

文章编号: 1001-0920(2011)07-1009-05

## 自由时间最优控制问题的一种控制向量参数化方法

李树荣, 张强, 雷阳, 张晓东

(中国石油大学(华东) 信息与控制工程学院, 山东 东营 257061)

**摘要:** 针对自由时间最优控制问题, 提出一种控制向量参数化(CVP)方法. 通过引入时间尺度因子, 将自由时间最优控制问题转化为固定时间问题, 并将终端时刻作为优化参数. 基于 CVP 方法, 最优控制问题被转化为一个非线性规划(NLP)问题. 建立目标和约束函数的 Hamiltonian 函数, 通过求解伴随方程获得目标和约束函数的梯度, 采用序列二次规划(SQP)方法获得问题的数值解. 对于控制有切换结构的优化问题, 给出了一种网格精细化策略, 以提高控制质量. 补料分批反应器最优控制问题的仿真实验验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 自由时间; 最优控制; 非线性规划; 序列二次规划; 补料分批反应器

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Control vector parametrization approach for free time optimal control problems

LI Shu-rong, ZHANG Qiang, LEI Yang, ZHANG Xiao-dong

(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum(East China), Dongying 257061, China.

Correspondent: ZHANG Qiang, E-mail: automatic\_zhangqiang@126.com)

**Abstract:** A control vector parameterization(CVP) based numerical approach is proposed for free time optimal control problems. By using a time-scaling factor, free time optimal control problem is converted into a fixed time one, and the final time is defined as an optimization parameter. Based on CVP method, the resulted optimal control problem is reformulated as a nonlinear programming(NLP) problem. By constructing the Hamiltonian functions of objective and constraint functions, the adjoint functions are solved to obtain the gradients of objective and constraint functions. The numerical solution is obtained by using the sequential quadratic programming(SQP) method. For the control switched optimal control problems, a mesh refinement strategy is presented to improve the optimal solution. A simulation on a fed-batch reactor optimal control problem shows the effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** free-time; optimal control; nonlinear programming; SQP; fed-batch reactor

### 1 引言

随着化学工业对产品质量和生产成本要求的提高, 过程的最优控制越来越受重视, 并在许多生产装置上得到应用. 自由时间最优控制作为一类重要的最优控制问题(OCP), 广泛存在于化学反应器的控制中. Luus 于 1978 年<sup>[1]</sup>提出的热解沥青的收益显然受到反应时间的影响. Luus 于 1993 年<sup>[2]</sup>指出, 决策物料的停留时间是提高补料分批反应器收益的重要因素, 且最优的停留时间很难获得. 因为化工动态模型存在非线性, 且大都含有状态和/或控制约束, 因此寻求一种高效的 OCP 数值解法是十分必要的. 对于自由时间 OCP 的数值解法, 常用的有以下 3 类: 迭代动态规

划(IDP), 智能算法和控制向量参数化(CVP)方法.

Bojkov 等人<sup>[3]</sup>提出了一种改进的迭代动态规划方法, 可以同步决策最优控制和最优的终止时间, 具有很好的全局性. 但是, 迭代动态规划存在计算量大的问题, 而且需要做一些先导性的实验以确定 IDP 的搜索参数. Raducan 等人<sup>[4]</sup>提出利用一种进化的遗传算法(GA)求解自由时间间歇反应器最优控制问题; Chen 等人<sup>[5]</sup>利用模糊优化方法实现了一种补料分批反应器的最优控制. 智能算法能够获得全局解, 但需要很长的计算时间.

与随机搜索迭代方向的 IDP 和智能算法不同, CVP 方法是一种确定性的优化方法, 基于梯度构造

收稿日期: 2010-04-01; 修回日期: 2010-06-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974039); 国家科技重大专项项目(2008ZX05011).

作者简介: 李树荣(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事最优控制理论与数值解法等研究; 张强(1986—), 男, 博士生, 从事最优控制理论与数值解法的研究.

迭代的搜索方向,因其收敛速度快,在最优控制的数值求解中得到了广泛应用. Chen<sup>[6]</sup>和 Huang<sup>[7]</sup>等人基于 CVP 方法考虑了状态约束情况下自由时间 OCP. Garcia<sup>[8]</sup>和 Hirmajer<sup>[9]</sup>等人将 CVP 作为一种标准求解自由时间最优控制的算法写入了各自开发的软件 NDOT 和 DOTcvsb 中. Arpornwichanop 等人<sup>[10]</sup>研究了补料分批反应器的最优控制问题,但未能实现控制变量与终端时刻的同时优化. 常规 CVP 方法的控制分段数是一定的,在求解自由时间最优控制时只能通过调节各控制参数作用时间来满足迭代过程中控制时间不断变化的要求. 但是,控制参数作用时间的变化使相邻迭代步之间的控制参数在时间上不能保持一一对应. 针对这一问题,最直观的解决方法是将自由时间 OCP 转化为一个固定时间 OCP.

本文基于 CVP 方法,探讨了自由时间最优控制问题的数值解法. 通过引入时间尺度变换因子,将自由时间优化问题转化为固定时间优化问题,并将终端时刻作为决策变量进行优化. 通过求解伴随方程的方法获得目标函数和约束函数对决策变量的精确梯度. 数值求解过程采用序列二次规划 (SQP) 方法,针对具有控制切换结构的优化问题,给出了一种网格精细化解决思想,以提高控制质量. 最后对一个酒精发酵补料分批反应器的自由时间最优控制问题进行了仿真,表明了本文方法的有效性.

## 2 自由时间最优控制策略

### 2.1 问题表述

考虑如下动态系统自由时间最优控制问题:

$$\begin{aligned} \min_{u, t_f} J &= \phi(t_f) + \int_0^{t_f} F(x, u, t) dt; \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) &= f(x, u, t), x(0) = x_0, \\ u_l &\leq u(t) \leq u_u, \\ g(x(t_f)) &\leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $x \in R^{n_x}$  为状态向量,  $u \in R^{n_u}$  为控制向量,  $g$  为终端时刻状态的非线性约束函数,  $u_u$  和  $u_l$  分别为控制的上下限约束,  $t_f$  为自由终端时刻.

定义 Hamiltonian 函数

$$H(x, \lambda, u, t) = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t). \quad (2)$$

基于 Pontryagin 极大值原理, 问题 (1) 取得最优的一阶必要条件可表述为

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), x(0) = x_0; \quad (3a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\lambda(t_f) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu^T \frac{\partial g}{\partial x} \right) \Big|_{t_f}; \quad (3b)$$

$$H(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}, t) \leq H(\hat{x}, \hat{\lambda}, u, t); \quad (3c)$$

$$\mu^T g(x(t_f)) = 0; \quad (3d)$$

$$u_l \leq u(t) \leq u_u. \quad (3e)$$

其中:  $\lambda$  为伴随向量,  $\mu$  为终端时刻不等式约束的拉格朗日乘子, 且满足

$$\begin{cases} \mu = 0, & g(x(t_f)) < 0; \\ \mu > 0, & g(x(t_f)) = 0. \end{cases}$$

对于自由时间最优控制问题, 除上述关系外, 还需满足

$$\left( H + \frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \mu^T g}{\partial t_f} \right) \Big|_{t_f} = 0. \quad (3f)$$

式 (3a)~式 (3f) 所述是一个两点边值问题, 直接根据一阶必要条件求解十分困难.

控制向量参数化是利用分段函数近似控制作用, 进而将最优控制问题转化为非线性规划 (NLP) 问题进行求解的方法. 通常采用的近似函数为 B-spline 函数, 其数学表述如下:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i} \hat{u}_{i,j} \psi_j^{(c)}, \quad (4)$$

式中  $N_i$  为第  $i$  个控制变量  $u_i(t)$  离散化后参数的个数. 通过选择 B-spline 函数  $\psi^{(c)}$ , 可以得到不同的近似阶数.  $c=1$  为分段常数近似,  $c=2$  为分段线性近似.

在控制向量离散化时, 通常先定义控制节点数  $N$  和相应的控制节点

$$t_0 = T_1 < T_2 < \dots < T_N < T_{N+1} = t_f. \quad (5)$$

简化起见, 假定节点间是等距的. 在每次迭代后, 通过求解

$$T_i = t_0 + (i-1) \frac{t_f - t_0}{N}, \quad (6)$$

可获得当前节点的位置. 智能算法的搜索是随机的, 对方向的精确性要求不高, 因而可以采用这种参数化方法<sup>[4-5]</sup>. 但将其用在基于梯度的 CVP 方法中是不严谨的, 相邻迭代时间节点的不一致导致上一迭代步获得的搜索方向可能不是下一步期望的方向. 将自由时间 OCP 变为固定时间 OCP 是最直观的解决方法.

### 2.2 问题重构

要实现自由时间 OCP 到固定时间 OCP 的转化, 可引入一个新的时间变量  $\tau$ , 满足

$$\tau = \frac{1}{\alpha t_f} t. \quad (7)$$

由  $t \in [0, t_f]$ , 有  $\tau \in [0, 1/\alpha]$ , 其中  $\alpha$  为已知常数.

引入 Lagrangian 乘子, 将原最优控制问题 (1) 转化为如下仅含控制约束的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{u, t_f} J^* &= \\ \phi(t_f) &+ \mu^T g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} [F + \lambda^T (f - \dot{x})] dt, \\ \text{s.t. } u_l &\leq u(t) \leq u_u. \end{aligned} \quad (8)$$

利用定积分换元法,对问题(8)的增广目标函数进行转化,得到

$$J^* = \phi(t_f) + \mu^T g(x(t_f)) + \int_0^{1/\alpha} \alpha t_f [F + \lambda^T (f - \dot{x})] d\tau. \quad (9)$$

定义

$$F^*(x, u, t_f, \tau) = \alpha t_f F(x, u, t),$$

$$f^*(x, u, t_f, \tau) = \alpha t_f f(x, u, t).$$

将  $t_f$  作为优化变量,原自由时间最优控制问题(1)便转化为如下固定时间最优控制问题:

$$\min_{u, t_f} J = \phi\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \int_0^{1/\alpha} F^*(x, u, t_f, \tau) d\tau;$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(\tau) = f^*(x, u, t_f, \tau), x(0) = x_0;$$

$$u_l \leq u(\tau) \leq u_u;$$

$$g(x(1/\alpha)) \leq 0, t_f \geq 0. \quad (10)$$

通过如上变量代换,  $t$  时间域的自由时间 OCP 便转化为在  $\tau$  时间域上时间区间  $[0, 1/\alpha]$  内的固定时间 OCP.

### 2.3 梯度求解

基于控制向量参数化方法,最优控制问题(10)被重新表述为一个 NLP 问题.通常,求解 NLP 问题时梯度由有限差分产生,但计算精度不高,导致迭代收敛缓慢,而且在优化变量个数较多时,计算量将非常大.本文基于伴随的方法求解目标函数和约束的梯度,利用最优控制的一阶必要条件,通过正向求解系统方程和反向求解伴随方程获得梯度的精确值,而且计算量对状态和控制变量的个数不敏感.

不考虑末端状态不等式约束对系统的影响时,求解目标函数对控制作用的梯度.定义目标函数的 Hamiltonian 函数

$$H = F^* + \lambda^T f^*. \quad (11)$$

基于极大值原理,目标函数的伴随方程可表述为

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left(\frac{\partial F^*}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f^*}{\partial x}\right),$$

$$\lambda(1/\alpha) = \frac{\partial \phi(1/\alpha)}{\partial x}. \quad (12)$$

此时目标函数的一阶变分表述为

$$\delta J = \int_0^{1/\alpha} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f^*}{\partial u}\right) \delta u + \left(\frac{\partial F^*}{\partial t_f} + \lambda^T \frac{\partial f^*}{\partial t_f}\right) \delta t_f d\tau. \quad (13)$$

采用分段常数近似控制,即式  $u_i(\tau) = \sum_{j=1}^{N_i} \hat{u}_{i,j} \psi_j^{(c)}$  中

$$\psi_j^{(1)} = \begin{cases} 1, & T_j \leq t \leq T_{j+1}; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (14)$$

控制参数  $\hat{u}_{i,j}$  为与时间无关的变量,则目标函数

$J$  对控制参数  $\hat{u}_{i,j}$  的梯度可表述为

$$\frac{dJ}{d\hat{u}_{i,j}} = \int_{T_j}^{T_{j+1}} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_i} + \lambda^T \frac{\partial f^*}{\partial u_i}\right) d\tau. \quad (15)$$

目标函数  $J$  对  $t_f$  的梯度可表述为

$$\frac{dJ}{dt_f} = \int_0^{1/\alpha} \alpha (F + \lambda^T f) d\tau. \quad (16)$$

末端状态约束函数也受系统状态方程的约束,因而末端状态约束函数可写成如下增广的形式:

$$g\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^* = g\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) + \int_0^{1/\alpha} (F^* + \gamma^T f^*) d\tau. \quad (17)$$

定义约束函数的 Hamiltonian 函数

$$\Gamma = F^* + \gamma^T f^*, \quad (18)$$

则约束函数的伴随方程为

$$\dot{\gamma}(\tau) = -\left(\frac{\partial F^*}{\partial x} + \gamma^T \frac{\partial f^*}{\partial x}\right),$$

$$\gamma(1/\alpha) = \frac{\partial g(x(1/\alpha))}{\partial x}. \quad (19)$$

与式(15), (16)的求解思路相同,约束函数对控制参数  $\hat{u}_{i,j}$  的梯度可表述为

$$\frac{dg(x(1/\alpha))}{d\hat{u}_{i,j}} = \int_{T_j}^{T_{j+1}} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_i} + \gamma^T \frac{\partial f^*}{\partial u_i}\right) d\tau. \quad (20)$$

约束函数  $t_f$  的梯度表述为

$$\frac{dg(x(1/\alpha))}{dt_f} = \int_0^{1/\alpha} \alpha (F + \gamma^T f) d\tau. \quad (21)$$

### 3 优化算法

基于 CVP 方法,本文对控制向量采用分段常数参数化处理,状态变量采用隐式求解状态方程获得,因而得到的 NLP 问题不显含状态,表述为

$$\min_{\hat{u}, t_f} J(\hat{u}, t_f);$$

$$\text{s.t. } g(\hat{u}, t_f) \leq 0, u_l \leq \hat{u} \leq u_u, t_f \geq 0. \quad (22)$$

式中:  $J$  和  $g$  分别为目标函数和不等式约束函数;  $\hat{u}$  为控制参数向量,具体表述为

$$\hat{u} = [\hat{u}_{1,1}, \hat{u}_{1,2}, \dots, \hat{u}_{n_u, N_{n_u}-1}, \hat{u}_{n_u, N_{n_u}}].$$

问题(22)是非线性约束和界约束的 NLP 问题. SQP 方法为常用的约束优化方法,由于采用二次逼近,能有效求解非线性优化问题.在处理非线性约束时不需要构造罚函数因子,并且具有局部的二次收敛速度.因此,本文采用 SQP 求解式(22)的 NLP 问题.

很多化工过程最优控制轨迹具有切换结构,在多数情况下固定网格的 CVP 不能很好地刻画控制轨迹,在迭代运算过程中需适时进行人工干预.因此,细分控制网格,突出控制结构十分必要.

细分的依据是一阶最优性推导得到的重要性质,即如果增广系统的 Hamiltonian 不显含时间  $t$ ,则在最优控制轨线上的  $H$  函数为常数.对于自由时间最优控制问题,其  $H$  函数的值可由式(3f)得到,即

$$H = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} - \frac{\partial \mu^T g}{\partial t_f}. \quad (23)$$

因而在网格划分不合适时,实际轨线与最优轨线将存在较大偏差,  $H$  函数值在偏离点附近将增大. 基于此便可以恰当地进行网格划分, 提高数值结果质量.

#### 算法 1 算法策略.

1) 初始化状态  $x(0)$ , 控制  $u(0)$ , 迭代精度  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ . 初始迭代  $k=1$ .

2) 计算第  $k$  步目标函数和终端约束函数值及各自对决策变量的梯度.

3) 求解第  $k$  步 QP 子问题, 生成新的迭代步  $\hat{u}_{k+1}$ . 若  $\|J(\hat{u}_{k+1}) - J(\hat{u}_k)\| < \varepsilon_1$ , 则转步骤 4). 若  $\|J(\hat{u}_{k+1}) - J(\hat{u}_k)\| < \varepsilon_2$ , 则获得最优解, 迭代结束; 否则,  $k=k+1$ , 返回步骤 2) 继续求解.

4) 暂停迭代, 对控制网格局部细分, 返回步骤 2).

## 4 问题举例

Bojkov 等人<sup>[3]</sup>研究了一种酒精发酵补料分批反应器模型的自由时间最优控制问题. 优化策略是通过控制进料速率和反应时间, 使酒精的产量达到最大, 具体描述如下:

$$\begin{aligned} \max_{u, t_f} J &= x_3(t_f)x_4(t_f); \\ \text{s.t. } \dot{x}_1 &= \mu x_1 - \frac{x_1}{x_4}u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{Y}x_1 + \frac{s_0 - x_2}{x_4}u, \\ \dot{x}_3 &= \eta x_1 - \frac{x_3}{x_4}u, \\ \dot{x}_4 &= u, \\ \mu &= \frac{\mu_0 x_2}{(1 + x_3/K_p)(K_s + x_2)}, \\ \eta &= \frac{x_2}{(1 + x_3/K'_p)(K'_s + x_2)}. \end{aligned} \quad (24)$$

其中:  $x_1, x_2, x_3, x_4$  分别为生物量 (Biomass, g/L), 基质 (Substrate, g/L), 酒精浓度 (Ethanol, g/L) 和溶液体积 (Volume, L);  $\mu$  和  $\eta$  分别为比生长率 ( $\text{h}^{-1}$ ) 和比产率 ( $\text{h}^{-1}$ ),  $Y$  为收率系数,  $Y=0.1$ ;  $s_0$  为基质进料浓度 (g/L). 模型参数见表 1.

表 1 补料分批反应器模型参数

模型参数	模型参数
$K_p = 16.0/(\text{g/L})$	$s_0 = 150/(\text{g/L})$
$K_s = 0.22/(\text{g/L})$	$\mu_0 = 0.408/(\text{h}^{-1})$
$K'_p = 71.5/(\text{g/L})$	$\eta_0 = 1/(\text{h}^{-1})$
$K'_s = 0.44/(\text{g/L})$	

初始状态值为  $x(0) = [1 \ 150 \ 0 \ 10]^T$ , 进料速率的上下限约束为  $0 \leq u \leq 12 \text{ g/L}$ , 反应终止时, 溶液体积需满足  $0 \leq x_4(t_f) \leq 200 \text{ L}$ .

本文考虑分别采用常规 CVP 方法和本文改进的 CVP 方法求解此问题. 改进 CVP 方法中, 时间尺度参

数选为  $\alpha = 0.02$ , 问题 (24) 经时间尺度变换后变为  $\tau \in [0, 50]$  上的固定时间优化问题. 控制量首先采用等长分段, 共分为 10 段, 状态方程的仿真采用四阶龙格库塔法, 步长为 0.02. 初始控制  $u(0) = 3$ , 末端时刻初始值设为  $t_f(0) = 1 \text{ h}$ . 采用 SQP 方法进行数值求解, 经过 54 次迭代, 性能指标达到最优值的 99%, 分别为  $J = 20671$ ,  $t_f = 60.621 \text{ h}$ , 暂停迭代.

对图 1 和图 2 进行分析, 合并起始的 2 个网格, 对后续网格加密, 然后重启继续优化, 经过 35 次迭代后, 最终达到最优值  $J = 20842$ , 对应的最优终端时刻为  $t_f = 62.027 \text{ h}$ . 此结果优于 Bojkov 等人<sup>[3]</sup>得到的结果 ( $J = 20838$ ,  $t_f = 61.3 \text{ h}$ ) 和 Banga 等人<sup>[11]</sup>得到的结果 ( $J = 20839$ ,  $t_f = 61.17 \text{ h}$ ).

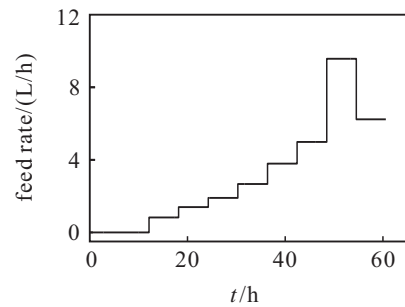


图 1 迭代暂停时控制轨迹

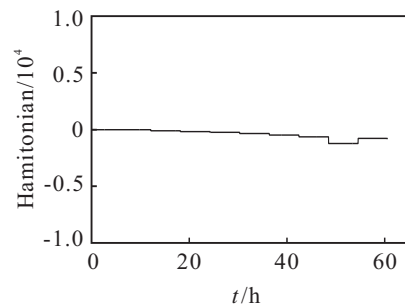


图 2 迭代暂停时 Hamiltonian 函数

常规 CVP 方法无法采用伴随方法求解梯度, 因而梯度通常由有限差分近似产生; 同时由式 (16) 可以看出, 终端时刻对目标函数值有很大贡献. 因此, 为保证稳定性, 常规 CVP 方法对系统的仿真步长有更高的要求. Banga 等人<sup>[11]</sup>指出, 基于梯度的 CVP 方法求解此补料分批反应器最优控制问题时存在收敛

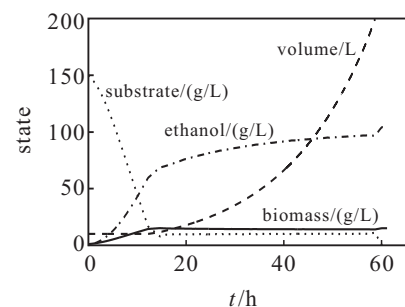


图 3 最优状态轨迹

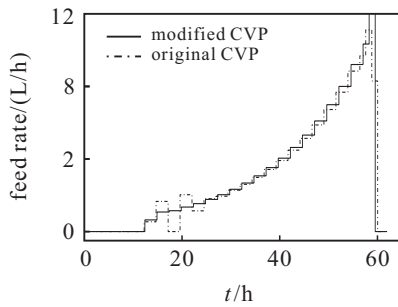


图4 最优控制轨迹

域小, 算法容易发散的问题. 鉴于以上问题, 这里以图1所示的控制作为常规CVP优化的初值, 仿真步长为0.005, 采用相同的网格精细策略, 经过94次迭代后, 最终达到最优值  $J = 20817$ , 对应的最优终端时刻为  $t_f = 61.3$  h.

## 5 结论

本文基于控制向量参数化方法, 实现了自由时间最优控制问题的数值解法. 利用时间尺度变换实现自由时间到固定时间最优控制问题的转化, 利用伴随的方法推导出目标函数和约束函数对控制和终端时刻的梯度表达式. 补料分批反应器的仿真实验表明, 本文方法在求解含终端状态约束的自由时间最优控制问题上具有令人满意的数值精度和收敛速度. 但是, 很多化工过程最优控制轨迹具有切换结构, 固定网格的CVP不能精确地指示切换时间, 必须在优化过程中人为地细分网格, 以提高优化精度. 因此, 在本文算法基础上, 引入自适应网格精细化思想, 在保证合理计算规模的前提下, 能自适应地精细化网格, 提高优化精度是今后需要深入研究的内容.

## 参考文献(References)

- [1] Luus R. On the optimization of oil shale pyrolysis[J]. *Chemical Engineering Science*, 1978, 33(10): 1403-1404.
- [2] Luus R. Application of dynamic programming to differential algebraic process systems[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1993, 17(4): 373-377.
- [3] Bojkov B, Luus R. Optimal control of nonlinear systems with unspecified final times[J]. *Chemical Engineering Science*, 1996, 51(6): 905-919.
- [4] Raducan O, Woinaroschy A, Lavric V. Free-time optimal control of a batch distillation column through genetic algorithms[J]. *Revista DE Chimie*, 2005, 56(11): 1114-1119.
- [5] Chen M L, Wang F S. Optimization of a fed-batch simultaneous saccharification and cofermentation process from lignocellulose to ethanol[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2010, 49(12): 5775-5785.
- [6] Chen T W C, Vassiliadis V S. Inequality path constraints in optimal control: A finite iteration[var epsilon]-convergent scheme based on pointwise discretization[J]. *J of Process Control*, 2005, 15(3): 353-362.
- [7] Huang C H, Tseng C H. A convenient solver for solving optimal control problems[J]. *J of the Chinese Institute of Engineers*, 2005, 28(4): 727-733.
- [8] Garcia M G, Balsa-Canto E, Alonso A A, et al. A software toolbox for the dynamic optimization of nonlinear processes[C]. *Computer Aided Chemical Engineering*. Spain: Elsevier, 2005: 121-126.
- [9] Hirmajer T, Balsa-Canto E, Banga J R, et al. A software toolbox for dynamic optimization in systems biology[J]. *BMC Bioinformatics*, 2009, 10(1): 199.
- [10] Arpornwihanop A, Shomchoam N. Studies on optimal control approach in a fed-batch fermentation[J]. *Korean J of Chemical Engineering*, 2007, 24(1): 11-15.
- [11] Banga J R, Balsa-Canto E, Moles C G, et al. Dynamic optimization of bioprocesses: Efficient and robust numerical strategies[J]. *J of Biotechnology*, 2005, 117(4): 407-419.
- [12] Xin Kaneda M. Swing-up control for a 3-DOF gymnastic robot with passive first joint: Design and analysis[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 2007, 23(6): 1277-1284.
- [13] Albahkali T, Mukherjee R, Das T. Swing-up control of the Pendubot: An impulse-momentum approach[J]. *IEEE Trans on Robotics*, 2009, 25(4): 975-982.
- [14] 张华, 李祖枢, 古建功, 等. 连杆单杠体操机器人的仿人智能运动控制[J]. *重庆大学学报: 自然科学版*, 2007, 30(3): 74-78.
- [15] (Zhang H, Li Z S, Gu J G, et al. Human simulated intelligence motion control for three-link acrobot on horizontal bar[J]. *J of Chongqing University: Natural Science Edition*, 2007, 30(3): 74-78.)
- [15] Lai X Z, Yang S X, She J H, et al. Singularity avoidance for acrobots based on fuzzy-control strategy[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2009, 57(2): 202-211.

(上接第1008页)