第 26 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2011 年 3 月
Vol. 26 No. 3 Control and Decision Mar. 2011

文章编号: 1001-0920(2011)03-0439-04

一类高阶随机非线性系统的状态反馈镇定

李武全，井元伟，张嗣瀛
(东北大学 信息科学与工程学院，沈阳 110819)

摘 要: 针对一类既不可反馈线性化也不仿射于控制输入的高阶随机非线性系统, 研究其状态反馈镇定问题. 利用齐次占优和反推技术, 所设计的状态反馈控制器使得整个闭环系统在 $[0,+\infty)$ 上几乎处处有唯一解, 并使得闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的. 主要贡献是完全取消了高阶系统的阶次限制, 得到了新的结果. 最后通过数值仿真验证了所提出控制方案的有效性.

关键词: 高阶随机非线性系统；状态反馈镇定；齐次占优
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

State-feedback stabilization of a class of high-order stochastic nonlinear systems

LI Wu-quan, *JING Yuan-wei*, *ZHANG Si-ying*
(College of Information Science and Technology，Northeastern University，Shenyang 110819，China．Correspondent: LI Wu-quan，E-mail：sea81@126.com)

Abstract: For a class of high-order stochastic nonlinear systems, which are neither necessarily feedback linearizable nor affine in the control input, this paper investigates the problem of state-feedback stabilization. By using the homogeneous domination and backstepping technique, a state-feedback controller is designed, which ensures that the closed-loop system has an almost surely unique solution on $[0,+\infty)$, and the equilibrium of the closed-loop system is globally asymptotically stable in probability. The main contribution lies in completely relaxing the power order restriction for high-order systems and leads to new results. A simulation example shows the effectiveness of the state-feedback controller.

Key words: high-order stochastic nonlinear systems；state-feedback stabilization；homogeneous domination

1 引 言

考虑如下高阶随机非线性系统:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i &= (x_{i+1}^{p_i} + f_i(\bar{x}_i))\mathrm{d}t + g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)\mathrm{d}\omega, \\ &\quad i = 1,2,\cdots,n-1; \\ \mathrm{d}x_n &= (u^{p_n} + f_n(\bar{x}_n))\mathrm{d}t + g_n^{\mathrm{T}}(\bar{x}_n)\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $u\in\boldsymbol{R}$ 和 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 分别为系统的控制输入和状态, $\bar{x}_i=(x_1,\cdots,x_i)^{\mathrm{T}}$; $p_i\in R_{\mathrm{odd}}^{\geqslant 1}=\{q\in R: q\geqslant 1$ 且 q 是 2 个奇数之比$\}$, $i=1,2,\cdots,n$; $\omega\in\boldsymbol{R}^r$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的独立标准 Wiener 过程, $\Omega,\mathcal{F}$ 和 P 分别为样本空间, σ-代数域和概率测度; 函数 $f_i:\boldsymbol{R}^i\to\boldsymbol{R}$ 和 $g_i:\boldsymbol{R}^i\to\boldsymbol{R}^r$ 为满足 $f_i(0)=0$, $g_i(0)=0$ 的 $\mathcal{C}^1$ 函数, $i=1,2,\cdots,n$.

随机系统的稳定性问题是近年来的研究热点之一. 文献 [1-2] 介绍了随机非线性系统最常用的稳定性概念和理论. 文献 [3] 将 CLF 及 Sontag 公式推广到随机非线性系统, 提出了随机非线性系统依概率稳定的定义. 随后, 随机系统的理论得到了迅速发展[4-5]. 对于高阶随机非线性系统的镇定问题, 目前已有的结果[6-8]都要求满足阶次限制. 但无论从理论分析还是从实际应用的角度看, 对于高阶随机非线性系统要求阶次限制, 条件都过于苛刻. 对于不满足阶次限制的高阶随机系统 (1) 的渐近镇定问题, 目前尚未见到相关报道.

受确定性结果[9-10]等的启发, 本文针对系统 (1) 研究其状态反馈镇定问题. 利用齐次占优和反推技术, 所设计的控制器可保证闭环系统的平衡点依概率全

收稿日期: 2010-03-19；**修回日期:** 2010-06-24.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60774010, 10971256, 60274009)；江苏省自然科学基金项目(BK2009083)；江苏省高校自然科学基础研究面上项目(07KJB510114)；国家高技术研究发展计划项目(2004AA412030).
作者简介: 李武全(1981−), 男, 博士生, 从事随机非线性系统控制的研究；张嗣瀛(1925−), 男, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事复杂性科学、复杂系统控制等研究.

局渐近稳定.

2 预备知识

用 $\boldsymbol{R}^+$ 表示全体非负实数, X^{T} 表示 X 的转置, $\mathrm{Tr}\{X\}$ 表示方阵 X 的迹, $|\cdot|$ 表示欧氏空间中向量的 2 范数, $\mathcal{C}^i$ 表示相应定义域上的 i 阶连续可微函数; $R^+_{\mathrm{odd}}=\{q\in R: q>0$ 且 q 是 2 个奇数之比$\}$. $\mathcal{K}$ 表示连续、严格单调、零点等于 0 的 $\boldsymbol{R}^+$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的函数全体; $\mathcal{K}_\infty$ 表示 $\mathcal{K}$ 中无界函数全体; $\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的函数 $\beta(s,t)\in\mathcal{KL}$ 表示对给定的 t, $\beta(\cdot,t)\in\mathcal{K}$, 而给定的 s, $\beta(s,\cdot)$ 单调递减且 $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(s,t)=0$.

考虑如下随机非线性系统:

$$\mathrm{d}x=f(x,u)\mathrm{d}t+g(x)\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

其中: $x\in\boldsymbol{R}^n$ 为可测的状态, $u\in\boldsymbol{R}^m$ 为输入, $\omega\in\boldsymbol{R}^r$ 为独立标准 Wiener 过程向量. 对于任意 $t\geqslant 0$, 当 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 时, $f:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ 和 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^{n\times r}$ 是局部 Lipschitz 函数且有 $f(0)=0$, $g(0)=0$.

定义 1[4] 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在一类 $\mathcal{KL}$ 函数 $\beta(\cdot,\cdot)$, 满足 $P\{|x(t)|<\beta(|x_0|,t)\}\geqslant 1-\varepsilon, \forall t\geqslant 0$, $\forall x_0\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$, 则称系统 (2) 在平衡点 $x=0$ 是依概率全局渐近稳定的.

下面给出一些引理:

引理 1[4] 对于系统 (2), 若存在一个 $\mathcal{C}^2$ 函数 $V(x)$ 及 $\mathcal{K}_\infty$ 函数 α_1,α_2, K 函数 α_3, 使得

$$\alpha_1(x)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_2(x),$$

$$\mathcal{L}V(x)=\frac{\partial V}{\partial x}f+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big\{g^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}g\Big\}\leqslant-\alpha_3(x),$$

则系统 (2) 在 $[0,+\infty)$ 上几乎处处存在唯一解, 且在平衡点 $x=0$ 是依概率全局渐近稳定的, 即 $P\{\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)|=0\}=1$, 其中 $\mathcal{L}V(x)$ 称为 $V(x)$ 沿系统 (2) 的无穷小算子.

引理 2[8] 设 x,y 是实变量, 对于任意的正整数 m,n 和正实数 a, 下面的不等式成立:

$$ax^my^n\leqslant$$
$$b|x|^{m+n}+\frac{n}{m+n}\Big(\frac{m+n}{m}\Big)^{-m/n}a^{\frac{m+n}{n}}b^{-m/n}|y|^{m+n},$$

其中 $b>0$ 为任意实数.

引理 3[10] 设 $x\in R, y\in R, p\geqslant 1$ 是一个常数, 则下面的不等式成立:

$$|x+y|^p\leqslant 2^{p-1}|x^p+y^p|,$$
$$(|x|+|y|)^{1/p}\leqslant$$
$$|x|^{1/p}+|y|^{1/p}\leqslant 2^{(p-1)/p}(|x|+|y|)^{1/p}.$$

如果 $p\geqslant 1$ 是奇数, 则有

$$|x-y|^p\leqslant 2^{p-1}|x^p-y^p|,$$
$$|x^{1/p}-y^{1/p}|\leqslant 2^{(p-1)/p}|x-y|^{1/p}.$$

3 控制器设计与稳定性分析

对于系统 (1), 作如下假设:

假设 1 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 存在常数 $\tau\geqslant 0$ 和 $b>0$ 使得下式成立:

$$|f_i(\bar{x}_i)|\leqslant b(|x_1|^{(r_i+\tau)/r_1}+\cdots+|x_i|^{(r_i+\tau)/r_i}),$$
$$|g_i(\bar{x}_i)|\leqslant$$
$$b(|x_1|^{(2r_i+\tau)/(2r_1)}+\cdots+|x_i|^{(2r_i+\tau)/(2r_i)}).$$

其中: $r_1=1, r_{i+1}=(r_i+\tau)/p_i>0$. 设 $r_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$, $a_i=r_0/r_i, i=1,2,\cdots,n$. 同时满足如下 2 个条件之一:

条件 1 $r_n+\tau\geqslant r_i$, 如果对于任意的 $i=1,2,\cdots,n$, $a_i=1$ 或者 $a_i\geqslant 2$ 成立;

条件 2 $r_n+\tau\geqslant 2r_i$, 其他.

注 1 条件 1 和条件 2 在保证整个闭环系统满足局部李普希兹条件方面起到了非常关键的作用, 而局部李普希兹条件可保证随机系统解的存在唯一性.

注 2 关于高阶随机非线性系统的稳定性结果[6-8], 都要求系统必须满足阶次限制 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n\geqslant 1$, 其中所有 p_i 都是正奇整数. 本文对系统 (1) 完全取消了阶次限制, 在很大程度上放宽了文献 [6-8] 的条件, 得到了新的结果.

下面利用齐次占优和反推技术, 在假设 1 的条件下为系统 (1) 设计全局渐近稳定的状态反馈控制器.

为方便起见, 假设 $\tau=q/d$, 其中: q 为偶数, d 为奇数. 在该条件下, 可知 $r_i\in R^+_{\mathrm{odd}}$.

选取 $l\geqslant 1$, 使得 $r_n+\tau\geqslant(r_i+\tau)/l$ 和 $r_0\geqslant(r_i+\tau)/l$ 成立, $i=1,2,\cdots,n$. 选取 σ 如下:

1) 选取 $\sigma=r_0$, 如果假设 1 中的条件 1 得到满足;

2) 选取 σ 为任意的 $\sigma\in R^+_{\mathrm{odd}}$ 满足

$$r_n+\tau\geqslant\sigma\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\frac{r_i+\tau}{l},2r_i\Big\},$$

如果假设 1 中的条件 2 得到满足.

第 1 步 定义误差变量 $\xi_1=x_1^{\sigma/r_1}$ 和李雅普诺夫函数

$$V_1(x_1)=\frac{r_1}{4l\sigma-\tau}x_1^{(4l\sigma-\tau)/r_1},$$

利用假设 1 和式 (1) 可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V_1(x_1)\leqslant\\&x_1^{(4l\sigma-\tau-r_1)/r_1}(x_2^{p_1}-x_2^{*p_1})+x_1^{(4l\sigma-\tau-r_1)/r_1}x_2^{*p_1}+\\&\Big(b+\frac{4l\sigma-\tau-r_1}{2r_1}b^2\Big)x_1^{4l\sigma/r_1}\leqslant\\&-n\xi_1^{4l}+x_1^{(4l\sigma-\tau-r_1)/r_1}(x_2^{p_1}-x_2^{*p_1}),\end{aligned}\tag{3}$$

其中虚拟控制选取如下:

$$\begin{aligned}&x_2^{*p_1}(x_1)=\\&-x_1^{(\tau+r_1)/r_1}\Big(n+b+\frac{4l\sigma-\tau-r_1}{2r_1}b^2\Big)=\\&-\xi_1^{r_2p_1/\sigma}\alpha_1^{r_2p_1/\sigma}.\end{aligned}\tag{4}$$

第 k 步　假设在第 $k-1$ 步, 存在正定正则且是 $\mathcal{C}^2$ 的李雅普诺夫函数 $V_{k-1}(\bar{x}_{k-1})$ 和定义如下的虚拟控制器 $x_1^*, x_2^{*p_1}, \cdots, x_k^{*p_{k-1}}$:

$$\begin{aligned}
&x_1^* = 0, && \xi_1 = x_1^{\sigma/r_1},\\
&x_2^{*p_1} = -\xi_1^{r_2p_1/\sigma}\alpha_1^{r_2p_1/\sigma}, && \xi_2 = x_2^{\sigma/r_2} - x_2^{*\sigma/r_2},\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&x_k^{*p_{k-1}} = -\xi_{k-1}^{r_kp_{k-1}/\sigma}\alpha_{k-1}^{r_kp_{k-1}/\sigma}, && \xi_k = x_k^{\sigma/r_k} - x_k^{*\sigma/r_k},
\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 是一些正数, 使得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}V_{k-1}(\bar{x}_{k-1}) \leqslant\\
&-(n-k+2)\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l}+\\
&\xi_{k-1}^{(4l\sigma-\tau-r_{k-1})/\sigma}(x_k^{p_{k-1}} - x_k^{*p_{k-1}}).
\end{aligned} \tag{6}$$

为了完成归纳, 在第 k 步选取如下李雅普诺夫函数:

$$\begin{aligned}
&V_k(\bar{x}_k) = V_{k-1}(\bar{x}_{k-1}) + W_k(\bar{x}_k),\\
&W_k(\bar{x}_k) = \int_{x_k^*}^{x_k}(s^{\sigma/r_k} - x_k^{*\sigma/r_k})^{(4l\sigma-\tau-r_k)/\sigma}\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{7}$$

利用式 (1), (6) 和 (7), 可得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}V_k(\bar{x}_k) \leqslant\\
&-(n-k+2)\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l} + \xi_{k-1}^{(4l\sigma-\tau-r_{k-1})/\sigma}(x_k^{p_{k-1}}-\\
&-x_k^{*p_{k-1}}) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial W_k}{\partial x_i}(x_{i+1}^{p_i} + f_i(\bar{x}_i)) + \frac{\partial W_k}{\partial x_k}(x_{k+1}^{p_k}+\\
&f_k(\bar{x}_k)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{k-1}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i\partial x_j}\right||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)||g_j^{\mathrm{T}}(\bar{x}_j)|+\\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i^2}\right||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)|^2+\\
&\sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_k\partial x_i}\right||g_k^{\mathrm{T}}(\bar{x}_k)||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)| + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_k^2}\right||g_k^{\mathrm{T}}(\bar{x}_k)|^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

类似于文献 [10] 中的式 (11) ~ (14) 和命题 2.1, 可得

$$\begin{aligned}
&\xi_{k-1}^{(4l\sigma-\tau-r_{k-1})/\sigma}(x_k^{p_{k-1}} - x_k^{*p_{k-1}}) \leqslant\\
&\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l} + b_{k,1}\xi_k^{4l},\\
&\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial W_k}{\partial x_i}(x_{i+1}^{p_i} + f_i(\bar{x}_i)) \leqslant \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l} + b_{k,2}\xi_k^{4l},\\
&\frac{\partial W_k}{\partial x_k}f_k(\bar{x}_k) \leqslant \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l} + b_{k,3}\xi_k^{4l},
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $b_{k,1}, b_{k,2}, b_{k,3}$ 为正数.

在下面的证明过程中, 为了方便, 采用 $\tilde{c}$ 作为类属的正数, 在不同的环境可以取不同的值. 对于 $i=1, 2, \cdots, k-1$, 由式 (5), 可得

$$\frac{\partial x_k^{*\sigma/r_k}}{\partial x_i} = \begin{cases}-\tilde{c},\ a_i = 1 \text{ 且 } \sigma = r_0;\\ -\tilde{c}x_i^{(\sigma-r_i)/r_i},\ \text{其他}.\end{cases} \tag{10}$$

利用式 (5) 和假设 1, 由引理 2 和引理 3 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{k-1}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i x_j}\right||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)||g_j^{T}(\bar{x}_j)| \leqslant\\
&\sum_{i,j=1,i\neq j}^{k-1}\tilde{c}\left|\frac{\partial x_k^{*\sigma/r_k}}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial x_k^{*\sigma/r_k}}{\partial x_j}\right|\left|\int_{x_k^*}^{x_k}(s^{\sigma/r_k}-\right.\\
&x_k^{*\sigma/r_k})^{((4l-2)\sigma-\tau-r_k)/\sigma}\mathrm{d}s||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)||g_j^{\mathrm{T}}(\bar{x}_j)| \leqslant\\
&\sum_{i,j=1,i\neq j}^{k-1}\tilde{c}|\xi_k|^{((4l-2)\sigma-\tau)/\sigma}(|\xi_1|^{(2\sigma+\tau)/\sigma}+\\
&\cdots + |\xi_k|^{(2\sigma+\tau)/\sigma}) \leqslant\\
&\frac{1}{7}(\xi_1^{4l} + \cdots + \xi_{k-1}^{4l}) + b_{k,4}\xi_k^{4l},
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $b_{k,4}>0$ 为常数.

对式 (10) 进一步求导, 可得

$$\frac{\partial^2 x_k^{*\sigma/r_k}}{\partial x_i^2} = \begin{cases}0,\ a_i = 1 \text{ 且 } \sigma = r_0;\\ -\tilde{c}x_i^{(\sigma-2r_i)/r_i},\ \text{其他}.\end{cases} \tag{12}$$

由式 (5), (12) 和假设 1, 利用引理 2 和引理 3, 可得

$$\begin{aligned}
&-\frac{4l\sigma-\tau-r_k}{\sigma}\frac{\partial^2 x_k^{*\sigma/r_k}}{\partial x_i^2}\int_{x_k^*}^{x_k}(s^{\sigma/r_k}-\\
&x_k^{*\sigma/r_k})^{((4l-1)\sigma-\tau-r_k)/\sigma}\mathrm{d}s|g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)|^2 \leqslant\\
&\tilde{c}|\xi_i - \xi_{i-1}\alpha_{i-1}|^{(\sigma-2r_i)/\sigma}|\xi_k|^{((4l-1)\sigma-\tau)/\sigma}\cdot\\
&(|\xi_1|^{(2r_i+\tau)/\sigma} + \cdots + |\xi_k|^{(2r_i+\tau)/\sigma}) \leqslant\\
&\frac{1}{7(k-1)}(\xi_1^{4l} + \cdots + \xi_{k-1}^{4l}) + \tilde{c}\xi_k^{4l},\\
&\frac{4l\sigma-\tau-r_k}{\sigma}\frac{3\sigma-\tau-r_k}{\sigma}\left(\frac{\partial x_k^{*\sigma/r_k}}{\partial x_i}\right)^2\int_{x_k^*}^{x_k}(s^{\sigma/r_k}-\\
&x_k^{*\sigma/r_k})^{((4l-2)\sigma-\tau-r_k)/\sigma}\mathrm{d}s|g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)|^2 \leqslant\\
&\tilde{c}|\xi_i - \xi_{i-1}\alpha_{i-1}|^{(2\sigma-2r_i)/\sigma}|\xi_k|^{((4l-2)\sigma-\tau)/\sigma}\times\\
&(|\xi_1|^{(2r_i+\tau)/\sigma} + \cdots + |\xi_i - \xi_{i-1}\alpha_{i-1}|^{(2r_i+\tau)/\sigma}) \leqslant\\
&\frac{1}{7(k-1)}(\xi_1^{4l} + \cdots + \xi_{k-1}^{4l}) + \tilde{c}\xi_k^{4l}.
\end{aligned} \tag{13}$$

由式 (13) 可以得到

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i^2}\right||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)|^2 \leqslant \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l} + b_{k,5}\xi_k^{4l}, \tag{14}$$

其中 $b_{k,5}>0$ 为常数.

利用式 (5) 和假设 1, 由引理 2 和引理 3 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_k\partial x_i}\right||g_k^{\mathrm{T}}(\bar{x}_k)||g_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i)| \leqslant\\
&\sum_{i=1}^{k-1}\tilde{c}|\xi_k|^{((4l-1)\sigma-\tau-r_k)/\sigma}(|\xi_1|^{(\sigma+\tau+r_k)/\sigma}+\\
&\cdots + |\xi_{k-1}|^{(\sigma+\tau+r_k)/\sigma}) \leqslant\\
&\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l} + b_{k,6}\xi_k^{4l},
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $b_{k,6}>0$ 为常数.

由式 (5) 和假设 1, 利用引理 2 和引理 3 得

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_k^2}\right||g_k^{\mathrm{T}}(\bar{x}_k)|^2 \leqslant$$
$$\tilde{c}|\xi_k|^{((4l-1)\sigma-\tau-r_k)/\sigma}|x_k|^{(\sigma-r_k)/r_k}\cdot$$
$$(|x_1|^{(2r_k+\tau)/r_1}+\cdots+|x_k|^{(2r_k+\tau)/r_k}) \leqslant$$
$$\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{4l}+b_{k,7}\xi_k^{4l}, \tag{16}$$

其中 $b_{k,7}>0$ 为常数. 将式 (9), (11), (14), (15) 和 (16) 代入 (8), 可得

$$\mathcal{L}V_k(\bar{x}_k) \leqslant -\sum_{i=1}^{k}(n-k+1)\xi_i^{4l}+$$
$$\xi_k^{(4l\sigma-\tau-r_k)/\sigma}(x_{k+1}^{p_k}-x_{k+1}^{*p_k}), \tag{17}$$

其中

$$x_{k+1}^{*p_k}(\bar{x}_k)=$$
$$-(n-k+1+b_{k,1}+\cdots+b_{k,7})\xi_k^{(\tau+r_k)/\sigma}=$$
$$-\xi_k^{r_{k+1}p_k/\sigma}\alpha_k^{r_{k+1}p_k/\sigma}.$$

第 n 步 为系统 (1) 选取如下李雅普诺夫函数:

$$V_n(\bar{x}_n)=V_{n-1}(\bar{x}_{n-1})+W_n(\bar{x}_n),$$
$$W_n(\bar{x}_n)=\int_{x_n^*}^{x_n}(s^{\sigma/r_n}-x_n^{*\sigma/r_n})^{(4l\sigma-\tau-r_n)/\sigma}\mathrm{d}s. \tag{18}$$

选取如下状态反馈控制器:

$$u=-\xi_n^{(\tau+r_n)/(\sigma p_n)}(1+b_{n,1}+\cdots+b_{n,7})^{1/p_n}=$$
$$-\xi_n^{r_{n+1}/\sigma}\alpha_n, \tag{19}$$

其中 $b_{n,1},\cdots,b_{n,7}$ 为正的常数. 类似于式 (17), 可得

$$\mathcal{L}V_n(\bar{x}_n) \leqslant -\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{4l}, \tag{20}$$

其中 $\xi_n=x_n^{\sigma/r_n}-x_n^{*\sigma/r_n}$.

下面的定理是本文的主要结果.

定理 1 对于高阶随机非线性系统 (1), 在假设 1 的条件下, 状态反馈控制器 (19) 保证以下结论成立:

1) 系统 (1) 在 $[0,+\infty)$ 上几乎处处有唯一解;

2) 闭环系统的平衡点依概率全局渐近稳定.

证明 由式 (5), (19) 和 $r_{n+1}p_n=r_n+\tau$, 得

$$\frac{\partial u^{p_n}}{\partial x_i}=A_i x_i^{(\sigma-r_i)/r_i}(x_n^{\sigma/r_n}+\alpha_{n-1}x_{n-1}^{\sigma/r_{n-1}}+$$
$$\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots x_1^{\sigma/r_1})^{(r_n+\tau-\sigma)/\sigma}. \tag{21}$$

其中: $A_i=-\dfrac{r_n+\tau}{r_i}\alpha_n^{p_n}\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_i, i=1,2,\cdots,n-1$; $A_n=-\dfrac{r_n+\tau}{r_n}\alpha_n^{p_n}$. 由 σ 的定义, 得

$$\frac{r_n+\tau-\sigma}{\sigma}\geqslant 0,\ \frac{\sigma-r_i}{r_i}\geqslant 0,\ \frac{\sigma}{r_i}\geqslant 1. \tag{22}$$

由式 (21) 和 (22) 可知 u^{p_n} 是 $\mathcal{C}^1$ 函数. 考虑到 $f_i(\bar{x}_i)$ 和 $g_i(\bar{x}_i)$ 也是 $\mathcal{C}^1$ 函数, 因此整个闭环系统都是满足局部李普希兹条件的.

由 $V_1(x_1)$ 的定义, 式 (7), (18) 及 (20), 利用引理 1, 可知定理 1 成立. □

4 仿真例子

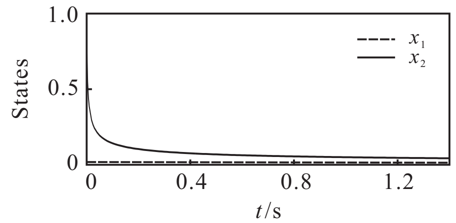
考虑如下高阶随机非线性系统:

$$\mathrm{d}x_1=\Big(x_2^3+\frac{1}{4}x_1^{2/3}(\sin x_1)^3\Big)\mathrm{d}t+\frac{1}{8}x_1^{7/3}\mathrm{d}\omega,$$
$$\mathrm{d}x_2=\Big(u+\frac{1}{4}x_2^{35/11}\Big)\mathrm{d}t+\frac{1}{8}x_2^{1/11}(\sin x_2)^2\mathrm{d}\omega. \tag{23}$$

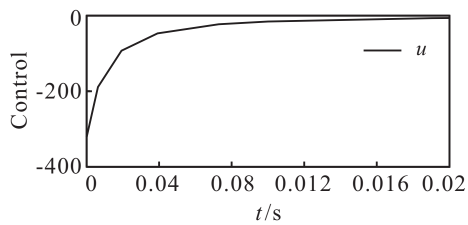
选取 $r_1=1, \tau=8/3, r_2=11/9, p_1=3, p_2=1$. 显然, 假设 1 中的条件得到满足. 选取 $l=13/11$ 和 $\sigma=11/3$, 根据上述设计过程, 可求得控制器

$$u(x_1,x_2)=-433.9(x_2^3+2.5x_1^{11/3})^{35/33}. \tag{24}$$

在仿真中, 选取初值 $x_1(0)=0.01, x_2(0)=1$. 图 1 给出了闭环系统 (23) 和 (24) 的响应曲线, 控制方案的有效性得到了验证.



(a) 状态响应



(b) 控制器

图 1 闭环系统 (23) 和 (24) 的响应曲线

5 结 论

本文利用齐次占优和反推技术研究了一类高阶随机非线性系统的状态反馈镇定问题, 所设计的控制器可保证闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的. 将本文的结果推广到更一般的系统尚有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Has'minskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Kluwer Academic Publishers: Massachusetts, 1980.

[2] Kushner H J. Stochastic stability and control[M]. Academic Press: New York, 1967.

[3] Florchinger P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability[J]. Siam J on Control and Optimization, 1995, 33(4): 1151-1169.

[4] Krstic M, Deng H. Stabilization of uncertain nonlinear systems[M]. New York: Springer, 1998.

(下转第447页)