower triangular systems, not all the error dynamics are able to be stabilized. Therefore, the concept of contact function is introduced. Then errors in the backstepping design procedure are constructed differently from errors of lower-triangular systems. State feedback tracking control controller are designed to guarantee that system errors are globally asymptotically stable. Simulation results show the effectiveness of the proposed design method.

**Key words:** nonlinear control; underactuated systems; backstepping; ball and beam

## 1 引言

欠驱动系统是指其自身执行器数目小于独立自由度数目的系统<sup>[1-4]</sup>. 对于欠驱动系统的输出跟踪控制问题, 可运用反馈线性化<sup>[5-6]</sup>、变结构控制<sup>[7-8]</sup>、不动点法<sup>[4]</sup>、反步法<sup>[9]</sup>等方法. 反馈线性化是控制非三角欠驱动系统的常用方法<sup>[4-6]</sup>, 但若系统无法转换为状态反馈要求的标准形式, 则难以应用此方法. 由于抖颤效应的影响, 变结构控制的应用也受到限制<sup>[5-6]</sup>. 若欠驱动系统具有参数反馈形式, 则可用反步法构造跟踪控制器. 然而, 某些欠驱动系统模型不具有下三角结构. 在反步法框架下, 针对非下三角结构的欠驱动系统, 如何选择待镇定系统动态并设计跟踪控制器是一个需要研究的问题.

本文针对一类具有非下三角结构的二自由度欠驱动系统, 研究了其非线性输出跟踪控制问题. 对于

此类系统, 引入了“联系函数”的概念. 在反步法设计中, 重新选择了待镇定的系统动态, 进而构造了异于下三角系统的偏差, 最终设计了光滑状态反馈控制律.

## 2 问题描述

考虑一类具有非下三角结构的欠驱动系统模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1(x_1, \theta), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \phi_2(x_1, x_2, \theta), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \phi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \theta), \\ \dot{x}_n &= g(x_{n+1}) + \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta), \\ \dot{x}_{n+1} &= x_{n+2}, \\ \dot{x}_{n+2} &= u + \phi_{n+2}(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}, \theta), \end{aligned} \quad (1)$$
$$y = x_1. \quad (2)$$

收稿日期: 2010-03-18; 修回日期: 2010-06-07.

基金项目: 教育部高校博士学科点专项科研基金项目(20060183006); 吉林大学 985 工程研究生创新基金项目(20080212).

作者简介: 王红睿(1980—), 男, 博士, 助理研究员, 从事非线性控制的研究; 田彦涛(1958—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与控制等研究.

其中:  $x \in R^{n+2}$  为系统的状态;  $u \in R$  和  $y \in R$  分别为控制输入和输出;  $\theta \in R^p$  为已知的参数向量;  $\phi_i (1 \leq i \leq n)$  和  $\phi_{n+2}$  为已知的光滑非线性函数向量;  $g$  为已知的光滑函数;  $y$  为系统的输出.

欠驱动系统有 2 个自由度和 1 个控制输入. 将控制输入可直接影响的自由度称为“直接驱动自由度”, 另一个自由度称为“无驱动自由度”<sup>[1]</sup>. 状态  $x_1, x_2, \dots, x_n$  对应无驱动自由度的动态, 状态  $x_{n+1}, x_{n+2}$  对应直接驱动自由度的动态. 由于采用状态反馈控制律, 式(1)可改写为  $\dot{x} = f(x, t, \theta)$ , 其中  $f(x, t, \theta)$  为非线性的连续的向量函数.

**假设 1** 待跟踪的参考  $y_r$  是连续的、有界的、已知的, 且  $y_r$  第  $i (i = 1, 2, \dots, n+2)$  阶的时间导数也是连续的、有界的、已知的.

**假设 2** 函数  $g(x_{n+1})$  及其一阶时间导数和二阶时间导数是连续的、有界的、已知的.

**假设 3** 函数  $g(x_{n+1})$  的一阶时间导数  $\dot{g}(x_{n+1})$  不为 0, 或  $x_{n+1} \in D_0 \subset R$  时, 有

$$\dot{g}(x_{n+1}) \neq 0. \quad (3)$$

**假设 4** 函数  $f(x, t, \theta)$  对于变量  $x$  和  $t$  满足局部的 Lipchitz 条件.

与文献[9]单自由度的下三角系统不同, 欠驱动系统(1)包括直接驱动自由度和无欠驱动自由度两个子系统, 式(1)很难转换为下三角形式. 若沿用对应下三角系统的反步法偏差(见文献[9]式(3.73)), 则可构造镇定无驱动自由度状态  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的虚拟反馈函数, 但很难构造对应直接驱动自由度状态  $x_{n+1}, x_{n+2}$  的虚拟反馈函数.

为了解决上述问题, 在反步法设计中, 需要构造区别于文献[9]的系统偏差. 对于此类欠驱动系统, 不能照搬下三角系统的反步设计方法, 选择全部系统状态为待镇定动态. 针对直接驱动自由度, 应选择区别于  $x_{n+1}, x_{n+2}$  的待镇定系统动态.

针对欠驱动系统(1), 引入如下定义.

**定义 1** 将欠驱动系统模型(1)中的函数  $g(x_{n+1})$  称为“联系函数”.

选择联系函数及其一阶时间导数作为对应直接驱动自由度的待镇定系统动态. 反步设计中的偏差为

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_r, \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1 - \dot{y}_r, \\ &\vdots \\ z_n &= x_n - \alpha_{n-1} - y_r^{(n-1)}, \\ z_{n+1} &= g(x_{n+1}) - \alpha_n, \end{aligned}$$

$$z_{n+2} = \dot{g}(x_{n+1})x_{n+2} - \alpha_{n+1}, \quad (4)$$

其中  $\alpha_i (1 \leq i \leq n+1)$  为虚拟状态反馈函数.

### 3 非线性跟踪控制器设计

选择系统 Lyapunov 函数  $V_i (i = 1, 2, \dots, n+2)$  为

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i z_j^2. \quad (5)$$

**Step 1** 偏差  $z_1$  的时间导数为

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_r = z_2 + \alpha_1 + \phi_1(x_1, \theta). \quad (6)$$

控制 Lyapunov 函数  $V_1$  的时间导数为

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 + z_1(\alpha_1 + \phi_1). \quad (7)$$

选取虚拟状态反馈函数  $\alpha_1$  为

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \phi_1, \quad (8)$$

其中  $c_1$  为待设计参数且  $c_1 > 0$ .

**Step  $i (i = 2, 3, \dots, n-1)$**  偏差  $z_i$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \alpha_i + z_{i+1} + \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \phi_j + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $y_r^{(j)}$  为  $y_r$  的第  $j$  阶导数. 选取虚拟状态反馈函数  $\alpha_i$  为

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -c_i z_i - z_{i-1} - \phi_i + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \phi_j + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $c_i$  为待设计参数且  $c_i > 0$ .

Lyapunov 函数  $V_i$  的时间导数为

$$\dot{V}_i = z_i z_{i+1} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i c_j z_j^2. \quad (11)$$

**Step  $n$**  偏差  $z_n$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= z_{n+1} + \alpha_n + \phi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} \phi_j + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right) - y_r^{(n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

系统控制 Lyapunov 函数  $V_n$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \\ &= - \sum_{j=1}^{n-1} c_j z_j^2 + z_n z_{n+1} + z_n \left[ z_{n-1} + \alpha_n + \phi_n - \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} \phi_j + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right) - y_r^{(n)} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

设计第  $n$  步的虚拟状态反馈函数为

$$\alpha_n = -c_n z_n - z_{n-1} - \phi_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \right.$$

$$\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} \phi_j + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} + y_r^{(n)}, \quad (14)$$

其中  $c_n$  为待设计参数且  $c_n > 0$ 。则 Lyapunov 函数  $V_n$  的时间导数变为

$$\dot{V}_n = - \sum_{j=1}^n c_j z_j^2 + z_n z_{n+1}. \quad (15)$$

**Step n + 1** 偏差  $z_{n+1}$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n+1} = & z_{n+2} + \alpha_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} g - \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} \phi_j - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)}. \end{aligned} \quad (16)$$

系统控制 Lyapunov 函数  $V_{n+1}$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{j=1}^n c_j z_j^2 + z_{n+1} z_{n+2} + z_{n+1} \left[ z_n + \right. \\ & \alpha_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} g - \\ & \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} \phi_j - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

选取第  $(n + 1)$  步的虚拟状态反馈函数为

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} = & -c_{n+1} z_{n+1} - z_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} x_{j+1} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} g + \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_j} \phi_j + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $c_{n+1}$  为待设计参数且  $c_{n+1} > 0$ 。则 Lyapunov 函数  $V_{n+1}$  的时间导数变为

$$\dot{V}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j^2 + z_{n+1} z_{n+2}. \quad (19)$$

**Step n + 2** 偏差  $z_{n+2}$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n+2} = & \ddot{x}_{n+2} + \dot{g} \phi_{n+2} + \dot{g} u - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_j} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_n} g - \\ & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_{n+1}} x_{n+2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_j} \phi_j - \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)}. \end{aligned} \quad (20)$$

选择系统控制 Lyapunov 函数  $V_{n+2}$  为

$$V_{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+2} z_j^2. \quad (21)$$

系统控制 Lyapunov 函数  $V_{n+2}$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n+2} = & - \sum_{j=1}^n c_j z_j^2 + z_{n+2} \left[ \dot{g} u + z_{n+1} + \ddot{x}_{n+2} + \dot{g} \phi_{n+2} - \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_j} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_n} g - \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_{n+1}} x_{n+2} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_j} \phi_j - \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right]. \quad (22)$$

选取状态反馈控制律  $u$  为

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{\dot{g}} \left[ -c_{n+2} z_{n+2} - z_{n+1} - \ddot{x}_{n+2} - \dot{g} \phi_{n+2} + \right. \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_n} g + \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_{n+1}} x_{n+2} + \\ & \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_j} \phi_j + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $c_{n+2}$  为待设计参数且  $c_{n+2} > 0$ 。

**定理 1** 考虑欠驱动系统 (1)，选取系统的 Lyapunov 函数如式 (21) 所示，采用状态反馈控制律 (23)，则闭环系统平衡点  $z = 0$  是全局一致稳定的，且欠驱动系统满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n + 2, \quad (24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_r(t)] = 0. \quad (25)$$

**证明** 将状态反馈控制律式 (23) 代入 (21)，系统 Lyapunov 函数  $V_{n+2}$  的时间导数满足

$$\dot{V}_{n+2} = - \sum_{j=1}^{n+2} c_j z_j^2. \quad (26)$$

选取参数  $c_0$  使之满足

$$c_0 = \min_{1 \leq m \leq n+2} c_m, \quad (27)$$

则系统 Lyapunov 函数  $V_{n+2}$  的时间导数满足

$$\dot{V}_{n+2} = - \sum_{j=1}^{n+2} c_j z_j^2 \leq -W(z) = -c_0 |z|^2 \leq 0. \quad (28)$$

由于函数  $W(z)$  是正定的或半正定的，根据 Lasalle-Yoshizawa 定理<sup>[9]</sup>， $z(t)$  的解是全局一致有界的，系统平衡点  $z = 0$  是全局一致稳定的，且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_0 \sum_{j=1}^{n+2} (z_j(t))^2 = 0. \quad (29)$$

考虑到偏差的非负性，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n + 2; \quad (30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_r(t)] = 0. \quad (31)$$

由于偏差  $z(t)$  的解是全局一致有界的，由式 (4) 偏差的定义，易知状态  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$  的解是全局一致有界的。□

#### 4 仿真实验

被控对象的模型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k \sin x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix}, \quad y = x_1. \quad (32)$$

其中:  $k$  为常数,  $u$  为控制量. 式 (32) 可视为忽略向心力项的简化球杆系统<sup>[10]</sup>. 由第 3 节的方法, 虚拟反馈函数分别为

$$\alpha_1 = -c_1 z_1, \quad (33)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{b}[(1 - c_1^2)z_1 + (c_1 + c_2)z_2 - \ddot{y}_r], \quad (34)$$

$$\alpha_3 = bz_2 - c_3 z_3 - \frac{1}{b}(1 - c_1^2)(-c_1 z_1 + z_2) - \frac{1}{b}(c_1 + c_2)(z_1 + c_2 z_2 + bz_3) - \frac{y_r^{(3)}}{b}. \quad (35)$$

状态反馈控制律  $u$  为

$$u = \frac{1}{g \cos(x_3)} \left\{ \left[ \frac{-(1 - c_1^2)^2}{b} + \frac{(c_1 + c_2)^2}{b} - b \right] z_1 + \left[ \frac{(1 - c_1^2)(-c_1 - c_2)}{b} + \frac{(c_1 + c_2)(c_2^2 + b^2 - 1)}{b} - bc_2 + bc_3 \right] z_2 + [c_1^2 + (c_1 + c_2)(c_2 + c_3) + c_3^2 - b^2 - 2] z_3 - c_4 z_4 - \frac{y_r^{(4)}}{b} + g \sin(x_3) x_4^2 \right\}. \quad (36)$$

系统参数为  $k = 7.0$ . 控制器参数为  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 2$ ,  $c_4 = 1$ . 初始值为  $x_1(0) = 150$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ ,  $x_4(0) = 0$ . 参考信号为

$$y_r(t) = 150 \cos(t/3). \quad (37)$$

仿真结果见图 1. 由图 1 可知, 系统各状态及控制量  $u$  均是有界的, 输出跟踪偏差很快收敛到 0. 仿真结果表明第 3 节的算法是有效的.

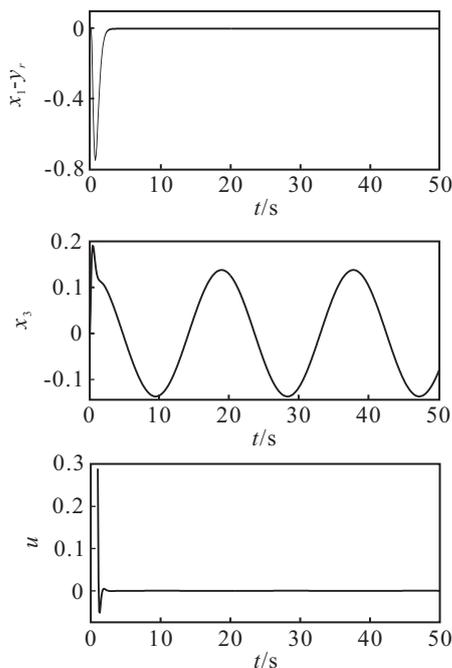


图 1 输出跟踪控制仿真结果

## 5 结 论

本文讨论了一类具有非下三角结构的欠驱动系统的输出跟踪控制问题. 对于该类欠驱动系统, 若沿

用一般下三角系统反步设计中的偏差, 则难以镇定全部偏差动态. 为此, 引入“联系函数”的概念, 在反步法设计中构造了不同于下三角系统的偏差. 在递归设计中, 逐一镇定了联系函数对应的动态, 再通过无驱动自由度动态镇定了直接驱动自由度动态, 最终构造了状态反馈控制律, 保证了偏差是全局一致稳定的. 仿真结果验证了本文提出方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Reyhanoglu M, Van Der Schaft A, Mcclamroch N, et al. Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(9): 1663-1671.
- [2] Bullo F. Stabilization of relative equilibria for underactuated systems on Riemannian manifolds[J]. Automatica, 2000, 36(12): 1819-1834.
- [3] Olfati S R. Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 305-308.
- [4] 高丙团, 陈宏钧, 张晓华. 欠驱动机械系统的三类级联规范型[J]. 控制与决策, 2006, 21(6): 685-688. (Gao B T, Chen H J, Zhang X H. Three classes of normal forms for underactuated mechanical systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(6): 685-688.)
- [5] Kolesnichenko O, Shiriaev A. Partial stabilization of underactuated Euler - Lagrange systems via a class of feedback transformations[J]. Systems and Control Letters, 2002, 45(2): 121-132.
- [6] 高丙团, 陈宏钧, 张晓华. 一类欠驱动机械系统的非线性控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 104-106. (Gao B T, Chen H J, Zhang X H. Nonlinear control for a class of underactuated mechanical system[J]. Control and Decision, 2006, 21(1): 104-106.)
- [7] Wang W, Yi J, Zhao D, et al. Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems[J]. IEE Proc of Control Theory and Applications, 2004, 151(6): 683-690.
- [8] Xu R, Ozguner U. Sliding mode control of a class of underactuated systems[J]. Automatica, 2008, 44(1): 233-241.
- [9] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley Interscience, 1995.
- [10] Hauser J, Sastry S, Kokotovic P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(3): 392-398.