文章编号: 1001-0920 (2011) 05-0667-06

时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的鲁棒稳定性

刘健辰[1,2], 章 兢[1], 张红强[2], 何 敏[1]

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院，长沙 410082；2. 湖南科技大学 信息与电气工程学院，湖南 湘潭 411201)

摘 要: 研究一类具有区间时变时滞的离散不确定广义 Markov 跳变系统的时滞相关鲁棒稳定性问题. 通过将 Jensen 不等式与一个新的定界不等式相结合, 得到了一个新的稳定性判据, 该判据中仅含有 Lyapunov 变量, 具有较小的计算负担. 进而, 基于凸组合方法得到了另一个新的稳定性判据, 该判据引入了一些自由矩阵变量, 具有较小的保守性. 数值算例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 广义系统；Markov跳变系统；区间时变时滞；时滞相关

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust stability for discrete-time singular Markovian jump systems with time-varying delay

LIU Jian-chen[1,2], *ZHANG Jing*[1], *ZHANG Hong-qiang*[2], *HE Min*[1]

(1. College of Electrical and Information Engineering，Hu'nan University，Changsha 410082，China；2. School of Information and Electrical Engineering，Hu'nan University of Science and Technology，Xiangtan 411201，China. Correspondent：LIU Jian-chen，E-mail：liujian4587@sina.com)

Abstract: The problem of delay-dependent robust stability for a class of discrete-time uncertain singular Markovian jump systems with interval time-varying delay is studied. By combining the Jensen inequality with a new bounding inequality, a novel stability criterion is obtained, which involves only Lyapunov variables and has less computation burden. Based on the convex combination method, another novel stability criterion is proposed, which introduces some free matrix variables and is less conservative. Numerical examples show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: singular system；Markovian jump system；interval time-varying delay；delay-dependent

1 引 言

很多实际系统, 可能因元件或系统互联故障, 环境变化, 以及网络传输延迟等原因而发生结构和参数上的突然变化, 这时系统常常可以用 Markov 跳变系统来进行建模和分析[1]. 时滞是实际系统中常常遇到的问题, 因此时滞 Markov 跳变系统的研究成为了一个研究热点. 对于离散情况, 文献 [2-3] 研究了具有模态相关时滞的 Markov 跳变系统稳定性分析和控制器设计; 对于具有一般时变时滞的情况, 文献 [4] 研究了时滞相关镇定问题.

另一方面, 由于可以更好地描述电子电路、经济系统和电力系统等一类实际系统, 广义系统的研究引起了极大的关注. 与一般系统不同, 当研究离散广义时滞系统的稳定性时, 必须同时考虑正则性和因果性, 这使得广义时滞系统的研究更加复杂[5-7]. 对于具有定常时滞的离散广义 Markov 跳变系统, 文献 [8] 研究了鲁棒 H_∞ 问题, [9] 研究了鲁棒随机稳定性和镇定问题. 对于具有模态相关时滞的情况, [10] 研究了鲁棒稳定性和 H_∞ 控制问题, [11] 研究了鲁棒 H_∞ 滤波问题. 而对于时变时滞系统, 特别是区间时变时滞系统的研究还比较少. 最近, [12-13] 研究了具有区间时变时滞的离散广义 Markov 跳变系统的稳定性和镇定问题. 但 [12-13] 在推导稳定性判据的过程中, 都将 $-\sum\limits_{l=k-h_2}^{k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z E y_l$ 放大为 $-\sum\limits_{l=k-d_k}^{k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z E y_l$, 其中 $h_1 \leqslant d_k \leqslant h_2$, 这使得 [12-13] 中方法的保守性较大.

本文研究具有区间时变时滞的离散广义Markov 跳变系统的鲁棒稳定性问题. 首先, 采用两种方法

收稿日期: 2010-03-23；**修回日期:** 2010-06-19.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60634020).

作者简介: 刘健辰(1978−), 男, 博士生, 从事随机跳变系统鲁棒控制和智能控制等研究；章兢(1957−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统计算机控制等研究.

对Lyapunov-Krasovskii泛函的前向差分中的有限和项进行适当的定界, 得到两个新的随机稳定性判据. 同时, 结合正则性和因果性分析, 得到两个相应的容许性判据. 其中, 第1种方法是将Jensen不等式与一个新的定界不等式相结合, 使得稳定性判据中仅含有Lyapunov变量, 具有较小的计算负担; 第2种方法是基于凸组合方法[14], 使得稳定性判据具有较小的保守性. 将以上两种方法推广到不确定情况, 并通过数值算例验证所提出方法的有效性.

为了简化叙述, 本文记 $A(r_k=i)$ 为 A_i, 其他矩阵类推; 记 $y_k=x_{k+1}-x_k$; 记 $A+A^{\rm T}$ 为 sym(A); 矩阵中的对称元素用星号"$*$"表示; I_n 和 0_n 分别为 $n\times n$ 维的单位矩阵和全零矩阵, 并且在不产生混淆的情况下, 简写为 I 和 0; $0_{n\times m}$ 为 $n\times m$ 维的全零矩阵.

2 问题描述

考虑一类离散广义不确定Markov跳变系统

$$\begin{cases} Ex_{k+1}=(A(r_k)+\Delta A(r_k))x_k+\\ \qquad (A_d(r_k)+\Delta A_d(r_k))x_{k-d_k},\\ x_k=\varphi_k, k=-h_2,-h_2+1,\cdots,0. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_k\in \boldsymbol{R}^n$ 为系统的状态向量; φ_k 为初始状态函数; 矩阵 $E\in\boldsymbol{R}^n$ 奇异, 且 rank$(E)=r<n$; $A(r_k)$, $A_d(r_k)$ 为适当维数的模态相关定常矩阵系统; 模态 r_k 是取值于有限集合 $\boldsymbol{S}=\{1,2,\cdots,s\}$ 上的齐次Markov过程, 从模态 i 到模态 j 的转移概率为 $\pi_{ij}=\Pr\{r_{k+1}=j|r_k=i\}$, $\pi_{ij}\geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}=1$. $\Delta A(r_k)$ 和 $\Delta A_d(r_k)$ 描述系统的时变不确定性, 具有以下形式:

$$[\,\Delta A(r_k)\;\; \Delta A_d(r_k)\,]=H(r_k)F_k[\,E_1(r_k)\;\; E_2(r_k)\,]. \tag{2}$$

$H(r_k)$, $E_1(r_k)$ 和 $E_2(r_k)$ 为适当维数的模态相关定常矩阵, F_k 为未知时变矩阵, 且满足 $F_k^{\rm T}F_k\leqslant I(\forall k)$. d_k 为区间时变时滞, 满足 $h_1\leqslant d_k\leqslant h_2$, h_1 和 h_2 为已知非负整数.

定义 1 考虑如下标称系统:

$$Ex_{k+1}=A_ix_k+A_{di}x_{k-d_k}. \tag{3}$$

对于任意 $i\in\boldsymbol{S}$, 如果 $\det(zE-A_i)$ 不恒等于零, 则称系统(3)是正则的; 如果系统(3)是正则的, 且对于任意 $i\in\boldsymbol{S}$, 满足 deg$(\det(zE-A_i))=$ rank(E), 则称系统(3)是因果的; 如果对于任意 φ_k 和 $r_0\in\boldsymbol{S}$, 满足 $\mathrm{E}\Big[\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x_k^{\rm T}x_k|\varphi_k,r_0\Big]<\infty$, 则称系统(3)是随机稳定的; 如果系统(3)满足正则性、因果性和随机稳定性, 则称系统(3)是随机容许的. 如果对于任意容许的不确定性(2), 系统(1)均是随机容许的, 则称其是鲁棒容许的.

在得出本文主要结果之前, 首先给出如下引理.

引理 1 对于任意标量 $M\geqslant 0$, $N\geqslant 0$ 和 $d_m<d<d_M$, 有

$$\frac{M}{d-d_m}+\frac{N}{d_M-d}\geqslant \min\Big\{\frac{M+3N}{d_M-d_m},\frac{N+3M}{d_M-d_m}\Big\}. \tag{4}$$

证明过程与文献[15]相似, 此处略.

定理 2[16] 给定适当维数矩阵 $Z^{\rm T}=Z$, E, Δ 和 F, 且 Δ 满足 $\Delta^{\rm T}\Delta\leqslant I$, 则 $Z+E\Delta F+F^{\rm T}\Delta^{\rm T}E^{\rm T}<0$ 成立的充要条件是存在一个正数 ε 使得 $Z+\varepsilon EE^{\rm T}+\varepsilon^{-1}F^{\rm T}F<0$ 成立.

3 主要结果

由引理1可得到如下结果:

定理 1 如果存在适当维数矩阵 $P_i>0$, $Q_j>0$, $Z_l>0$, S_i, S_{di} $(i\in\boldsymbol{S}, j=1,2,3, l=1,2)$ 使得对于 $i\in\boldsymbol{S}$, $j=1,2$, 下式:

$$\varPi_{i,j}=\begin{bmatrix} \varXi_i+\varUpsilon_j & \varGamma_i^{\rm T}\bar P_i & h_1\varGamma_i^{\rm T}Z_1 & \rho\varGamma_i^{\rm T}Z_2\\ * & -\bar P_i & 0 & 0\\ * & * & -Z_1 & 0\\ * & * & * & -Z_2 \end{bmatrix}<0, \tag{5}$$

成立, 则系统(3)是随机容许的. 其中

$$\varXi_i=\begin{bmatrix} \varXi_{i,11} & \varXi_{i,12} & E^{\rm T}Z_1E & 0\\ * & \varXi_{i,22} & 0 & 0\\ * & * & -Q_1-E^{\rm T}Z_1E & 0\\ * & * & * & -Q_2 \end{bmatrix},$$

$$\varXi_{i,11}=E^{\rm T}(\bar P_i-P_i)E+\mathrm{sym}(E^{\rm T}\bar P_iA_i+S_i^TR^{\rm T}\bar A_i)+ Q_1+Q_2+(1+\rho)Q_3-E^{\rm T}Z_1E,$$

$$\varXi_{i,12}=E^{\rm T}\bar P_iA_{di}+S_i^{\rm T}R^{\rm T}A_{di}+\bar A_i^{\rm T}RS_{di},$$

$$\varXi_{i,22}=\mathrm{sym}(S_{di}^{\rm T}R^{\rm T}A_{di})-Q_3,$$

$$\varUpsilon_1=-\gamma_1-3\gamma_2,\ \varUpsilon_2=-3\gamma_1-\gamma_2,$$

$$\gamma_1=W_1^{\rm T}E^{\rm T}Z_2EW_1,\ \gamma_2=W_2^{\rm T}E^{\rm T}Z_2EW_2,$$

$$W_1=[0\ \ I\ \ -I\ \ 0],\ W_2=[0\ \ I\ \ 0\ \ -I],$$

$$\bar P_i=\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}P_j,\ \varGamma_i=[\bar A_i\ \ A_{di}\ \ 0\ \ 0],$$

$$\bar A_i=A_i-E,\ \rho=h_2-h_1,$$

$R\in\boldsymbol{R}^{n\times(n-r)}$ 为满足 $E^{\rm T}R=0$ 的任意列满秩矩阵.

证明 为了证明系统(3)的随机容许性, 首先证明系统(3)的正则性和因果性. 由于 E 奇异且 rank$(E)=r<n$, 则存在非奇异矩阵 $\hat M,\hat N\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足

$$\hat ME\hat N=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{6}$$

定义

$$\hat A_i=\hat MA_i\hat N=\begin{bmatrix}\hat A_{i,11} & \hat A_{i,12}\\ \hat A_{i,21} & \hat A_{i,22}\end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_i = \hat{M}^{-\mathrm{T}} P_i \hat{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i,11} & \hat{P}_{i,12} \\ \hat{P}_{i,12}^{\mathrm{T}} & \hat{P}_{i,22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{S}_i = S_i \hat{N} = [\hat{S}_{i1}, \hat{S}_{i2}], \hat{R} = \hat{M}^{-\mathrm{T}} R = \begin{bmatrix} 0 \\ \varPhi \end{bmatrix}. \quad (8)$$

由式 (5), 有 $\varXi_{i,11} < 0$. 进而, 由 $Q_j > 0\,(j = 1, 2, 3)$ 以及式 (7) 和 (8), 可得

$$\begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \hat{S}_{i,2}^{\mathrm{T}} \varPhi^{\mathrm{T}} \hat{A}_{i,22} + \hat{A}_{i,22}^{\mathrm{T}} \varPhi \hat{S}_{i,2} \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

其中"×"为与结论无关的矩阵.

由式 (9), 可得

$$\hat{S}_{i,2}^{\mathrm{T}} \varPhi^{\mathrm{T}} \hat{A}_{i,22} + \hat{A}_{i,22}^{\mathrm{T}} \varPhi \hat{S}_{i,2} < 0, \quad (10)$$

式 (10) 意味着 $\hat{A}_{i,22}$ 非奇异. 根据反证法, 假设 $\hat{A}_{i,22}$ 奇异, 则必存在非零向量 $\varsigma \in \boldsymbol{R}^{n-r}$, 使得 $\hat{A}_{i,22}\varsigma = 0$. 进而, $\varsigma^{\mathrm{T}}(\hat{S}_{i,2}^{\mathrm{T}} \varPhi^{\mathrm{T}} \hat{A}_{i,22} + \hat{A}_{i,22}^{\mathrm{T}} \varPhi \hat{S}_{i,2})\varsigma = 0$. 这与式 (10) 矛盾, 故 $\hat{A}_{i,22}$ 非奇异.

由于 $\hat{A}_{i,22}$ 非奇异, 可得

$$\begin{aligned} &\det(zE - A_i) = \\ &\det(\hat{M}^{-1}) \det(z\hat{E} - \hat{A}_i) \det(\hat{N}^{-1}) = \\ &\det(\hat{M}^{-1}) \det(-\hat{A}_{i,22}) \det(zI_r - (\hat{A}_{i,11} - \\ &\hat{A}_{i,12}\hat{A}_{i,22}^{-1}\hat{A}_{i,21})) \det(\hat{N}^{-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) 表明 $\det(zE - A_i)$ 不恒等于零, 以及

$$\deg(\det(zE - A_i)) = r = \mathrm{rank}(E).$$

由定义 1, 系统 (3) 是正则的和因果的. 下面证明系统 (3) 的随机稳定性.

考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned} &V(x_k, i) = \\ &V_1(x_k, i) + V_2(x_k) + \sum_{l=k-h_1}^{k-1} x_l^{\mathrm{T}} Q_1 x_l + \\ &\sum_{l=k-h_2}^{k-1} x_l^{\mathrm{T}} Q_2 x_l + h_1 \sum_{\theta=-h_1+1}^{0} \sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_1 E y_l + \\ &\rho \sum_{\theta=-h_2+1}^{-h_1} \sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l. \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$V_1(x_k, i) = x_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P_i E x_k,$$

$$V_2(x_k) = \sum_{l=k-d_k}^{k-1} x_l^{\mathrm{T}} Q_3 x_l + \sum_{\theta=-h_2+2}^{-h_1+1} \sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} x_l^{\mathrm{T}} Q_3 x_l.$$

假设 $r_k = i$, 对 $V(x_k, r_k)$ 的前向差分取数学期望, 即 $\Delta V(x_k, r_k) = \mathrm{E}[V(x_{k+1}, r_{k+1})] - V(x_k, r_k)$, 有

$$\begin{aligned} &\Delta V(x_k, i) = \\ &\Delta V_1(x_k, i) + \Delta V_2(x_k) + x_k^{\mathrm{T}}(Q_1 + Q_2)x_k - \\ &x_{k-h_1}^{\mathrm{T}} Q_1 x_{k-h_1} - x_{k-h_2}^{\mathrm{T}} Q_2 x_{k-h_2} - \\ &h_1 \sum_{l=k-h_1}^{k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_1 E y_l - \rho \sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l + \\ &y_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} (h_1^2 Z_1 + \rho^2 Z_2) E y_k. \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} &\Delta V_1(x_k, i) = \\ &x_{k+1}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} \bar{P}_i E x_{k+1} - x_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P_i E x_k = \\ &x_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} (\bar{P}_i - P_i) E x_k + 2x_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} \bar{P}_i E y_k + y_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} \bar{P}_i E y_k, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\Delta V_2(x_k) = \\ &\sum_{l=k+1-d_{k+1}}^{k} x_l^{\mathrm{T}} Q_3 x_l - \sum_{l=k-d_k}^{k-1} x_l^{\mathrm{T}} Q_3 x_l + \\ &(h_2 - h_1) x_k^{\mathrm{T}} Q_3 x_k - \sum_{l=k+1-h_2}^{k-h_1} x_l^{\mathrm{T}} Q_3 x_l \leqslant \\ &(\rho + 1) x_k^{\mathrm{T}} Q_3 x_k - x_{k-d_k}^{\mathrm{T}} Q_3 x_{k-d_k}. \end{aligned} \quad (15)$$

由 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned} &-h_1 \sum_{l=k-h_1}^{k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_1 E y_l \leqslant \\ &-[x_k - x_{k-h_1}]^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_1 E [x_k - x_{k-h_1}], \end{aligned} \quad (16)$$

根据 Jensen 不等式和引理 1, 有

$$\begin{aligned} &-\rho \sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l = \\ &-\rho \sum_{l=k-d_k}^{k-h_1-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l - \rho \sum_{l=k-h_2}^{k-d_k-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l \leqslant \\ &\frac{-\rho}{d_k - h_1} \xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_1 \xi_k + \frac{-\rho}{h_2 - d_k} \xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_2 \xi_k \leqslant \\ &\max\{-\xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_1 \xi_k - 3\xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_2 \xi_k, -3\xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_1 \xi_k - \xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_2 \xi_k\}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\xi_k = [\, x_k^{\mathrm{T}} \;\; x_{k-d_k}^{\mathrm{T}} \;\; x_{k-h_1}^{\mathrm{T}} \;\; x_{k-h_2}^{\mathrm{T}} \,]^{\mathrm{T}}$, γ_1 和 γ_2 见式 (5) 中定义.

由 $E^{\mathrm{T}} R = 0$, 有

$$\begin{aligned} &0 = 2y_k^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} R [S_i x_k + S_{di} x_{k-d_k}] = \\ &2[\bar{A}_i x_k + A_{di} x_{k-d_k}]^{\mathrm{T}} R [S_i x_k + S_{di} x_{k-d_k}]. \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (14)~(18) 代入 (13), 整理可得

$$\begin{aligned} &\Delta V(x_k, i) \leqslant \\ &\xi_k^{\mathrm{T}} [\varXi_i + \varGamma_i^{\mathrm{T}} (\bar{P}_i + h_1^2 R_1 + \rho^2 R_2) \varGamma_i] \xi_k + \\ &\max\left\{-\xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_1 \xi_k - 3\xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_2 \xi_k, -3\xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_1 \xi_k - \xi_k^{\mathrm{T}} \gamma_2 \xi_k\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

根据 Schur 补原理, 如果式 (5) 成立, 则有

$$\boldsymbol{Q}_i^1 = \varXi_i - \gamma_1 - 3\gamma_2 + \varGamma_i^{\mathrm{T}} (\bar{P}_i + h_1^2 R_1 + \rho^2 R_2) \varGamma_i < 0,$$

$$\boldsymbol{Q}_i^2 = \varXi_i - 3\gamma_1 - \gamma_2 + \varGamma_i^{\mathrm{T}} (\bar{P}_i + h_1^2 R_1 + \rho^2 R_2) \varGamma_i < 0.$$

故有 $\Delta V(x_k, i) < 0$ 和

$$\mathrm{E}[V(x_{k+1}, r_{k+1})] - V(x_k, r_k) \leqslant -\beta x_k^{\mathrm{T}} x_k, \quad (20)$$

其中 $\beta=\inf\{\lambda_{\min}(-\boldsymbol{Q}_i^j), i\in\boldsymbol{S}, j=1,2\}$.

进而, 对 $T\geqslant 1$, 有

$$\mathrm{E}[V(x_{T+1},r_{T+1})]-\mathrm{E}[V(x_0,r_0)]\leqslant-\beta\sum_{k=0}^{T}x_k^{\mathrm{T}}x_k, \tag{21}$$

整理可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Big[\sum_{k=0}^{T}x_k^{\mathrm{T}}x_k\Big]\leqslant\\&\beta^{-1}\{\mathrm{E}[V(x_0,r_0)]-\mathrm{E}[V(x_{T+1},r_{T+1})]\}\leqslant\\&\beta^{-1}\mathrm{E}[V(x_0,r_0)].\end{aligned}\tag{22}$$

令 $T\to\infty$, 即得

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}x_k^{\mathrm{T}}x_k\Big]\leqslant\beta^{-1}\mathrm{E}[V(x_0,r_0)]<\infty.$$

这样根据定义 1, 系统 (3) 随机稳定. □

注 1 定理 1 中采用的 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (12) 与文献 [12-13] 相同, 其充分利用了区间时变时滞 d_k 的信息 (时滞下界 h_1 和时滞区间范围 ρ), 使所得稳定性条件比只采用部分时滞信息时 (仅时滞区间范围 ρ 相关), 具有更小的保守性. 而 $h_2=h_1+\rho$, 所以当 h_1 和 ρ 已经利用时, h_2 将是冗余的, 不必出现在稳定性判据中.

注 2 文献 [12-13] 在推导系统稳定性条件时, 由恒零等式引入了一些自由变量矩阵. 定理 1 通过利用引理 1, 使得需要求解的线性矩阵不等式仅包含 Lyapunov 矩阵, 避免了任何自由变量矩阵的引入. 另外, 文献 [12-13] 将 $-\sum\limits_{l=k-h_2}^{k-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}ZEy_l$ 放大为 $-\sum\limits_{l=k-d_k}^{k-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}ZEy_l$, 而定理 1 利用引理 1 对该项进行了更加严格的定界 (17), 使得定理 1 比文献 [12-13] 中的方法具有较小的保守性, 后面给出的数值算例验证了这一点.

注 3 文献 [17-18] 对连续时间时滞系统提出了一种积分项上界估计方法. 如果采用文献 [17-18] 中的方法对式 (17) 中的 $-\rho\sum\limits_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l$ 项进行定界, 则有

$$\begin{aligned}&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l=\\&-\rho\sum_{l=k-d_k}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-d_k-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l\leqslant\\&-\gamma_1-\gamma_2-(h_2-d_k)\rho^{-1}\gamma_1-(d_k-h_1)\rho^{-1}\gamma_2,\end{aligned}\tag{23}$$

即

$$\begin{aligned}&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l+\gamma_1+\gamma_2+\\&(h_2-d_k)\rho^{-1}\gamma_1+(d_k-h_1)\rho^{-1}\gamma_2\leqslant 0.\end{aligned}\tag{24}$$

然后, 根据式 (24) 是 γ_1 和 γ_2 在 $[h_1,h_2]$ 上的凸组合, 可得式 (24) 等价于

$$\begin{aligned}&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l+2\gamma_1+\gamma_2\leqslant 0,\\&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l+\gamma_1+2\gamma_2\leqslant 0.\end{aligned}\tag{25}$$

综合式 (23)∼(25), 可得

$$\begin{aligned}&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l\leqslant\\&\max\{-\gamma_1-2\gamma_2,-2\gamma_1-\gamma_2\}.\end{aligned}\tag{26}$$

由于 $\gamma_1\geqslant 0,\gamma_2\geqslant 0$, 可见 $\max\{-\gamma_1-3\gamma_2,\ -3\gamma_1-\gamma_2\}\leqslant\max\{-\gamma_1-2\gamma_2,\ -2\gamma_1-\gamma_2\}$, 所以采用引理 1 处理 $-\rho\sum\limits_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l$ 项, 可以取得比文献 [17-18] 中的方法更小的保守性.

注 4 需要注意的是引理 1 中不等式 (4) 的两边仅当 $M=N$ 时才相等. 这表明仅当 $\gamma_1=\gamma_2$ 时, 定理 1 中式 (17) 的第 2 个"⩽"的两边才能相等. 所以当使用引理 1 对求和项 $-\rho\sum\limits_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}y_l^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Z_2Ey_l$ 定界时仍引入了一定的保守性. 下面, 根据凸组合方法, 得到一个具有更小保守性的判据.

定理 2 如果存在适当维数矩阵 $P_i>0$, $Q_j>0$, $Z_l>0$, S_i, S_{di}, M_i 和 $N_i(i\in\boldsymbol{S}$, $j=1,2,3$, $l=1,2)$, 使得对于 $i\in\boldsymbol{S}$, $j=1,2$, 下式:

$$\bar{\varPi}_{i,j}=\begin{bmatrix}\varXi_i+\varPsi_i & \varGamma_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_i & h_1\varGamma_i^{\mathrm{T}}Z_1 & \rho\varGamma_i^{\mathrm{T}}Z_2 & \varOmega_{i.j}\\ * & -\bar{P}_i & 0 & 0 & 0\\ * & * & -Z_1 & 0 & 0\\ * & * & * & -Z_2 & 0\\ * & * & * & * & -Z_2\end{bmatrix}<0 \tag{27}$$

成立, 则系统 (3) 是随机容许的. 其中 $\varPsi_i=\rho\,[0\ \ M_i-N_i\ \ N_i\ \ -M_i]\,E$, $\varOmega_{i,1}=\rho M_i$, $\varOmega_{i,2}=\rho N_i$, 其他矩阵与式 (5) 中定义相同.

证明 采用与定理 1 类似的过程, 可以证明系统 (3) 的正则性和因果性. 下面仅证明系统 (3) 的随机稳定性. 采用与定理 1 相同的 Lyapunov 泛函 (12), 但与定理 1 不同, 利用有限和不等式[21]对求和项

$-\rho \sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l$ 定界, 有

$$-\rho \sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1} y_l^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} Z_2 E y_l \leqslant$$
$$2\rho\xi_k^{\mathrm{T}}[N_i E(x_{k-h_1}-x_{k-d_k})+M_i E(x_{k-d_k}-x_{k-h_2})]+$$
$$\rho\xi_k^{\mathrm{T}}[(d_k-h_1)N_i Z_2^{-1}N_i^{\mathrm{T}}+(h_2-d_k)M_i Z_2^{-1}M_i^{\mathrm{T}}]\xi_k. \tag{28}$$

用式 (28) 代替 (17) 代入 (13), 整理可得

$$\Delta V(x_k,i)\leqslant$$
$$\xi_k^{\mathrm{T}}[\varXi_i+\mathrm{sym}(\varPsi_i)+\varTheta(d_k)+$$
$$\varGamma_i^{\mathrm{T}}(\bar{P}_i+h_1^2R_1+\rho^2R_2)\varGamma_i]\xi_k. \tag{29}$$

其中: $\varXi_i, \varGamma_i$ 和 ξ_k 见式 (8) 中定义, $\varPsi_i$ 见式 (27) 中定义. $\varTheta(d_k)=(d_k-h_1)\rho N_i Z_2^{-1}N_i^{\mathrm{T}}+(h_2-d_k)\rho M_i Z_2^{-1}M_i^{\mathrm{T}}$.

由于 $\varTheta(d_k)$ 是 $\rho N_i Z_2^{-1}N_i^{\mathrm{T}}$ 和 $\rho M_i Z_2^{-1}M_i^{\mathrm{T}}$ 在 $[h_1, h_2]$ 上的凸组合, 有

$$\varXi_i+\mathrm{sym}(\varPsi_i)+\varTheta(d_k)+$$
$$\varGamma_i^{\mathrm{T}}(\bar{P}_i+h_1^2R_1+\rho^2R_2)\varGamma_i<0, \tag{30}$$

等价于

$$\varXi_i+\mathrm{sym}(\varPsi_i)+\varTheta(h_1)+$$
$$\varGamma_i^{\mathrm{T}}(\bar{P}_i+h_1^2R_1+\rho^2R_2)\varGamma_i<0, \tag{31}$$

和

$$\varXi_i+\mathrm{sym}(\varPsi_i)+\varTheta(h_2)+$$
$$\varGamma_i^{\mathrm{T}}(\bar{P}_i+h_1^2R_1+\rho^2R_2)\varGamma_i<0. \tag{32}$$

根据 Schur 补定理, 式 (27) 对于 $j=1,2$ 分别等价于 (31) 和 (32). 这样式 (27) 保证了 (30) 成立. 然后, 沿着与定理 1 相同的证明过程, 可得系统 (3) 随机稳定. □

注 5　定理 2 利用凸组合方法, 将含有时变参数的不等式 (30) 转化为两个等价的定常不等式 (31) 和 (32), 而如注 4 中所述, 定理 1 在使用引理 1 对求和项定界时引入了一定的保守性, 使得定理 2 比定理 1 具有更小的保守性. 但是, 定理 2 中也由有限和不等式引入了一些自由矩阵变量 M_i 和 $N_i(i\in\boldsymbol{S})$, 使其计算负担比定理 1 大.

下面应用引理 2, 可以容易地将定理 1 和定理 2 推广到不确定系统 (1).

定理 3　如果存在适当维数矩阵 $P_i>0$, $Q_j>0$, $Z_l>0$, S_i, S_{di} 和标量 $\varepsilon_i>0(i\in\boldsymbol{S},\ j=1,2,3,\ l=1,2)$ 使得下式:

$$\begin{bmatrix} \varPi_{i,j} & \bar{H}_i & \varepsilon_i\bar{E}_i \\ * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0,\ i\in\boldsymbol{S}, j=1,2 \tag{33}$$

成立, 则对于任意容许的不确定性 (2), 系统 (1) 均是随机容许的. 其中 $\varPi_{i,j}$ 见式 (5) 中定义, $\bar{H}_i=[(E^{\mathrm{T}}\bar{P}_iH_i+S_i^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}H_i)^{\mathrm{T}},\ H_i^{\mathrm{T}}RS_{di},\ 0_{n,2n},\ H_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_i, h_1H_i^{\mathrm{T}}Z_1,\ \rho H_i^{\mathrm{T}}Z_2]^{\mathrm{T}}$, $\bar{E}_i=[\ E_{1,i}\ \ E_{2,i}\ \ 0_{n,5n}\ ]^{\mathrm{T}}$.

定理 4　如果存在适当维数矩阵 $P_i>0$, $Q_j>0$, $Z_l>0$, S_i, S_{di}, M_i, N_i 和标量 $\varepsilon_i>0$ $(i\in\boldsymbol{S},\ j=1,2,3,\ l=1,2)$ 使得下式:

$$\begin{bmatrix} \bar{\varPi}_{i,j} & \tilde{H}_i & \varepsilon_i\tilde{E}_i \\ * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0,\ i\in\boldsymbol{S}, j=1,2 \tag{34}$$

成立, 则对于任意容许的不确定性 (2), 系统 (1) 均是随机容许的. 其中 $\bar{\varPi}_{i,j}$ 在式 (27) 中定义, $\tilde{H}_i=[\bar{H}_i^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{E}_i=[\bar{E}_i^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}}$.

4　数值算例

例 1　考虑一个单模态标称正常系统, 参数如下:

$$A=\begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

计算 h_1 取不同值时, 该系统随机稳定的最大时滞上界 h_2, 计算结果见表 1. 由表 1 可见, 由定理 1 和定理 2 所求得的最大时滞上界大于文献 [19-25]; 定理 2 与 [26] 取得了具有最小保守性的结果, 但定理 2 所涉及的求解变量数要比 [26] 少得多; 而定理 1 尽管就保守性而言要大于定理 2 和 [26], 但定理 1 所涉及的求解变量数比定理 2 和 [26] 有大幅度的减少. 所以, 定理 1 和定理 2 在减小保守性和提高求解效率方面改进了已有文献 [19-26].

表 1　最大时滞上界 h_2

h_1	2	6	10	12	变量数
文献 [19]	7	9	12	13	16
文献 [20]	10	11	13	14	18
文献 [21]	10	11	13	14	42
文献 [22]	10	12	16	16	12
文献 [23]	13	14	15	17	41
文献 [24]	13	14	15	18	18
文献 [25]	13	14	17	18	21
文献 [26]	17	18	20	21	62
定理 1	16	17	19	20	18
定理 2	17	18	20	21	34

例 2　考虑一个单模态标称广义系统, 参数如下:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.35 & 0.7 \end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

设 $h_1=1$, $R=[\ 0\ \ 1\ ]^{\mathrm{T}}$, 由定理 1 和定理 2 均可得最大时滞上界 $h_2=9$, 而采用文献 [7] 中的算法只能得到 $h_2=7$.

进而, 考虑单模态不确定广义系统, 参数如下:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.35 & 0.7 \end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$H = E_1 = E_2 = 0.2I_2.$$

设 $h_1 = 1$, $R = [\,0\ \ 1\,]^{\mathrm{T}}$, 由定理3和定理4, 均可得最大时滞上界 $h_2 = 9$, 而文献 [7] 只得到 $h_2 = 7$. 可见本文的方法具有更小的保守性.

例 3 考虑一个两模态标称系统 (1), 参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.86 & 0.1 \\ 0.7 & 0.97 \end{bmatrix},\ A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.33 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.83 & -0.6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.35 & 0 \\ -0.1 & -0.12 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

其中 Π 为转移概率矩阵. h_1 取不同值时, 计算该系统随机容许的最大时滞上界 h_2, 见表2. 由表2可见, 本文所得结果比文献 [12-13] 具有更小的保守性.

表 2 最大时滞上界 h_2

h_1	0	1	2	3	4	5
文献 [12]	2	3	3	3	4	5
文献 [13]	2	3	3	3	4	5
定理 1	3	3	3	4	4	5
定理 2	3	4	4	4	4	5

5 结 论

本文研究了具有区间时变时滞的不确定离散广义Markov跳变系统的鲁棒稳定性问题. 通过将Jensen不等式与一个新的定界不等式相结合, 对Lyapunov-Krasovskii泛函的前向差分中的有限和项进行了适当的定界, 得到了一个新的稳定性判据. 该判据中仅含有Lyapunov变量, 具有较小的计算负担. 进而, 基于凸组合方法得到了另一个新的稳定性判据, 所得判据引入了一些自由变量, 具有较小的保守性. 最后的数值算例表明了所提出的方法比文献中已有方法具有较小的保守性和较高的计算效率.

参考文献(References)

[1] Mariton M. Jump linear systems in automatic control[M]. New York: Dekker, 1990.

[2] Boukas E K, Liu Z. Robust H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(10): 1918-1924.

[3] Chen W, Guan Z, Yu P. Delay-dependent stability and $H\infty$ control of uncertain discrete-time Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. Systems and Control Letters, 2004, 52(5): 361-376.

[4] Boukas E K, Liu H. Delay-dependent stabilization of stochastic discrete-time systems with time-varying time-delay[C]. Proc of the American Control Conf. New York, 2007: 2448-2453.

[5] Wu Z, Zhou W. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain singular time-delay systems[J]. IET Control Theory and Appllications, 2007, 1(5): 1234-1241.

[6] Ma S, Cheng Z, Zhang C. Delay-dependent robust stability and stabilisation for uncertain discrete singular systems with time-varying delays[J]. IET Control Theory and Appllications, 2007, 1(4): 1086-1095.

[7] Du Z, Qiu Z, Zhang Q, et al. New delay-dependent robust stability of discrete singular systems with time-varying delay[C]. Proc of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing: IEEE Press, 2008: 6359-6364.

[8] Lam J, Shu Z, Xu S, et al. Robust H_∞ control of descriptor discrete-time Markovian jump systems[J]. Int J of Control, 2007, 80(3): 374-385.

[9] Ma S, Liu X, Zhang C. Delay-dependent stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump singular systems with time delay[J]. Anziam J, 2007, 49(1): 111-129.

[10] Ma S, Zhang C. Robust stability and H_∞ control for uncertain discrete Markovian jump singular systems with mode-dependent time-delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(5): 965-985.

[11] Ma S, Boukas E K. Robust H_∞ filtering for uncertain discrete Markov jump singular systems with mode-dependent time delay[J]. IET Control Theory and Appllications, 2009, 3(3): 351-361.

[12] Zhou W, Lu H, Duan C, et al. Delay-dependent robust control for singular discrete-time Markovian jump systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 20(10): 1112-1128.

[13] Ma S , Boukas E K, Chinniah Y. Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 20(5): 531-543.

[14] Park P, Ko J W. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(8): 1855-1858.

[15] Wu Y, Wu Y, Chen Y. Mean square exponential stability of uncertain stochastic neural networks with time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2009, 72(10/11/12): 2379-2384.

[16] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.

[17] Sun J, Liu G P, Chen J, Rees D. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2010, 46(2): 466-470.

(下转第678页)