文章编号: 1001-0920 (2011) 07-1026-05

改进的时变时滞中立型系统的绝对稳定性判据

刘健辰[1], 章 兢[1], 张红强[2], 何 敏[1]

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院，长沙 410082；2. 湖南科技大学 信息与电气工程学院，湖南 湘潭 411201)

摘 要: 研究具有时变时滞和扇区有界非线性的中立型系统的绝对稳定性问题. 根据时变时滞分段分析思想, 构造一个新的Lyapunov-Krasovskii泛函, 得到了一些保守性更小的基于线性矩阵不等式的时滞相关绝对稳定性判据. 采用凸组合方法, 可以避免忽略Lyapunov-Krasovskii泛函微分中的有用项. 数值算例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 绝对稳定性；中立型系统；时变时滞；时滞相关；线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Improved absolute stability criteria for neutral systems with time-varying delay

LIU Jian-chen[1], *ZHANG Jing*[1], *ZHANG Hong-qiang*[2], *HE Min*[1]

(1. College of Electrical and Information Engineering，Hu'nan University，Changsha 410082，China；2. School of Information and Electrical Engineering，Hu'nan University of Science and Technology，Xiangtan 411201，China. Correspondent：LIU Jian-chen，E-mail：liujian4587@sina.com)

Abstract：This paper investigates the problem of the absolute stability of neutral systems with a time-varying delay and sector-bounded nonlinearity. By constructing a novel Lyapunov-Krasovskii functional based on the piecewise analysis method for the time-varying delay systems, less conservative delay-dependent stability criteria are obtained and formulated in terms of linear matrix inequalities without ignoring any useful terms in the derivative of a Lyapunov-Krasovskii functional by using the convex combination method. Numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words：absolute stability；neutral system；time-varying delay；delay-dependent；linear matrix inequality

1 引 言

1944 年, Lurie 和 Postnikov 提出了绝对稳定性的概念. 绝对稳定性理论被认为是第一个不确定非线性系统的研究方法, 并得到了相关学者的广泛关注[1]. 在许多实际系统中常常会遇到时滞问题, 时滞会使系统性能下降, 甚至导致系统不稳定, 所以时滞系统稳定性的研究一直是一个重要的研究课题[2]. 对于滞后型时滞系统的绝对稳定性问题, 已有的研究成果可分为两类, 即时滞无关型[3-4]和时滞相关型[5-13]. 时滞相关型判据由于利用了系统时滞信息, 一般而言比时滞无关型判据的保守性小. 对于定常时滞的滞后型系统, 何勇等人分别利用自由权矩阵方法[5]和积分不等式方法[6]研究了绝对稳定性问题, 高金凤等人则对其进行了进一步的改进[7]. 对于时变时滞的滞后型系统, 韩清龙等人利用积分不等式方法研究了绝对稳定性问题[8], 吴敏等人则进一步通过保留Lyapunov-Krasovskii泛函微分中的一些有用项, 得到了保守性更小的结果[9]. 文献 [10] 采用不同于 [9] 的方法也改进了 [8] 的结果. 但 [8-10] 均采用了相似的Lyapunov-Krasovskii泛函, 所得结果仍有改进的余地. 相对而言, 对中立型时滞系统的绝对稳定性问题的研究较少, 且已有研究都是针对定常时滞系统进行的[11-14], 目前尚未见到对时变时滞系统绝对稳定性的研究报道.

本文研究时变时滞的中立型系统的时滞相关绝对稳定性问题. 为了改进文献 [8-10] 中的结果, 借鉴时变时滞分段分析[15]的基本思想构造新的Lyapunov-Krasovskii泛函, 采用凸组合的方法[16]对Lyapunov-Krasovskii泛函微分上界进行更精确的估计, 以得到一个保守性更小的绝对稳定性判据和鲁棒稳定性判据. 最后通过数值算例验证了所提出方法的有效性.

收稿日期: 2010-04-08；**修回日期:** 2010-06-30.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60634020).

作者简介: 刘健辰(1978−), 男, 博士生, 从事时滞系统鲁棒控制、智能控制等研究；章兢(1957−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统计算机控制等研究.

2 问题表述

考虑一类具有扇区有界非线性的不确定中立型时滞系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\\(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)x(t-d(t))+\\(C+\Delta C)\dot{x}(t-\tau)+D\omega(t),\\z(t)=Mx(t)+Nx(t-d(t)),\\\omega(t)=-\phi(t,z(t)),\\x(t)=\varphi(t),\ t\in[h,0].\end{cases}\tag{1}$$

式中: $x(t)\in R^n$, $\omega(t)\in R^m$ 和 $z(t)\in R^m$ 分别为状态、输入和输出向量; $\varphi(t)$ 为初始状态函数; $\tau>0$ 为定常的中立时滞; $d(t)$ 为时变的离散时滞, 满足 $0\leqslant d(t)\leqslant h$, $\dot{d}(t)\leqslant\mu$, 其中 $h\geqslant0$ 和 $\mu\geqslant0$ 为常数; A, B, C, D, M 和 N 为已知实矩阵; ΔA, ΔB 和 ΔC 描述系统参数不确定性, 满足

$$[\Delta A\quad \Delta B\quad \Delta C]=HF(t)[E_1\quad E_2\quad E_3].\tag{2}$$

式中: H 和 $E_i(i=1,2,3)$ 为已知定常实矩阵; $F(t)$ 为时变矩阵, 且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$.

$\phi(t,z(t))$ 为分段连续的非线性函数, 对 $z(t)$ 是全局 Lipschitz 的, 且满足 $\phi(t,0)$ 以及如下扇区条件:

$$[\phi(t,z(t))-K_1z(t)]^{\mathrm{T}}[\phi(t,z(t))-K_2z(t)]\leqslant0.\tag{3}$$

其中: K_1 和 K_2 为已知的定常实矩阵, 且满足 $K_2-K_1>0$, 一般称 $\phi(t,z(t))$ 属于扇区 $[K_1,K_2]$.

中立型时滞系统的绝对稳定性定义可参见文献[14]. 这里引入中立型时滞系统鲁棒稳定的定义:

定义 1 如果对于满足式(3)的任意非线性函数和任意容许不确定性(2), 系统(1)均是全局渐近稳定的, 则称其鲁棒稳定.

在得出本文主要结果之前, 首先给出如下引理:

引理 1 对于 $h_1\leqslant d(t)\leqslant h_2$ 和适当维数的矩阵 $R>0$, X,Y 和向量 $\zeta(t)$, 有

$$\begin{aligned}&-\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&2\zeta^{\mathrm{T}}(t)X[x(t-h_1)-x(t-d(t))]+\\&2\zeta^{\mathrm{T}}(t)Y[x(t-d(t))-x(t-h_2)]+\\&(d(t)-h_1)\zeta^{\mathrm{T}}(t)XR^{-1}X^{\mathrm{T}}\zeta(t)+\\&(h_2-d(t))\zeta^{\mathrm{T}}(t)YR^{-1}Y^{\mathrm{T}}\zeta(t).\end{aligned}\tag{4}$$

证明 由 Schur 补, 有

$$\begin{bmatrix}R&X^{\mathrm{T}}\\X&XR^{-1}X^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\geqslant0,\ \begin{bmatrix}R&Y^{\mathrm{T}}\\Y&YR^{-1}Y^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\geqslant0.$$

故有

$$\int_{t-d(t)}^{t-h_1}\begin{bmatrix}\dot{x}(s)\\\xi(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R&X^{\mathrm{T}}\\X&XR^{-1}X^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}(s)\\\xi(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}s+$$
$$\int_{t-h_2}^{t-d(t)}\begin{bmatrix}\dot{x}(s)\\\xi(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R&Y^{\mathrm{T}}\\Y&YR^{-1}Y^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}(s)\\\xi(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\geqslant0.\tag{5}$$

由此, 引理 1 得证. □

引理 2[17] 给定适当维数的矩阵 $Z^{\mathrm{T}}=Z,E,\varDelta$ 和 F, 且 $\varDelta$ 满足 $\varDelta^{\mathrm{T}}\varDelta\leqslant I$,则 $Z+E\varDelta F+F^{\mathrm{T}}\varDelta^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}<0$ 成立的充要条件是存在一个正数 $\varepsilon>0$ 使得 $Z+\varepsilon EE^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F<0$ 成立.

下文中记

$$\begin{aligned}&\rho_1=h/2,\ \rho_2=\tau/2,\\&\xi(t)=\mathrm{col}\{x(t),x(t-d(t)),x(t-\rho_1),x(t-h),\\&\qquad x(t-\rho_2),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\omega(t)\},\\&\mathrm{sym}\{A\}=A+A^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$e_i(i=1,2,\cdots,8)$ 为块元矩阵, 如

$$e_2=[0\quad I\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0].$$

3 主要结果

首先, 不计系统(1)中的不确定性, 考虑如下标称系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-d(t))+\\\qquad C\dot{x}(t-\tau)+D\omega(t),\\z(t)=Mx(t)+Nx(t-d(t)),\\\omega(t)=-\phi(t,z(t)),\\x(t)=\varphi(t),\ t\in[h,0].\end{cases}\tag{6}$$

其中非线性函数 $\phi(t,z(t))$ 属于扇区 $[0,K]$, 此时有

$$\phi^{\mathrm{T}}(t,z(t))[\phi(t,z(t))-Kz(t)]\leqslant0.\tag{7}$$

为了保证系统(6)的解的存在性和唯一性, 需作如下假设:

假设 1 系统(6)中矩阵 C 的所有特征值都在单位圆内, 即 $\|C\|<1$.

定理 1 如果系统(6)满足假设 1, 且存在矩阵 $P>0$, $Q_1>0$, $\begin{bmatrix}Q_2&Q_3\\Q_3^{\mathrm{T}}&Q_4\end{bmatrix}>0$, $\begin{bmatrix}Q_5&Q_6\\Q_6^{\mathrm{T}}&Q_7\end{bmatrix}>0$, $Q_8>0$, $Z_1>0$, $Z_2>0$, $Z_3>0$, X,Y,T 和 S 及标量 $\varepsilon>0$ 使得式(8)成立,则对于属于 $[0,K]$ 的非线性函数 $\phi(t,z(t))$, 系统(6)是绝对稳定的.

$$\begin{bmatrix}\varXi+\varPsi_i&\varGamma^{\mathrm{T}}U&\varPhi_{ij}\\ *&-U&0\\ *&*&\varSigma_i\end{bmatrix}<0,\ i,j=1,2.\tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varXi=\\&\mathrm{sym}\{e_1^{\mathrm{T}}P\varGamma\}+e_1^{\mathrm{T}}Q_1e_1-(1-\mu)e_2^{\mathrm{T}}Q_1e_2+\\&\begin{bmatrix}e_1\\e_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}Q_2&Q_3\\Q_3^{\mathrm{T}}&Q_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\e_3\end{bmatrix}-\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \\ Q_3^{\mathrm{T}} & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_6^{\mathrm{T}} & Q_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_5 \end{bmatrix} -$$
$$\begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_6^{\mathrm{T}} & Q_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} -$$
$$e_7^{\mathrm{T}} Q_8 e_7 - [e_1 - e_5]^{\mathrm{T}} Z_3 [e_1 - e_5] - 2\varepsilon e_8^{\mathrm{T}} e_8 -$$
$$\mathrm{sym}\{\varepsilon e_8^{\mathrm{T}} (KMe_1 + KNe_2)\},$$
$$\varPsi_1 = \mathrm{sym}\{[X \quad Y - X \quad -Y \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\} - [e_3 - e_4]^{\mathrm{T}} Z_2 [e_3 - e_4],$$
$$\varPsi_2 = \mathrm{sym}\{[0 \quad S - T \quad T \quad -S \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\} - [e_1 - e_3]^{\mathrm{T}} Z_1 [e_1 - e_3],$$
$$\varGamma = [A \quad B \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad C \quad D],$$
$$U = Q_8 + \rho_1^2 Z_1 + \rho_1^2 Z_2 + \rho_2^2 Z_3,$$
$$\varPhi_{11} = \rho_1 Y,\ \varPhi_{12} = \rho_1 X,\ \varPhi_{21} = \rho_1 S,$$
$$\varPhi_{22} = \rho_1 T,\ \varSigma_1 = -Z_2,\ \varSigma_2 = -Z_1.$$

证明 考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(x_t) =$$
$$x^{\mathrm{T}}(t) P x(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) Q_1 x(s) \mathrm{d}s +$$
$$\int_{t-\rho_1}^{t} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \\ Q_3^{\mathrm{T}} & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_1) \end{bmatrix} \mathrm{d}s +$$
$$\int_{t-\rho_2}^{t} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_2) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_6^{\mathrm{T}} & Q_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_2) \end{bmatrix} \mathrm{d}s +$$
$$\int_{t-\tau}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Q_8 \dot{x}(s) \mathrm{d}s +$$
$$\rho_1 \int_{-\rho_1}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_1 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\theta +$$
$$\rho_1 \int_{-h}^{-\rho_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\theta +$$
$$\rho_2 \int_{-\rho_2}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_3 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

沿系统 (6), 对 $V(x_t)$ 取微分, 有

$$\dot{V}(x_t) \leqslant$$
$$2x^{\mathrm{T}}(t) P \dot{x}(t) + x^{\mathrm{T}}(t) Q_1 x(t) -$$
$$(1-\mu) x^{\mathrm{T}}(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t)) +$$
$$\begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \\ Q_3^{\mathrm{T}} & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_1) \end{bmatrix} -$$
$$\begin{bmatrix} x(s-\rho_1) \\ x(s-h) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \\ Q_3^{\mathrm{T}} & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s-\rho_1) \\ x(s-h) \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_2) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_6^{\mathrm{T}} & Q_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\rho_2) \end{bmatrix} -$$
$$\begin{bmatrix} x(s-\rho_2) \\ x(s-\tau) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_6^{\mathrm{T}} & Q_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s-\rho_2) \\ x(s-\tau) \end{bmatrix} -$$
$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau) Q_8 \dot{x}(t-\tau) + \dot{x}^{\mathrm{T}}(t) U \dot{x}(t) -$$
$$\rho_1 \int_{t-\rho_1}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_1 \dot{x}(s) \mathrm{d}s -$$
$$\rho_1 \int_{t-h}^{t-\rho_1} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s) \mathrm{d}s -$$
$$\rho_2 \int_{t-\rho_2}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_3 \dot{x}(s) \mathrm{d}s. \tag{10}$$

由 Jensen 不等式[18], 有

$$-\rho_2 \int_{t-\rho_2}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_3 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$-\xi^{\mathrm{T}}(t) [e_1^{\mathrm{T}} - e_5^{\mathrm{T}}] Z_3 [e_1 - e_5] \xi(t). \tag{11}$$

下面根据 $d(t)$ 的大小, 分 2 种情况进行讨论:

1) 当 $0 \leqslant d(t) \leqslant \rho_1$ 时, 有

$$-\rho_1 \int_{t-h}^{t-\rho_1} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$-\xi^{\mathrm{T}}(t) [e_3^{\mathrm{T}} - e_4^{\mathrm{T}}] Z_2 [e_3 - e_4] \xi(t). \tag{12}$$

而由引理 2, 有

$$-\rho_1 \int_{t-\rho_1}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_1 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$2\xi^{\mathrm{T}}(t) \rho_1 X [x(t) - x(t - d(t))] +$$
$$2\xi^{\mathrm{T}}(t) \rho_1 Y [x(t - d(t)) - x(t - \rho_1)] +$$
$$d(t) \rho_1 \xi^{\mathrm{T}}(t) X Z_1^{-1} X^{\mathrm{T}} \xi(t) +$$
$$(\rho_1 - d(t)) \rho_1 \xi^{\mathrm{T}}(t) Y Z_1^{-1} Y^{\mathrm{T}} \xi(t). \tag{13}$$

又由式 (7), 有

$$-2\omega^{\mathrm{T}}(t) [\omega(t) + K(Mx(t) + Nx(t - d(t)))] \geqslant 0. \tag{14}$$

将式 (10) ∼ (14) 代入 (9), 并根据 S-procedure[19], 整理可得

$$\dot{V}(x_t) \leqslant$$
$$\xi^{\mathrm{T}}(t) [\varXi + \varPsi_1 + \varGamma^{\mathrm{T}} U^{-1} \varGamma + d(t) \rho_1 X Z_1^{-1} X^{\mathrm{T}} +$$
$$(\rho_1 - d(t)) \rho_1 Y Z_1^{-1} Y^{\mathrm{T}}] \xi(t). \tag{15}$$

2) 当 $\rho_1 \leqslant d(t) \leqslant h$ 时, 有

$$-\rho_1 \int_{t-\rho_1}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_1 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$-\xi^{\mathrm{T}}(t) [e_1^{\mathrm{T}} - e_3^{\mathrm{T}}] Z_1 [e_1 - e_3] \xi(t), \tag{16}$$
$$-\rho_1 \int_{t-h}^{t-\rho_1} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$2\xi^{\mathrm{T}}(t) \rho_1 T [x(t - \rho_1) - x(t - d(t))] +$$
$$2\xi^{\mathrm{T}}(t) \rho_1 S [x(t - d(t)) - x(t - h)] +$$
$$(d(t) - \rho_1) \rho_1 \xi^{\mathrm{T}}(t) T Z_2^{-1} T^{\mathrm{T}} \xi(t) +$$
$$(h - d(t)) \rho_1 \xi^{\mathrm{T}}(t) S Z_2^{-1} S^{\mathrm{T}} \xi(t). \tag{17}$$

将式 (11), (14), (16) 和 (17) 代入式 (10), 并根据 S-procedure, 整理可得

$$\dot{V}(x_t) \leqslant$$

$$\xi^{\rm T}(t)[\varXi+\varPsi_2+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+(d(t)-\rho_1)\rho_1 TZ_2^{-1}T^{\rm T}+(h-d(t))\rho_1 SZ_2^{-1}S^{\rm T}]\xi(t).\qquad(18)$$

这样, 如果

$$\varXi+\varPsi_1+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+d(t)\rho_1 XZ_1^{-1}X^{\rm T}+(\rho_1-d(t))\rho_1 YZ_1^{-1}Y^{\rm T}<0,\qquad(19)$$

$$\varXi+\varPsi_2+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+(d(t)-\rho_1)\rho_1 TZ_2^{-1}T^{\rm T}+(h-d(t))\rho_1 SZ_2^{-1}S^{\rm T}<0,\qquad(20)$$

则对于任意 $t>0$, 均有 $\dot V(x_t)<0$, 即可保证系统 (6) 的绝对稳定性. 根据凸组合方法[16], 式 (19) 等价于

$$\varXi+\varPsi_1+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+\rho_1^2 YZ_1^{-1}Y^{\rm T}<0,\qquad(21)$$

$$\varXi+\varPsi_1+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+\rho_1^2 XZ_1^{-1}X^{\rm T}<0;\qquad(22)$$

式 (20) 等价于

$$\varXi+\varPsi_2+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+\rho_1^2 SZ_2^{-1}S^{\rm T}<0,\qquad(23)$$

$$\varXi+\varPsi_2+\varGamma^{\rm T}U^{-1}\varGamma+\rho_1^2 TZ_2^{-1}T^{\rm T}<0.\qquad(24)$$

再根据 Schur 补, 式 (21) ~ (24) 等价于 (9). □

注 1　定理 1 中所使用的 Lyapunov 泛函 (9), 将系统离散时滞 $0\leqslant d(t)\leqslant h$ 和中立时滞 τ 都分成相等的两个区间, 并分别设定了不同的 Lyapunov 矩阵 $Z_i(i=1,2,3)$. 另外, 式 (9) 中第 3 项和第 4 项包含了不同区间的交叉信息. 这都使得定理 1 减少了所得判据的保守性, 从而改进了文献 [8-10] 的结果.

注 2　定理 1 采用凸组合方法将含有时变系数的 LMI (19) 和 (20) 等价地转化为 4 个不含时变系数的 LMI (21) ~ (24), 从而避免了由于去除一些有用项而带来的保守性.

注 3　定理 1 中所使用的时滞分段分析方法, 可以进一步推广到分段区间数目大于 2 的情况. 但是, 随着分段区间数目的增加, 所涉及的 LMI 的维数也将增长, 计算负担将增大, 并且随着分段区间数目的增加, 时滞分段分析所带来的减小保守性的效果将逐步减弱. 一般而言, 分段区间数目不会大于 4. 本文为了节省篇幅, 只考虑了分段区间个数等于 2 的情况.

下面进一步将标称系统 (6) 的非线性函数推广到属于扇区 $[K_1,K_2]$ 的情况. 应用文献 [20] 中的回路变换方法, 可得如下等价系统:

$$\begin{cases}\dot x(t)=(A-DK_1M)x(t)+\\ \qquad (B-DK_1N)x(t-d(t))+\\ \qquad C\dot x(t-\tau)+D\tilde\omega(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-d(t)),\\ \tilde\omega(t)=-\tilde\phi(t,z(t)),\\ x(t)=\varphi(t),\ t\in[d_2,0].\end{cases}\qquad(25)$$

式中 $\tilde\phi(t,z(t))$ 满足

$$\tilde\phi^{\rm T}(t,z(t))[\tilde\phi(t,z(t))-\tilde Kz(t)]\leqslant 0,$$

其中 $\tilde K=K_2-K_1$.

考虑系统 (25), 由定理 1 可得如下结果:

定理 2　如果系统 (25) 满足假设 1, 并存在矩阵 $P>0$, $Q_1>0$, $\begin{bmatrix}Q_2 & Q_3\\ Q_3^{\rm T} & Q_4\end{bmatrix}>0$, $\begin{bmatrix}Q_5 & Q_6\\ Q_6^{\rm T} & Q_7\end{bmatrix}>0$, $Q_8>0$, $Z_1>0$, $Z_2>0$, $Z_3>0$, X, Y, T 和 S 以及标量 $\varepsilon>0$ 使得式 (26) 成立, 则对于属于 $[K_1,K_2]$ 的非线性函数 $\phi(t,z(t))$, 系统 (25) 是绝对稳定的.

$$\begin{bmatrix}\hat\varXi+\varPsi_i & \hat\varGamma^{\rm T}U & \varPhi_{ij}\\ * & -U & 0\\ * & * & \varSigma_i\end{bmatrix}<0,\ i,j=1,2.\qquad(26)$$

其中

$$\hat\varXi=\mathrm{sym}\{e_1^{\rm T}P\hat\varGamma\}+e_1^{\rm T}Q_1e_1-(1-\mu)e_2^{\rm T}Q_1e_2+\begin{bmatrix}e_1\\ e_3\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}Q_2 & Q_3\\ Q_3^{\rm T} & Q_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}e_3\\ e_4\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}Q_2 & Q_3\\ Q_3^{\rm T} & Q_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_3\\ e_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_1\\ e_5\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}Q_5 & Q_6\\ Q_6^{\rm T} & Q_7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}e_5\\ e_6\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}Q_5 & Q_6\\ Q_6^{\rm T} & Q_7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_5\\ e_6\end{bmatrix}-e_7^{\rm T}Q_8e_7-[e_1-e_5]^{\rm T}Z_3[e_1-e_5]-2\varepsilon e_8^{\rm T}e_8-\mathrm{sym}\{\varepsilon e_8^{\rm T}(K_2-K_1)(Me_1+Ne_2)\},$$

$$\hat\varGamma=[A-DK_1M\quad B-DK_1N\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad C\quad D].$$

下面考虑系统 (1) 的鲁棒稳定性. 为保证系统 (1) 的解的存在性和唯一性, 需作如下假设:

假设 2　系统 (1) 满足 $\|C+HF(t)E_3\|<1$.

注 4　假设 2 是系统 (1) 鲁棒稳定的必要条件, 等价于存在 $\gamma>0$, 使得如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix}-I+\gamma E_3^{\rm T}E_3 & C^{\rm T} & 0\\ * & -I & H\\ * & * & -\gamma I\end{bmatrix}<0.\qquad(27)$$

进一步, 用 $A+HF(t)E_1$, $B+HF(t)E_2$ 和 $C+HF(t)E_3$ 分别代替式 (26) 中的 A, B 和 C, 则可由引理 2 得到如下的系统 (1) 的鲁棒稳定性判据.

定理 3　系统 (1) 满足假设 2, 如果存在矩阵

$$P>0,\ Q_1>0,$$

$$\begin{bmatrix}Q_2 & Q_3\\ Q_3^{\rm T} & Q_4\end{bmatrix}>0,\ \begin{bmatrix}Q_5 & Q_6\\ Q_6^{\rm T} & Q_7\end{bmatrix}>0,$$

$$Q_8>0,\ Z_1>0,\ Z_2>0,\ Z_3>0,$$

X, Y, T 和 S 以及标量 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi} + \Psi_i & \hat{\Gamma}^{\mathrm{T}} U & \Phi_{ij} & \bar{H} & \lambda \bar{E} \\ * & -U & 0 & UH & 0 \\ * & * & \Sigma_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \tag{28}$$

成立, 则系统 (1) 是鲁棒稳定的. 其中

$$\bar{H} = \mathrm{col}\{ PH, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \},$$

$$\bar{E} = \mathrm{col}\{ E_1^{\mathrm{T}}, E_2^{\mathrm{T}}, 0, 0, 0, 0, E_3^{\mathrm{T}}, 0 \}.$$

4 数值算例

例 1 考虑不确定系统 (1), 参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

$$M = [0.3 \quad 0.1], \ N = [0.1 \quad 0.2],$$

$$K_1 = 0.2, \ K_2 = 0.5, \ H = 0.1I,$$

$$E_1 = E_2 = I, \ E_3 = 0, \ \tau = 0.$$

对于不同的 μ, 保证该系统鲁棒稳定的最大时滞上界 h 如表 1 所示. 由表 1 可以看出, 本文提出的方法可以得到更大的 h, 从而说明了本文方法比文献 [8-10] 具有更小的保守性.

表 1 对于不同 μ 的最大时滞上界 h

μ	0	0.3	0.6	0.9	1
文献 [8]	3.3057	2.0787	1.4195	0.9228	0.7638
文献 [9]	3.3057	2.2262	1.7409	1.4682	1.4383
文献 [10]	3.3057	2.2262	1.7409	1.4682	1.4383
定理 3	3.7324	2.3822	1.8199	1.6690	1.6635

例 2 考虑一个不含不确定性的中立型系统, 参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \ A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \ N = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = 0.2I, \ K_2 = 0.5I.$$

假设 $\tau = 1$, 对于不同 μ, 保证该系统绝对稳定的最大时滞上界 h 如表 2 所示.

表 2 对于不同 μ 的最大时滞上界 h

μ	0	0.1	0.3	0.6	0.9	1
定理 2	3.5675	3.0692	2.4044	1.9078	1.8327	1.8311

5 结 论

本文研究了时变时滞中立系统的时滞相关绝对稳定性问题. 通过构造新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 并利用凸组合方法对 Lyapunov-Krasovskii 泛函微分的上界进行更为精确的估计, 得到了一个新的绝对稳定性判据. 数值算例表明了所提出的方法具有较小的保守性.

参考文献(References)

[1] Liao X. Absolute stability of nonlinear control systems[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[2] Gu K, Kharitonov V, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Boston: Brikhauser, 2003.

[3] Bliman P A. Lyapunov-Krasovskii functionals and frequency domain: Delay-independent absolute stability criteria for delay systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2001, 11(8): 771-788.

[4] He Y, Wu M. Absolute stability for multiple delay general Lur'e control systems with multiple nonlinearities[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2003, 159(2): 241-248.

[5] He Y, Wu M, She J H, et al. Robust stability for delay Lur'e control systems with multiple nonlinearities[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2005, 176(2): 371-380.

[6] Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(11): 2171-2176.

[7] Gao J F, Su H Y, Ji X F, et al. New delay-dependent absolute stability criteria for Lurie control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(9): 1275-1280.

[8] Han Q L, Yue D. Absolute stability of Lur'e systems with time-varying delay[J]. IET Control Theory and Applications, 2007, 1(3): 854-859.

[9] Wu M, Feng Z Y, He Y, et al. Improved delay-dependent absolute stability and robust stability for a class of nonlinear systems with a time-varying delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(6): 694-702.

[10] Chen Y G, Guo Y R, Bi W P. New results on absolute stability of Lur'e systems with time-varying delay[C]. Proc of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008: 5483-5486.

[11] 杨斌, 王金城. 中立型一般Lurie系统绝对稳定的时滞相关准则[J]. 自动化学报, 2004, 30(2): 261-264.
(Yang B, Wang J C. Delay-dependent criterion for absolute stability of neutral general Lurie systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(2): 261-264.)

[12] Xu B J, Wang Q. LMI approach for absolute stability of general neutral type Lurie indirect control systems[J]. J of Control Theory and Applications, 2005, 3(4): 387-392.

(下转第1035页)