

文章编号: 1001-0920(2011)07-0973-06

基于容许集的多胞不确定系统三模 RMPC

秦伟伟^{1,2}, 郑志强¹, 马建军¹, 刘 刚²

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073; 2. 第二炮兵工程学院 自动控制系, 西安 710025)

摘 要: 针对输入和状态受约束的多胞不确定线性系统, 提出了基于容许集的扩大吸引域三模鲁棒模型预测控制方法. 在多面体不变集离线模型预测控制算法的基础上引入容许集, 以多面体不变集序列的并集作为模式 1, 基于 N 步容许集的控制容许集作为模式 2, 并利用离线设计和在线优化的控制策略, 设计了三模变终端约束鲁棒模型预测控制算法, 以实现系统渐近稳定. 该算法不仅降低了在线运算量, 而且扩大了吸引域. 最后的仿真结果验证了所提出算法的有效性.

关键词: 多胞不确定系统; 容许集; 三模模型预测控制; 变终端约束

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Triple-mode RMPC based on admissible set for polytopic uncertain system

QIN Wei-wei^{1,2}, ZHENG Zhi-qiang¹, MA Jian-jun¹, LIU Gang²

(1. College of Machtronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering Institution, Xi'an 710025, China. Correspondent:

QIN Wei-wei, E-mail: qww_1982@163.com)

Abstract: A triple-mode robust model predictive controller(RMPC) with an enlarging the domain of attraction based on admissible set is developed for a discrete-time polytopic uncertain linear system with input and state constraints. The admissible set is used to design this triple-mode RMPC based on the off-line MPC with constructing a continuum of polytopic invariant sets. In this triple-mode RMPC, the union of the continuum of polytopic invariant sets is treated as mode 1, and the control admissible set based on N -step admissible set is treated as mode 2. Combined off-line designing with on-line optimization, the triple-mode RMPC algorithm with time-varying terminal constraint is presented. This algorithm not only dramatically reduces on-line computation, but also enlarges the size of the domain of attraction. The digital simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: polytopic uncertain system; admissible set; triple mode MPC; time varying terminal constraints

1 引 言

模型预测控制(MPC)已经广泛应用于约束系统^[1-2]. 在模型预测控制中, 终端约束集、终端约束函数以及局部控制器是设计稳定模型预测控制的 3 个主要因素^[2]. 目前, 人们主要采用椭圆不变集和多面体不变集描述终端约束集. Kothare 等人提出了基于椭圆不变集的鲁棒模型预测控制算法^[3]. 由于固定椭圆保守性大, Cuzzola 等人提出了参数依赖的渐近稳定椭圆集^[4]. 为了扩大初始状态允许区域, 文献[5-6]设计了基于椭圆不变集的变时域变终端约束 RMPC.

由于多面体集相对于椭圆集更适合描述系统的

吸引域^[4], Cannon 等人设计了基于多面体不变集的控制方法^[7-8], Pluymers 等人设计了基于反馈控制律的多面体不变集构造方法^[9-10]. 为了扩大初始状态允许集并降低在线计算量, 席裕庚等人提出了基于多面体不变集的离线控制方法^[11].

相对于离线方法, 双模预测控制采用在线优化与终端约束相结合的策略, 使得约束系统具有更大的吸引域. 但是, 目前双模预测控制策略大多基于椭圆不变集, 由于椭圆集具有一定的保守性, 双模预测控制的吸引域也具有保守性. 另外, 该方法需在线优化, 因而对在线计算能力具有很高的要求. 目前, 在保证系

收稿日期: 2010-04-08; 修回日期: 2010-05-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60675005).

作者简介: 秦伟伟(1982—), 男, 博士生, 从事模型预测控制以及精确制导与控制的研究; 郑志强(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事精确制导与控制以及机器人协同控制等研究.

统性能的基础上,如何降低在线计算量以及扩大吸引域是双模预测控制的难点问题.

为扩大约束系统吸引域,并降低在线计算量,本文在文献[11]和文献[5-6]的基础上,通过引入容许集设计扩大吸引域三模鲁棒模型预测控制(TRMPC).主要思想是,针对多胞线性不确定系统,首先建立基于多面体不变集序列的终端约束集,以不变集序列的并集为 Mode 1;然后在此基础上引入终端约束集的 N 步容许集设计控制容许集,并以控制容许集作为控制策略的 Mode 2 设计变终端约束三模鲁棒模型预测控制.由于该方法采用了多面体集作为终端约束,相对于椭圆集降低了椭圆集描述吸引域的保守性,从而达到扩大吸引域的目的.另外,当状态位于控制容许集内部时,将多步在线优化转化为单步优化,从而降低了在线计算量.

2 问题描述

考虑不确定系统动态

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (1)$$

其中 $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 和 $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 分别表示控制输入和系统状态. 系统矩阵 $[A(k), B(k)] \in \Delta$, 而

$\Delta =$

$$\left\{ [A, B] \mid [A, B] = \sum_{i=1}^L \lambda_i [A_i, B_i], \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1 \right\}, \quad (2)$$

$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_L, B_L]$ 表示多面体顶点.

系统状态约束 X 和控制约束 U 满足

$$x(k) \in X \triangleq \{x(k) \mid A_x x(k) \leq \bar{1}\}, \forall k \geq 0; \quad (3)$$

$$u(k) \in U \triangleq \{u(k) \mid A_u u(k) \leq \bar{1}\}, \forall k \geq 0. \quad (4)$$

式中: $\bar{1}$ 表示元素为 1 的列向量,且维数与式中的矩阵相对应; A_x, A_u 分别表示用于描述多面体集的方阵.

预测控制器设计目标是针对系统(1)~(4)设计控制器,将系统的状态驱动到原点,并最小化性能指标

$$\begin{aligned} \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Delta, i \geq 0} J_\infty(k) = \\ \sum_{i=0}^{\infty} \{\|x(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+i|k)\|_{R}^2\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 Q_1 和 R 为正定的加权矩阵.

3 多面体不变集及其容许集

为了扩大吸引域,本文在多面体不变集的基础上引入 N 步容许集.下面分别给出相关定义和计算方法.

定义 1 (一步容许集) 对于离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_1(\Omega) \mathbf{R}^n$. 如果满足输入约

束 U 和状态约束 X , 存在容许控制输入 $u(k)$ 使得 $x(k+1) \in \Omega$, 则称集合 $\tilde{\Xi}_1(\Omega)$ 是 Ω 的一步容许集, 即

$$\tilde{\Xi}_1(\Omega) \triangleq \{x(k) \in X \mid \exists u(k) \in U : f(x(k), u(k)) \in \Omega\}. \quad (6)$$

定义 2 (N 步容许集) 对于离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$. 如果在满足输入约束 U 和状态约束 X 的条件下, 存在容许控制输入序列 $u(k), \dots, u(k+N-1) \in U$, 使得 $x(k+N) \in \Omega$, 则称集合 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 是集合 Ω 的 N 步容许集, 即

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_N(\Omega) \triangleq \{x(k) \in X \mid \exists u(k), \dots, u(k+N-1) \in \\ U : x(k+N) \in \Omega\}. \end{aligned} \quad (7)$$

下面采用映射思想设计 N 步容许集计算方法. 对于多胞不确定系统

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k),$$

$[A(k), B(k)]$ 满足约束(2). 根据容许集定义, 一步容许集 $\tilde{\Xi}_1(\Omega)$ 表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_1(\Omega) \triangleq \\ \{x(k) \in X \mid \exists u(k) \in U : Ax(k) + \\ Bu(k) \in \Omega, \forall [A, B] \in \Delta\} = \\ \{x(k) \in X \mid \exists u(k) \in U : A_i x(k) + \\ B_i u(k) \in \Omega, \forall [A_i, B_i] \in \Delta, i = 1, 2, \dots, L\}. \end{aligned} \quad (8)$$

设 $\Omega = \{x(k) \in \mathbf{R}^n \mid Qx(k) \leq q\}$, 并定义

$$\begin{aligned} \Psi = \\ \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m} \mid x(k) \in X, u(k) \in U, A_i x(k) + \right. \\ \left. B_i u(k) \in \Omega, i = 1, 2, \dots, L \right\} = \\ \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \right. \\ \left. \mathbf{R}^{n+m} \mid \begin{bmatrix} QA_1 & QB_1 \\ \vdots & \vdots \\ QA_L & QB_L \\ A_x & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} q \\ \vdots \\ q \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

根据文献[12], Ψ 的前 n 个坐标展开的子空间即为一歩容许集, 即

$$\tilde{\Xi}_1(\Omega) \triangleq \{x(k) \in \mathbf{R}^n \mid \exists [x(k), u(k)]^T \in \Psi\}. \quad (10)$$

由此, 可得到 N 步容许集的计算方法.

算法 1 N 步容许集计算方法.

1) 若目标集 Ω 是凸多面体集, 则集合 Ω 的 N 步容许集 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 可采用如下方法进行计算:

- ① 令 $k=0$, $\tilde{\Xi}_0(\Omega) = \Omega$;
- ② 按一步容许集方法计算

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}_k(\Omega) = \\ \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U: A_i x(k) + B_i u(k) \in \\ \tilde{\Xi}_{k-1}(\Omega), \forall [A_i, B_i] \in \Delta, i = 1, 2, \dots, L\};\end{aligned}\quad (11)$$

③ 令 $k = k + 1$, 若 $k > N$, 则计算结束; 否则, 返回②.

2) 若目标集为凸多面体集的并集 $\Omega \triangleq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$, 则容许集计算方法如下:

Ω 的一步容许集为

$$\tilde{\Xi}(\Omega) = \tilde{\Xi}\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}(\Omega_j); \quad (12)$$

Ω 的 N 步容许集为

$$\tilde{\Xi}_N(\Omega) = \tilde{\Xi}_N\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}_N(\Omega_j). \quad (13)$$

对于目标集 Ω 的 N 步容许集, 如果存在极限, 则定义无限时间容许集

$$\tilde{\Xi}_\infty(\Omega) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\Xi}_N(\Omega), \quad (14)$$

并称之为 Ω 的控制容许集.

定义 3 (有限确定控制容许集) 对于目标集 Ω 的控制容许集 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega)$, 当且仅当 $\exists i \in N^+$ 使得 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega) = \tilde{\Xi}_i(\Omega)$, 则称 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega)$ 为有限确定控制容许集, 并将满足 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega) = \tilde{\Xi}_{i^*}(\Omega)$ 的最小 $i^* \in N^+$ 称为确定指数.

定理 1 如果 $\exists i \in N^+$ 使得 $\tilde{\Xi}_{i+1}(\Omega) = \tilde{\Xi}_i(\Omega)$, 则称 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega)$ 为有限确定的.

证明 如果 $\tilde{\Xi}_{i+1}(\Omega) = \tilde{\Xi}_i(\Omega)$, 则可以构造

$$\tilde{\Xi}_{i+2}(\Omega) = \tilde{\Xi}_{i+1}(\Omega) = \tilde{\Xi}_i(\Omega),$$

从而有 $\tilde{\Xi}_{i+2}(\Omega) = \tilde{\Xi}_i(\Omega)$. 以此类推, 可得到 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega) = \tilde{\Xi}_i(\Omega)$. 因此, 控制容许集是有限确定的. $\square$

4 基于容许集的 TRMPC

文献[11]提出了基于多面体不变集的离线控制方法. 该方法表明: 只要系统状态属于控制不变集序列, 便可采用控制增益切换策略实现系统渐近稳定; 算法中复杂的多面体不变集计算在离线部分完成, 因此极大地降低了在线计算量. 但是, 如果初始状态不属于多面体不变集序列, 则该方法无法有效控制. 相对于离线方法, 双模预测控制实施在线优化与终端约束相结合的方法, 使得系统具有更大的吸引域. 但是, 该方法需要进行在线优化, 因而需要很强的在线计算能力. 文献[15]指出, 扩大吸引域的方法包括增加预测时域的长度和扩大终端约束集. 增加预测时域可以扩大吸引域, 但预测时域越大, 在线计算量越大; 另一方面, 对于给定的初始状态, 总是期望预测时域 N 尽可能小; 目前, N 的选择是普遍遇到的难题. 另外, 目前双模预测控制策略大多是基于椭圆不变集设计

的, 由于椭圆集具有保守性, 双模预测控制的吸引域也具有保守性.

为了扩大约束系统的吸引域, 并降低在线优化计算量, 本文在多面体不变集离线算法的基础上, 通过引入 N 步容许集设计 TRMPC. 基本思想是: 采用多面体不变集序列代替单个局部控制器对应的多面体不变集, 以扩大终端约束集; 同时引入 N 步容许集计算多面体不变集的控制容许集, 将 N 步在线优化转化为单步优化, 以期降低在线计算量. 因此, 基于容许集的 TRMPC 设计思路, 根据系统状态将控制策略分为 3 种模式: 多面体不变集序列并集作为 **Mode 1**, 如果状态属于该区域, 则按文献[11]算法调用离线设计好的控制律; 多面体不变集序列并集的控制容许集作为 **Mode 2**, 如果状态属于该模式区域中的 i 步容许集, 则将 $i - 1 (i = 1, 2, \dots, N)$ 容许集作为双模预测控制的终端约束集进行单步优化, 计算控制输入, 从而将多步在线优化转化为单步优化, 以降低在线计算量; **Mode 3** 是将 **Mode 1** 和 **Mode 2** 区域的并集作为新终端约束集, 设计变时域双模预测控制在线计算控制输入. 算法设计步骤如下:

算法 2 基于容许集的多模鲁棒 MPC.

1) 离线部分.

Step 1 按文献[11]方法设计并计算向原点收敛的多面体不变集序列 $\Omega = \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ 以及对应的状态反馈控制律 $K_1, K_2, \dots, K_M$.

Step 2 在满足状态约束 X 和控制输入约束 U 的条件下, 采用迭代算法 1 计算 Ω 的 N 步容许集

$$\tilde{\Xi}_N(\Omega) = \tilde{\Xi}_N\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}_N(\Omega_j),$$

并判断控制容许集是否是有限确定的. 如果控制容许集是无限时间的, 则采用 N 步容许集近似表示.

2) 在线部分.

Step 1 给定初始状态 $x(0)$, 令 $k = 0$.

Step 2 根据当前时刻系统状态 $x(k)$, 判断:

① 若 $x(k) \in \Omega$ (**Mode 1**), 则设计控制输入作用于系统

$$u(k) = K_i x(k), \quad i = \max\{j : x(k) \in \Omega_j\}.$$

② 若 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega) / \Omega$ (**Mode 2**), 则采用单步双模鲁棒预测控制计算控制输入, 即若

$$x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega),$$

则求解如下优化过程:

$$\begin{aligned}\min_{u(k)} J(k) = \\ \|x(k+1|k)\|_{Q_f}^2 + \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_{R}^2.\end{aligned}\quad (15)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x(k) \in X, u(k) \in U; \\ x(k+1|k) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega); \\ x(k+1|k) = A(k)x(k) + B(k)u(k); \\ [A(k), B(k)] \in \Delta; \\ \text{if } i = 1, \text{ then } x(k+1|k) \in \Omega. \end{cases}$$

其中: $i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j(\Omega)\}$; Q_f 表示对称的正定矩阵; $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)/\Omega$ 表示 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)$, $x(k) \notin \Omega$.

通过上述优化可得到控制输入 $u(k)$ 作用于系统.

③ 若 $x(k) \in X_F^{N'}/\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ (Mode 3), 则求解优化问题

$$\begin{aligned} \min_{u(k|k), \dots, u(k+N'|k)} J(k) = & \sum_{i=0}^{N'-1} \ell(x, u) + \|x(k+N')\|_{Q_{f1}}^2. \\ \text{s.t.} \begin{cases} x(k|k), \dots, x(k+N'|k) \in X; \\ u(k|k), \dots, u(k+N'|k) \in U; \\ x(k+N'|k) \in X_{\text{ter}}; \\ x(k+1|k) = A(k)x(k) + B(k)u(k); \\ [A(k), B(k)] \in \Delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $X_{\text{ter}} = \tilde{\Xi}_N(\Omega) \cup \Omega$, $X_F^{N'}$ 表示 X_{ter} 作为终端约束集的 N' 步双模预测控制的可行区域, Q_{f1} 表示对称的正定矩阵, $\ell(x, u) = \|x(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2$.

通过上述优化问题可得到控制输入序列 $u(k|k), \dots, u(k+N'|k)$, 并将 $u(k) = u(k|k)$ 作用于实际系统.

Step 3 测量下一时刻的系统状态, $k = k + 1$, 返回在线 Step 2. 如果状态属于 Mode 3, 则采用步长递减的在线优化策略, 直至系统稳定到原点.

注 1 在算法 2 中, $X_{\text{ter}} = \tilde{\Xi}_N(\Omega) \cup \Omega$ 是收敛的控制不变集, 即只要 $x(k) \in X_{\text{ter}}$, 则总存在可行的控制输入 $u(k) \in U$ 使得 $x(k+1) \in X_{\text{ter}}$. 分 2 种情况讨论: 1) 如果 $x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)$, 则采用单步优化必存在可行输入使得 $x(k+1) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \subseteq X_{\text{ter}}$; 2) 如果 $x(k) \in \Omega$, 则由于 Ω 为控制不变集, 采用文献 [11] 的控制律切换策略可保证 $x(k+1) \in \Omega \subseteq X_{\text{ter}}$, 并最终收敛到平衡原点. 因此, 在 Mode 3 中将 X_{ter} 作为终端约束集是可行的.

下面给出算法优化性能指标分析:

1) 系统状态 $x(k) \in X_F^{N'}$, 性能指标表示为

$$\begin{aligned} J(k) = & \sum_{i=0}^{N'-1} \ell(x, u) + \sum_{i=N'}^{N'+N-1} \ell(x, u) + \sum_{i=N'+N}^{\infty} \ell(x, u) = \\ & M_1 + M_2 + M_3. \end{aligned} \quad (17)$$

由注 1 可知, Mode 3 的终端约束集 X_{ter} 为收敛的控制不变集, 即一旦系统状态进入 X_{ter} , 便可通过

优化控制输入以及控制律切换驱动状态收敛到平衡原点, 因此 X_{ter} 是一种稳定性约束条件^[13]. 从这一角度看, 系统状态进入 X_{ter} 即可认为系统达到了稳定的控制目标, 因此可以人为地设计 $M_2 + M_3 = 0$. Mode 3 优化目标函数 (16) 相应改写为

$$\min_{u(k|k), \dots, u(k+N'|k)} J_1(k) = \sum_{i=0}^{N'-1} \ell(x, u). \quad (18)$$

2) 系统状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)$, 性能指标为

$$J(k) = \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_R^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \ell(x, u) + M_3, \quad (19)$$

其中 $m = \min\{i : x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)\}$.

根据注 1 可知

$$X'_{\text{ter}} = \tilde{\Xi}_{m-1}(\Omega) \cup \dots \cup \tilde{\Xi}_0(\Omega)$$

也为收敛的控制不变集, 即一旦系统状态满足 $x(k) \in X'_{\text{ter}}$, 便可得到可行的控制输入将系统状态驱动到平衡原点. 因此, 从稳定的意义上考虑, Mode 2 中优化目标函数也可以人为选择

$$\sum_{i=1}^{m-1} \ell(x, u) + M_3 = 0.$$

基于此, 式 (15) 可改写为

$$\min_{u(k)} J(k) = \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_R^2. \quad (20)$$

这样虽然会损失一定的性能, 但将多步在线优化转化为单步优化, 可大大降低在线计算量.

3) 系统状态 $x(k) \in \Omega$, 可调用离线设计好的控制律, 因此不用考虑优化性能指标.

注 2 因为凸多面体的并集不一定是凸集, 因此优化过程 (15) 和 (16) 中的优化目标集不一定是凸集. 如果按式 (15) 和 (16) 直接进行非凸非线性规划则不能保证得到最优解, 但因为凸集的一步容许集是凸集, 所以 $\tilde{\Xi}_j(\Omega_i)$ 均为凸集 ($j = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, M$). 为了便于优化运算, 将非凸集合约束优化问题转换为多个凸集约束的凸优化问题. 在式 (16) 中, 非凸集合 X_{ter} 可改写为 $(N+1) \times M$ 个凸集的并集, 即

$$\underbrace{\tilde{\Xi}_N(\Omega_1) \cup \dots \cup \tilde{\Xi}_N(\Omega_M)}_M \cup \dots \cup \underbrace{\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_M}_M. \quad (21)$$

(N+1) × M

这样, 优化问题 (16) 便可转化为凸优化问题, 然后从各优化结果中选择性能最优者作为优化结果. 同理, 式 (15) 也可以转化为凸优化问题.

定理 2 (算法 2 的稳定性证明) 对于多胞不确定系统 (1), 若满足约束 (2) ~ (4), 则采用算法 2 设计的模

型预测控制器可以保证系统渐近稳定到原点.

证明 根据算法2设计控制器作用于系统, 假设 k 时刻系统状态为 $x(k)$.

1) 若 $x(k) \in \Omega$, 则: 采用基于多面体不变集序列切换策略鲁棒MPC实施控制^[11]; 因为控制不变集的并集仍为控制不变集, 一旦系统状态 $x(k) \in \Omega$, 则根据系统状态所属的位置确定控制增益可保证 $x(k+1) \in \Omega$; 又因为离线部分 Step 1 得到的每个多面体控制不变集均为收敛不变集, 因此采用多面体不变集控制策略实施切换控制, 可保证系统状态渐近收敛到平衡原点.

2) 若 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)/\Omega$, $i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j(\Omega)\}$, 则: 如果系统状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)$, 则以 $\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)$ 为目标约束集, 按优化过程(15)进行一步在线优化. 由一步容许集性质可知, 通过优化运算必可得到控制输入 $u(k) \in U$, 使得 $x(k) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)$. 按上述过程逐步进行, 当 $i=1$ 时, 即 $x(k) \in \tilde{\Xi}_1(\Omega)$, 则必存在可行控制输入 $u(k) \in U$, 使得 $x(k+1) \in \Omega$, 一旦系统状态 $x(k) \in \Omega$, 便可切换到不变集控制策略, 从而保证系统收敛到平衡原点.

3) 若 $x(k) \in X_F^{N'}/X_{\text{ter}}$, 则: 系统状态 $x(k) \notin X_{\text{ter}}$, $x(k) \in X_F^{N'}$, 按式(16)进行步长递减的双模预测控制在线优化计算最优控制输入. 由 $X_F^{N'}$ 的定义可知, 通过预测时域为 N' 的优化运算得到的控制输入序列 $u(k|k), \dots, u(k+N'|k)$ 能够保证 $x(k+N'|k) \in X_{\text{ter}}$. 将 $u(k|k)$ 作用于系统, 并测量下一时刻状态, 再进行预测时域为 $N' = N' - 1$ 的在线优化, 直至 $x(k+N') \in X_{\text{ter}}$. 一旦系统状态满足 $x(k) \in X_{\text{ter}}$, 则因为 $X_{\text{ter}} = \tilde{\Xi}_N(\Omega) \cup \Omega$ 为收敛的控制不变集, 必然存在控制输入保证系统状态收敛到多面体不变集序列 Ω . 如果 $x(k) \in \Omega$, 则调用相应的控制策略可最终保证系统状态收敛到系统原点.

因为控制不变集和在线优化均满足系统约束, 因此算法2设计的控制策略能够在满足约束的条件下保证系统渐近稳定到原点. $\square$

5 仿真算例

为了检验控制算法的有效性, 以如下多胞不确定线性系统为例设计控制器:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = B_1.$$

状态约束和输入约束满足

$$A_x = [0.1I \quad -0.1I]^T, A_u = [1 \quad -1]^T.$$

性能指标函数中的加权矩阵 $Q_1 = I, R = 1$.

首先依据文献[11]方法设计基于多面体不变集的控制不变集序列 $\Omega = \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$, 并将对应的控制增益 $K_1, K_2, \dots, K_M$ 存入数据库以备调用.

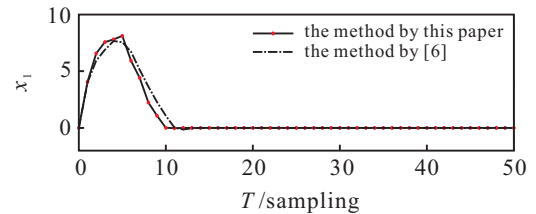
采用迭代算法1, 通过计算 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$ (这里 $M=8$) 的 N 步容许集, 并判断多面体不变集的控制容许集是否为有限确定的. 通过计算可知, 当 $N=6$ 时 $\tilde{\Xi}_{N+1}(\Omega_i) = \tilde{\Xi}_N(\Omega_i) (i=1, 2, \dots, 8)$, 因此 $\tilde{\Xi}_\infty(\Omega)$ 为有限确定的容许控制集.

假设多胞系统不确定性变化方式为

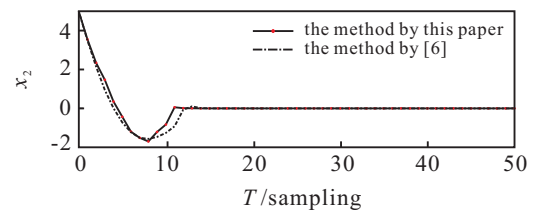
$$A = A_1 \times \text{rand}(0, 1) + A_2 \times (1 - \text{rand}(0, 1)),$$

其中 $\text{rand}(0, 1)$ 表示 $[0, 1]$ 区间的随机数. 对于初始状态 $x(0) = [0, 5]^T \in \tilde{\Xi}_\infty(\Omega)$, 分别采用算法2和文献[6]设计控制器实施控制.

仿真结果如图1和图2所示, 分别给出了系统状态响应曲线、输入变化曲线以及性能指标比较. 结果表明, 两种方法均可在满足约束的条件下保证系统收敛到原点. 表1给出了在线计算量比较, 可以看出本文方法大大降低了在线计算量.

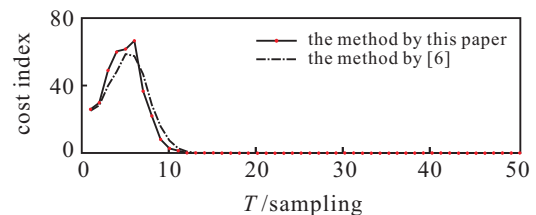


(a) 状态变量 x_1

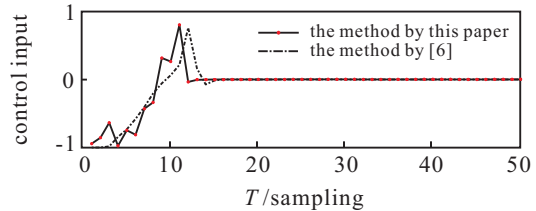


(b) 状态变量 x_2

图1 系统状态响应曲线



(a) 性能指标



(b) 控制输入

图2 性能指标与控制输入曲线

表 1 初始状态 $[0, 5]^T$ 的控制输入运算时间

优化步数	本文方法/s	文献[6]/s
Step 1	$N = 1, 0.4149$	$N = 3, 1.6412$
Step 2	$N = 1, 0.4127$	$N = 2, 1.3827$
Step 3	$N = 1, 0.3779$	$N = 1, 1.1870$
Step 4	$N = 0, 0.0000$	$N = 0, 0.0000$

从性能指标上看, 本文方法性能指标之和为

$$f_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \{\|x(i)\|_{Q_1}^2 + \|u(i)\|_R^2\} = 334.4679;$$

文献[6]的性能指标之和为

$$f_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \{\|x(i)\|_{Q_1}^2 + \|u(i)\|_R^2\} = 313.5363.$$

与本文方法相比, 文献[6]在性能指标上降低了 6.68%. 但从在线计算量上看, 本文方法的在线计算时间之和 T_1 与文献[6]在线计算量之和 T_2 分别为

$$T_1 = \sum_{i=1}^3 t_{1i} = 0.8654 \text{ s}, \quad T_2 = \sum_{i=1}^3 t_{2i} = 4.2109 \text{ s}.$$

文献[6]在线计算时间是本文方法的 4.866 倍, 表明本文方法虽然损失了部分性能, 但大大降低了在线计算量.

算法 2 中, 离线选择的多面体不变集数量有限, 且控制容许集是针对多胞不确定系统设计的, 具有一定的保守性, 所以不属于控制容许集的状态可能也是可镇定的, 为此对初始状态 $x_0 \notin \tilde{\Xi}_{\infty}(\Omega)$ 采用三模控制策略设计控制输入. 对于可行初始状态 $[7, -7]^T$, 采用两种方法设计控制输入, 仿真结果如图 3 和图 4 所示.

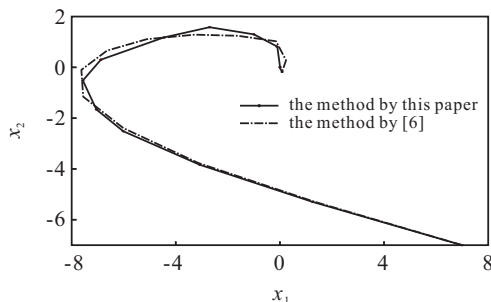
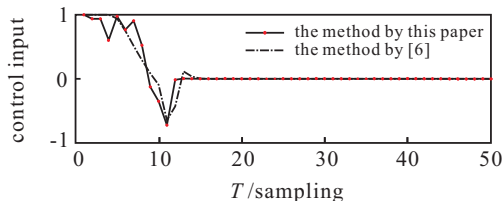
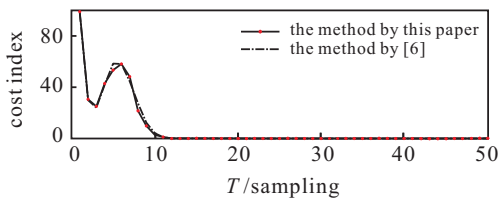


图 3 系统状态轨迹曲线



(a) 控制输入



(b) 性能指标

图 4 控制输入以及性能指标比较

由于算法 2 中的 $X_F^{N'}$ 以及文献[6]方法的在线优化可行状态集很难精确描述, 这里为比较两种方法的吸引域, 在相同预测时域的条件下, 通过给定初始状态的控制可行性进行比较. 不同初始状态的控制可行性如表 2 所示 ($N=5$). 结果表明, 算法 2 较文献[6]方法扩大了吸引域.

表 2 可行性分析

$x(0)$	$\begin{bmatrix} -10 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -8 \\ 3.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ -7.5 \end{bmatrix}$
文献[6]	infeasible	infeasible	feasible	infeasible
本文方法	feasible	feasible	feasible	feasible

由于 $[7, -7]^T \notin \tilde{\Xi}_{\infty}(\Omega)$, 本文方法按三模策略设计控制输入, 在 Mode 3 进行 2 步在线, 在 Mode 2 进行 3 个单步优化. 文献[6]采用 $N=5$ 的控制时域递减优化方法, 在线优化时间分别为

$$T_1 = 3.5476 \text{ s}, \quad T_2 = 8.0699 \text{ s}.$$

计算时间比较如表 3 所示.

表 3 初始状态 $[7, -7]^T$ 的控制输入运算时间

优化步数	本文方法/s	文献[6]/s
Step 1	$N = 2, 1.4730$	$N = 5, 2.6640$
Step 2	$N = 1, 0.8440$	$N = 4, 1.9385$
Step 3	$N = 1, 0.4533$	$N = 3, 1.4144$
Step 4	$N = 1, 0.4007$	$N = 2, 1.1870$
Step 5	$N = 1, 0.3766$	$N = 1, 0.8660$
Step 6	$N = 0, 0.0000$	$N = 0, 0.0000$

仿真结果表明, 算法 2 是有效可行的, 不仅扩大了吸引域, 而且降低了控制输入的在线计算量.

6 结 论

本文以变时域变终端约束控制思想为基础, 针对多胞不确定系统, 采用多面体不变集控制方法, 通过引入控制容许集, 综合离线设计和在线优化以及多步优化和单步优化设计了三模鲁棒模型预测控制算法. 相对于文献[6]方法, 本文算法大大降低了在线计算量, 并扩大了系统吸引域. 算法稳定性证明和仿真结果均表明本文方法是一种行之有效的鲁棒模型预测控制方法.

参考文献(References)

- [1] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. 自动化学报, 2008, 34(10): 1225-1234.
(Xi Y G, Li D W. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. Aata Automatica Sinica, 2008, 34(10): 1225-1234.)
- [2] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.

(下转第983页)