

文章编号: 1001-0920(2011)07-1101-04

基于一类连续非线性函数的多智能体系统有限时间一致性

余莹莹, 方华京

(华中科技大学 控制科学与工程系, 武汉 430074)

摘要: 针对存在时滞的多智能体系统, 提出了一类连续非线性函数的有限时间一致性算法. 利用 Lyapunov 有限时间稳定性理论和矩阵理论, 给出了这类算法使得系统能够在有限时间内达到一致的充分条件, 进而给出了一个满足条件的有限时间一致性算法, 并对该算法的收敛性进行分析, 得到了系统的收敛时间. 数值仿真验证了所提出算法的有效性.

关键词: 有限时间一致性; 多智能体系统; 收敛速度; 分布式控制

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Finite-time consensus for multi-agent systems on continuous nonlinear functions

SHE Ying-ying, FANG Hua-jing

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China. Correspondent: SHE Ying-ying, E-mail: sylviassy@sina.com)

Abstract: Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with communication delays is proposed. Based on the theory of finite-time Lyapunov stability and matrix theory, the sufficient conditions which guarantee the multi-agent systems to reach a consensus in finite time are obtained. Moreover, a finite-time consensus protocol is given by applying the sufficient conditions, the convergence of the system is analyzed, and the settling time for the system to reach a consensus is given. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: finite-time consensus; multi-agent systems; convergence rate; distributed control

1 引言

近年来, 多智能体系统的协调控制已经成为控制领域的研究热点, 其应用涉及人造卫星群的姿态控制、自治移动小车系统以及自动高速公路系统等多个领域. 文献 [1-6] 对多智能体系统的一致性进行了大量研究. 作为多智能体系统协调控制中的研究热点, 一致性问题主要基于多智能体系统中智能体相互之间的信息交换, 通过设计一致性协议使得所有智能体的状态达到某同一值.

在实际应用中, 多智能体系统的收敛速度十分重要, 目前已有的大多数一致性算法均是使得群体系统状态达到渐近稳定. 但是, 实际系统的状态变量不可能在有限的时间内达到平衡状态, 因而有限时间一致性问题具有更强的工程应用背景. 文献 [7] 提出了一类基于符号梯度函数的非连续控制算法, 解决了无向

连通网络拓扑结构下系统的有限时间一致性问题. 随后, [8] 针对有向且强连通网络拓扑结构下的多智能体系统提出了两类非连续控制算法, 分别解决了最大和最小有限时间收敛问题. [9-10] 在经典线性一致性算法^[2]的基础上提出了两类有限时间一致性算法, 指出在有向网络具有一个生成树时, 系统可以在有限时间内收敛. 此外, [11-12] 也研究了多智能体系统的有限时间一致性问题.

在实际应用中, 智能体之间通过传感器或通信设备进行信息传输必然会产生时滞问题. 为此, 本文针对具有时滞的多智能体系统, 提出了一类连续非线性函数的有限时间一致性算法, 并给出了这类算法使得时滞系统能在有限时间内达到一致的充分条件.

2 多智能体系统模型与预备知识

假设多智能体系统中有 n 个智能体, 用一个无向图 $G = (V, E, A)$ 表示智能体之间的信息交换网络拓

收稿日期: 2010-03-19; 修回日期: 2010-05-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874053, 60574088)

作者简介: 余莹莹(1983-), 女, 博士, 从事智能控制、多智能体系统协调控制的研究; 方华京(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、网络化控制系统等研究.

扑结构. 顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为有限的非空集, 图的顶点 v_i 表示智能体 i ; 边集 $E \subseteq V^2$, 图的边 $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ 表示智能体 i 与智能体 j 可以相互传递信息, 即 $e_{ij} \in E \Leftrightarrow e_{ji} \in E$; 加权图的邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$ 为对称非负矩阵, $a_{ii} = 0$, 当 $i \neq j$ 且 $(v_i, v_j) \in E$ 时, $a_{ij} > 0$. 智能体 i 的邻接成员用集合 $N_i = \{v_j \in V : (v_i, v_j) \in E\}$ 表示.

若图 G 中两个不同顶点 v_i 和 v_j 存在一条路径, 则称 v_i 和 v_j 是可达的. 当且仅当图 G 的任意两个不同的顶点之间都存在一条路径时, 称该图是连通图.

系统中智能体可以表示为

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), u_i(t)), \quad (1)$$

其中 $u_i(t)$ 为反馈控制输入. 存在时滞时, 多智能体系统为

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + \sum_{q=1}^n b_q u_i(t - \tau_q). \quad (2)$$

定义 1^[13] 无向图 G 的 Laplacian 矩阵定义为

$$L(G) = L = D - A,$$

其中 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是图 G 的度矩阵, $d_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$. 显然, L 是一个对称的半正定矩阵, 且 $L1 = 0$.

定义 2^[9] 定义函数 $\text{sign}(r)^\alpha \triangleq \text{sign}(r)|r|^\alpha$. 其中: $r \in R, \alpha > 0$. 符号函数 $\text{sign}(r)$ 定义为

$$\text{sign}(r) = \begin{cases} 1, & r > 0; \\ 0, & r = 0; \\ -1, & r < 0. \end{cases}$$

可以看出, $\text{sign}(r)^\alpha$ 是关于 r 连续的, 且有

$$d|r|^{\alpha+1}/dr = (\alpha + 1)\text{sign}(r)^\alpha.$$

引理 1^[13] 对于一个给定的无向图 G , L 为该无向图的 Laplacian 矩阵. 若 G 是连通的, 则 $L(A)$ 半正定, 且 $L(A)$ 的特征根满足

$$0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L).$$

图 G 的代数连通度为

$$\min_{\xi \neq 0, 1^T \xi = 0} \frac{\xi^T L(A) \xi}{\xi^T \xi},$$

即当 ξ 满足 $1^T \xi = 0$ 时, 有 $\xi^T L(A) \xi \geq \lambda_2(L(A)) \xi^T \xi$.

引理 2^[7] 假设函数 $V(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是可微的 (在零点的导数为右导数), 若

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -KV(t)^\alpha.$$

其中: $K > 0, 0 < \alpha < 1$. 则函数 $V(t)$ 将会在有限时间 $t^* \leq \frac{V(0)^{1-\alpha}}{K(1-\alpha)}$ 内收敛到零点. 对于所有 $t \geq t^*$, 有 $V(t) = 0$.

引理 3^[14] 考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - h_i), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

其中: $x(t) \in R^n, u(t) \in R^n, \tilde{A}$ 和 B_i 为 $n \times n$ 矩阵, h_i 为正常数. 当

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=0}^k L_{(\tilde{A}, C_i)}^{h_i} u_i,$$

$$L_{(\tilde{A}, C_i)}^{h_i} f = \int_{-h_i}^0 e^{\tilde{A}(-h_i-s)} C_i f(s) ds,$$

$$C_i = B_i e^{-\tilde{A}h_i}$$

时, 可以得到

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}y(t) + Bu(t), \quad B = \sum_{i=0}^k C_i. \quad (4)$$

若系统 (4) 在反馈控制 $u(t) = k(t)F(y(t))$ 下可以在有限时间内达到一致 (其中 $k(t)$ 有界且 $F(y(t))$ 连续), 则可以得出系统 (3) 在反馈控制

$$u(t) = k(t)F\left(x(t) + \sum_{i=0}^k L_{(\tilde{A}, C_i)}^{h_i} u_i\right)$$

下可以在有限时间内达到一致.

引理 4^[11] 当 $y_i(t) = x_i(t) + \sum_{q=1}^n L_{(a, c_q)}^{\tau_q} u_i$ 时, 系统 (3) 的收敛时间 $T(x)$ 应该滞后于系统 (4) 的收敛时间 $T(y)$, 其滞后时间差为系统 $\sum_{q=1}^n L_{(a, c_q)}^{\tau_q} u_i$ 达到稳定的时间. 此时有

$$T\left(\sum_{q=1}^n L_{(a, c_q)}^{\tau_q} u_i\right) \leq \sum_{q=1}^n T(L_{(a, c_q)}^{\tau_q} u_i) \leq \sum_{q=1}^n c_q \tau_q,$$

$$T(x) \leq T(y) + \sum_{q=1}^n c_q \tau_q.$$

引理 5^[9] 给定 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \geq 0$ 和 $0 < p \leq 1$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^p.$$

3 有限时间一致性分析

下面针对存在时滞的多智能体系统 (1), 提出基于一类连续非线性函数的有限时间一致性算法, 并给出该类算法使得系统能够在有限时间内达到一致必须满足的充分条件.

根据引理 3, 当 $y(t) = x(t) + \sum_{i=0}^k L_{(\tilde{A}, C_i)}^{h_i} u_i$ 时, 有

$$\dot{y}_i(t) = ay_i(t) + bu_i. \quad (5)$$

对于系统 (5), 基于一类连续非线性函数的有限时间一致性算法为

$$\dot{y}_i(t) = f_i\left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j(t) - y_i(t))\right). \quad (6)$$

此时, 系统的反馈控制输入为

$$u_i(t) = -\frac{1}{b} \left[ay_i(t) - f_i\left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j(t) - y_i(t))\right) \right]. \quad (7)$$

定理 1 考虑具有 n 个智能体的多智能体系统,

在其通信拓扑结构图 G 无向且连通时, 有限时间一致性算法 (6) 中的非线性函数 f_i 若满足以下两个条件, 则在反馈控制输入 (7) 下, 时滞系统 (2) 可以在有限时间内达到一致。

条件 1 对于 $i=1, 2, \dots, n$, f_i 是一连续的增函数, 当且仅当 $z_i = 0$ 时, $f_i(z_i) = 0$;

条件 2 对于给定的通信拓扑结构图 G 和初始状态 $y(0)$, 存在常数 α 和 l 满足 $0 < \alpha < 1, l > 0$, 对于任意 $0 < |z| \leq \|L(A)\|_\infty \|y(0)\|_\infty$, 有

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{f_i(z_i)^2}{\left(\int_0^{z_i} f(s) ds\right)^\alpha} \geq l.$$

证明 令 $z_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j - y_i)$, 可以得到

$$z = -L(A)y, \dot{z} = -L(A)\dot{y} = -L(A)f(z),$$

$$0 < |z| \leq \|z(t)\|_\infty = \|L(A)y(t)\|_\infty \leq$$

$$\|L(A)\|_\infty \|y(t)\|_\infty \leq \|L(A)\|_\infty \|y(0)\|_\infty.$$

选取 Lyapunov 函数 $V(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} f(s) ds$. 当 $f_i(z_i)$ 满足条件 1 时, 可知当且仅当 $z(t) = 0$ 时, $V(t) = 0$ 且 $V(t) \geq 0$. 对其求导可得到

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n f_i(z_i) \dot{z}_i = -f^T(z)L(A)f(z).$$

当 $V(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{f^T(z)L(A)f(z)}{f^T(z)f(z)} \frac{f^T(z)f(z)}{V(t)^\alpha} V(t)^\alpha.$$

由引理 1 可知

$$\frac{f^T(z)L(A)f(z)}{f^T(z)f(z)} \geq \lambda_2(L).$$

当 $f_i(z_i)$ 满足条件 2 时, 有

$$\frac{f^T(z)f(z)}{V(t)^\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(z_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} f(s) ds\right)^\alpha}.$$

由引理 5 可知

$$\left(\sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} f(s) ds\right)^\alpha \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{z_i} f(s) ds\right)^\alpha.$$

因此得到

$$\frac{f^T(z)f(z)}{V(t)^\alpha} \geq \frac{\sum_{i=1}^n f_i(z_i)^2}{\sum_{i=1}^n \left(\int_0^{z_i} f(s) ds\right)^\alpha} \geq l,$$

$$dV(t)/dt \leq -l\lambda_2(L)V(t)^\alpha.$$

根据引理 2 有

$$V(t) = \begin{cases} (-l\lambda_2(L)(1-\alpha)t + V(0)^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t < t^*; \\ 0, & t \geq t^*. \end{cases}$$

综上所述, 非线性函数 f_i 若满足给定的两个条件, 则系统 (5) 在有限时间一致性算法 (6) 的控制下是有限时间收敛的, 其收敛时间

$$t^* = V(0)^{1-\alpha} / (l\lambda_2(L)(1-\alpha)).$$

因此, 根据引理 3 可知反馈控制输入 (7) 可以使得时滞系统 (2) 在有限时间内达到收敛, 由引理 4 可知系统的收敛时间为 $T(x) \leq T(y) + \sum_{q=1}^n c_q \tau_q$. \square

4 仿真算例

下面给出一个满足定理 1 所提出的两个条件的有限时间一致性算法. 首先通过理论分析证明该算法能够使得时滞系统 (2) 在有限时间内收敛; 然后通过数值仿真来验证本文的理论结果。

在有限时间一致性算法 (6) 中, 令

$$f_i(z_i(t)) = \text{sign} \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j(t) - y_i(t)) \right]^\alpha + \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j(t) - y_i(t)).$$

其中: $0 < \alpha < 1, \beta > 0, z_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j - y_i)$. 此时系统的反馈控制输入为

$$u_i(t) = -\frac{1}{b} \left\{ a y_i(t) - \left[\text{sign} \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j(t) - y_i(t)) \right]^\alpha + \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j(t) - y_i(t)) \right] \right\}.$$

显然, 当且仅当 $z_i = 0$ 时, $f_i(z_i) = 0$, 且 f_i 为连续且增函数, 此时非线性函数 (8) 满足条件 1. 当

$$l = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\min \{ (\|L(A)\|_\infty \|y(0)\|_\infty)^{\alpha(1-\alpha)}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \|L(A)\|_\infty \|y(0)\|_\infty \right\} / \left(2 \max \left\{ \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^\alpha, \left(\frac{\beta}{2} \right)^\alpha \right\} \right) \right\}$$

时, 有

$$\frac{f_i(z_i)^2}{\left(\int_0^{z_i} f(s) ds\right)^\alpha} = \frac{(\text{sign}(z_i)^\alpha + \beta z_i)^2}{\left(\frac{1}{1+\alpha} |z_i|^{1+\alpha} + \frac{\beta}{2} z_i^2\right)^\alpha} \geq \frac{|z_i|^{2\alpha}}{\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^\alpha |z_i|^{(1+\alpha)\alpha} + \left(\frac{\beta}{2}\right)^\alpha z_i^{2\alpha}} \geq l.$$

可以得出, 非线性函数 (8) 满足条件 2. 因此, 非线性函数 (8) 满足定理 1 给出的两个条件。

下面给出具有时滞的多智能体系统 (2) 在反馈控制输入 (9) 下, 能够在有限时间内达到收敛的数值仿真. 考虑由 6 个智能体组成的系统, 其通信网络拓扑结构如图 1 所示, 其邻接权重均为 1. 智能体的初始状态随机给定, 根据 $0 < \alpha < 1$, 选取 $\alpha = 0.5, \beta = 1$.

图 2 显示了 $\tau = 0.5$ s 时, 时滞系统 (2) 中所有个体在反馈控制输入 (9) 下的状态轨迹, 根据定理 1 得到系统的收敛时间为 32.7 s. 从图 2 可以看出, 只要系统

的通信网络拓扑结构满足给定的条件, 则系统便能在有限时间内达到一致.

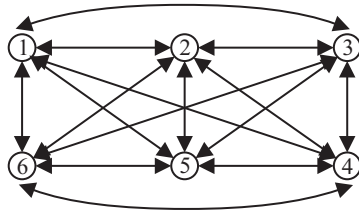


图 1 系统通信网络拓扑结构

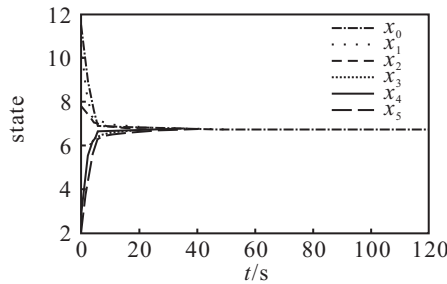


图 2 时滞系统的状态轨迹

5 结 论

本文提出了基于一类连续非线性函数的有限时间一致性算法. 由Lyapunov有限时间稳定性理论和矩阵理论可知, 在时滞系统的通信网络拓扑结构是无向且连通的情况下, 该类算法能够使得时滞系统在有限时间内达到一致. 进一步, 给出了一个满足条件的有限时间一致性算法, 并通过仿真实例验证了该算法的有效性.

参考文献(References)

[1] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.

[2] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-

delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[3] Tian Y P, Liu C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(5): 2122-2128.

[4] Yang W, Wang X F. Consensus filters on small world networks[C]. Proc of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, 2006: 1212-1221.

[5] Liu C L, Tian Y P. Coordination of multi-agent Systems with communication delays[C]. IFAC World Congress. Seoul, 2008: 10782-10787.

[6] Xie G, Wang L. Consensus control for a class of networks of dynamic agents[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10/11): 941-959.

[7] Cort'es J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1993-2000.

[8] Cort'es J. Distributed algorithms for reaching consensus on general functions[J]. Automatica, 2008, 44(3): 726-737.

[9] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[EB/OL]. 2010. arXiv:math/0701724v1.

[10] Xiao F, Wang L, Jia Y. Fast information sharing in networks of autonomous agents[C]. Proc American Control Conf. Washington, 2008: 4388-4393.

[11] Wang L, Chen Z, Liu Z, et al. Finite time agreement protocol design of multiagent systems with communication delays[J]. Asian J of Control, 2009, 11(3): 281-286.

[12] Hui Q, Haddad W M, Bhat S P. Finite-time semistability and consensus for nonlinear dynamical networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(8): 1887-1900.

[13] Horn R, Johnson C. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[14] Artstein Z. Linear systems with delayed controls: A reduction[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(4): 869-879.

下 期 要 目

一种求解多维背包问题的混合分布估计算法	王 凌, 等
基于整合概率数据关联的最优传感器序列研究	王 洋, 等
高阶滑模微分器的分析与改进	蒲 明, 等
基于直觉模糊推理的目标识别方法	雷 阳, 等
一种基于创造性思维的粒子群优化算法 H_∞ 控制	唐苏妍, 等
被动多传感器自适应曲线模型跟踪新算法	杨金龙, 等
基于多尺度网络模型的物流配送中心选址候选集构建方法	谷淑娟, 等