

文章编号: 1001-0920(2011)07-1051-05

具有 \mathcal{D} 稳定性约束的 T-S 模糊系统 H_∞ 滤波器设计

常晓恒

(1. 渤海大学 工学院, 辽宁 锦州 121003; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

摘要: 研究一类离散 T-S 模糊系统的 H_∞ 滤波问题. 目的是设计一个滤波器使得滤波误差系统在给定的线性矩阵不等式 (LMI) 稳定范围内是二次稳定的, 且满足指定的 H_∞ 性能. 经由模糊 Lyapunov 函数方法以及增加松弛变量, 提出一个滤波器存在的充分条件, 它体现为一组线性矩阵不等式 (LMIs) 可行解的形式. 最后通过一个仿真例子验证了所提出的设计方法的有效性.

关键词: 离散 T-S 模糊系统; H_∞ 滤波器; 模糊 Lyapunov 函数; \mathcal{D} 稳定性

中图分类号: TP273

文献标识码: A

H_∞ filter design for T-S fuzzy systems with \mathcal{D} stability constraints

CHANG Xiao-heng

(1. College of Engineering, Bohai University, Jinzhou 121003, China; 2. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. E-mail: changxiaoheng@sina.com)

Abstract: This paper addresses the problem of H_∞ filter design for a class of Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy systems. Attention is focused on the design of a filter such that the filtering error system is quadratically stable in the given linear matrix inequality(LMI) stability region and satisfies a prescribed H_∞ performance. By using the fuzzy Lyapunov function approach and adding slack matrix variables, a sufficient condition for the existence of such a filter is presented in terms of solutions to a set of linear matrix inequalities. Finally, a simulation example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: discrete-time T-S fuzzy systems; H_∞ filter; fuzzy Lyapunov function; \mathcal{D} stability

1 引言

近年来, 滤波问题受到了人们越来越多的关注, 其中的 H_∞ 滤波是其重要的研究内容之一. 相对于卡尔曼滤波而言, 当噪声为任意能量有限的信号时, H_∞ 滤波更能保证给定的噪声抑制水平^[1-8].

目前, T-S 模糊模型已经成为非线性控制领域非常活跃的一个分支, 它是一种本质非线性的模型, 易于表达复杂系统的动态特性^[9]. 近年来, 人们对 T-S 模糊控制系统的稳定性分析及控制器设计等问题进行了广泛研究^[2,4,7,10-14]. 为了获得较为宽松的分析及设计条件, 相对于单一 Lyapunov 函数方法^[2,10-11,14], 模糊 Lyapunov 函数方法得到了较为广泛的应用^[4,7,12-13]. 目前已有一些文献开始关注 T-S 模糊系统的 H_∞ 滤波问题^[2,4,7]. 本文则基于 T-S 模糊模型研究离散非线性系统的 H_∞ 滤波问题, 分析的对象是由系统和滤波器组成的滤波器误差系统, 与文献 [5-6] 为了得到 LMI 条件而考虑状态变换后的系统不同.

2 问题描述

考虑如下一离散 T-S 模糊模型, 其第 i 条模糊规则为^[9]

$$\begin{aligned} R^i : & \text{if } \xi_1(k) \text{ is } M_{1i} \text{ and } \cdots \xi_s(k) \text{ is } M_{si}; \\ & \text{then } x(k+1) = A_i x(k) + B_i w(k), \\ & y(k) = C_i x(k) + D_i w(k), \\ & z(k) = L_i x(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为状态变量; $y(k) \in R^f$ 为测量输出信号; $z(k) \in R^g$ 为被估计信号; $w(k) \in R^p$ 为干扰信号且能量有界; $\xi(k) = [\xi_1(k) \cdots \xi_s(k)]$ 为前提变量; $M_{vi} (v=1, 2, \cdots, s, i=1, 2, \cdots, r)$ 为模糊集, r 为模糊规则数目; A_i, B_i, C_i, D_i, L_i 为适当维数的系统矩阵.

T-S 模糊系统的总体模型为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(h)x(k) + B(h)w(k), \\ y(k) &= C(h)x(k) + D(h)w(k), \end{aligned}$$

收稿日期: 2010-04-16; 修回日期: 2010-06-02.

基金项目: 辽宁省教育厅高校科研计划项目(2008017); 中国博士后科学基金面上项目(20090451275).

作者简介: 常晓恒(1977-), 男, 副教授, 博士后, 从事模糊控制理论的研究.

$$z(k) = L(h)x(k). \tag{2}$$

其中: 符号 $\mathcal{N}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k))\mathcal{N}_i$, 下同;

$$h_i(\xi(k)) = \eta_i(\xi(k)) / \sum_{j=1}^r \eta_j(\xi(k)),$$

$$\eta_i(\xi(k)) = \prod_{v=1}^s M_{vi}(\xi_v(k)),$$

$M_{vi}(\xi_v(k))$ 为前提变量 $\xi_v(k)$ 相对于模糊集合 M_{vi} 的隶属度.

本文采用如下形式的全阶 H_∞ 滤波器:

$$\begin{aligned} x_F(k+1) &= A_F(h)x_F(k) + B_F(h)y(k), \\ z_F(k) &= C_F(h)x_F(k) + D_F(h)y(k). \end{aligned} \tag{3}$$

其中: $x_F(k) \in R^n$ 为滤波器状态; $z_F(k) \in R^q$ 为滤波器输出; $A_{Fi}, B_{Fi}, C_{Fi}, D_{Fi}$ 为需要设计的适当维数的矩阵.

构造增广状态向量 $\psi(k) = [x^T(k) \ x_F^T(k)]^T$ 和滤波误差 $e(k) = z(k) - z_F(k)$, 则可以获得如下的滤波误差系统:

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= \tilde{A}(h)\psi(k) + \tilde{B}(h)w(k), \\ e(k) &= \tilde{C}(h)\psi(k) + \tilde{D}(h)w(k). \end{aligned} \tag{4}$$

这里

$$\tilde{A}(h) = \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_F(h)C(h) & A_F(h) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}(h) = \begin{bmatrix} B(h) \\ B_F(h)D(h) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(h) = [L(h) - D_F(h)C(h) \ C_F(h)],$$

$$\tilde{D}(h) = -D_F(h)D(h).$$

考虑如下定义:

定义 1 [15] 如果存在一个对称矩阵 $\Gamma \in \mathcal{R}^{d \times d}$ 和矩阵 $\Pi \in \mathcal{R}^{d \times d}$, 使得

$$\mathcal{D} = \{z = x + jy \in \mathcal{C} : f_{\mathcal{D}} = \Gamma + \Pi z + \Pi^T \bar{z} < 0\}, \tag{5}$$

则复平面上的子集 \mathcal{D} 可被称之为 LMI 区域.

定义 2 给出一个 LMI 稳定区域 \mathcal{D} , 如果存在正定矩阵 $\mathcal{X} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, 使得

$$\Gamma \otimes \mathcal{X} + \Pi \otimes (A\mathcal{X}) + \Pi^T \otimes (A\mathcal{X})^T < 0, \tag{6}$$

则称系统 $x(k+1) = Ax(k)$ 是二次 \mathcal{D} 稳定的.

本文的目的是设计滤波器 (3) 满足以下条件:

- 1) 当 $w(k) = 0$ 时, 滤波误差系统 (4) 渐近稳定;
- 2) 对于给定的 $\gamma > 0$, 在零初始条件下 ($\psi(0) = 0$), 滤波误差系统 (4) 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k);$$

- 3) 滤波误差系统 (4) 的极点位于指定的 LMI 稳

定范围 \mathcal{D} 内 (在区域 \mathcal{D} 内是二次稳定的).

为了推导本文的结果, 将用到如下的引理:

引理 1 以下 2 个问题等价 [14]:

- 1) 寻找矩阵 P , 使得

$$Y + P^T A + A^T P < 0; \tag{7}$$

- 2) 寻找矩阵 P, G , 使得

$$\begin{bmatrix} Y + G^T A + A^T G & * \\ P - G + G^T A & -G - G^T \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

这里符号 $*$ 表示的是对角位置矩阵的转置, 下同.

引理 2 给出一 LMI 稳定区域 \mathcal{D} , 如果存在正定矩阵 $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$, 使得

$$\Gamma \otimes X + \Pi \otimes (XA) + \Pi^T \otimes (XA)^T < 0, \tag{9}$$

则称系统 $x(k+1) = Ax(k)$ 是二次 \mathcal{D} 稳定的.

证明 定义 $X = \mathcal{X}^{-1}$, 在式 (6) 左右两次分别乘以矩阵 $I \otimes X$ 及其转置, 便可得到不等式 (9). 这里 I 为适当维数的单位矩阵, 下同. \square

3 具有 \mathcal{D} 稳定约束的系统 H_∞ 性能分析

定理 1 给定一 H_∞ 性能 $\gamma > 0$ 和任一 LMI 稳定区域 \mathcal{D} . 如果存在矩阵 $X(h), X(h^+) > 0$ 和 G , 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -X(h) & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ G^T \tilde{A}(h) & G^T \tilde{B}(h) & -G - G^T + X(h^+) & * \\ \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & * \\ \alpha_{21} & -I \otimes G - I \otimes G^T \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其中

$$\alpha_{11} = \Gamma \otimes X(h) + \Pi \otimes G^T \tilde{A}(h) + \Pi^T \otimes \tilde{A}^T(h)G,$$

$$\alpha_{21} = I \otimes X(h) - I \otimes G + \Pi \otimes G^T \tilde{A}(h).$$

则滤波误差系统 (4) 在该区域 \mathcal{D} 内是二次稳定的, 且这个指定的 H_∞ 性能 γ 是可以保证的.

证明 考虑一个模糊 Lyapunov 函数 $V(\psi(k)) = \psi^T(k)X(h)\psi(k), X_i > 0$. 定义

$$X(h^+) = \sum_{l=1}^r h_l(\xi(k+1))X_l,$$

则由式 (4), 可以获得

$$\begin{aligned} \Delta V(\psi(k)) + e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) = \\ \zeta^T(k) \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X(h^+) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X(h) & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right) \zeta(k), \end{aligned} \tag{12}$$

这里 $\zeta(k) = [\psi^T(k) \ w^T(k)]^T$. 因此, 如果

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X(h^+) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X(h) & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立, 则对于任意 $\zeta(k) \neq 0$ 有 $V(\psi(k+1)) - V(\psi(k)) + e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) < 0$.

应用 Schur 补定理, 式 (13) 等于

$$\begin{bmatrix} -X(h) & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & -X^{-1}(h^+) & * \\ \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

由于不等式 $[X(h^+) - G]^T X^{-1}(h^+) [X(h^+) - G] \geq 0$ 意味着 $-G^T X(h^+) G \leq -G^T - G + X(h^+)$. 在式 (14) 左右两侧分别乘以矩阵 $\text{diag}\{I, I, G^T, I\}$ 及其转置, 如果式 (10) 成立, 则 (14) 成立, 故根据文献 [12], 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k).$$

由引理 2, 如果存在正定矩阵 $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{aligned} & \Gamma \otimes X + \Pi \otimes (X\tilde{A}(h)) + \\ & \Pi^T \otimes (X\tilde{A}(h))^T < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

成立, 则系统 (4) 在区域 \mathcal{D} 内是二次稳定的.

根据矩阵的 Kronecker 性质, 式 (15) 等于

$$\begin{aligned} & \Gamma \otimes X + (I \otimes X)(\Pi \otimes \tilde{A}(h)) + \\ & (\Pi \otimes \tilde{A}(h))^T (I \otimes X)^T < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (16) 和引理 1 很容易得到不等式 (11). \square

4 具有 \mathcal{D} 稳定约束的 H_∞ 滤波器设计

定理 2 考虑滤波误差系统 (4), 对于给定的 $\gamma > 0$ 和 LMI 稳定区域 \mathcal{D} , 若存在矩阵 $P_1(h), P_2(h), P_3(h), P_1(h^+), P_2(h^+), P_3(h^+)$ ($\begin{bmatrix} P_1(h^+) & * \\ P_2^T(h^+) & P_3(h^+) \end{bmatrix} > 0$), $R, S, W, \mathbf{A}_F(h), \mathbf{B}_F(h), \mathbf{C}_F(h), \mathbf{D}_F(h)$, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P_1(h) & * & * & * & * & * \\ -P_2^T(h) & -P_3(h) & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ \epsilon_{41} & \mathbf{A}_F(h) & \epsilon_{43} & \epsilon_{44} & * & * \\ \epsilon_{51} & \mathbf{A}_F(h) & \epsilon_{53} & \epsilon_{54} & \epsilon_{55} & * \\ \epsilon_{61} & -\mathbf{C}_F(h) & \epsilon_{63} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma \otimes \mathcal{P} + \Pi \otimes \mathcal{R} + \Pi^T \otimes \mathcal{R}^T & * \\ I \otimes \mathcal{P} - I \otimes \mathcal{S} + \Pi \otimes \mathcal{R} & -I \otimes \mathcal{S} - I \otimes \mathcal{S}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

则系统在区域 \mathcal{D} 内是二次稳定的, 且具有 H_∞ 性能指

标 γ . 这里

$$\epsilon_{41} = R^T A(h) + \mathbf{B}_F(h)C(h),$$

$$\epsilon_{43} = R^T B(h) + \mathbf{B}_F(h)D(h),$$

$$\epsilon_{44} = -R - R^T + P_1(h^+),$$

$$\epsilon_{51} = S^T A(h) + \mathbf{B}_F(h)C(h),$$

$$\epsilon_{53} = S^T B(h) + \mathbf{B}_F(h)D(h),$$

$$\epsilon_{54} = -W^T - S^T + P_2^T(h^+),$$

$$\epsilon_{55} = -W - W^T + P_3(h^+),$$

$$\epsilon_{61} = L(h) - \mathbf{D}_F(h)C(h),$$

$$\epsilon_{63} = -\mathbf{D}_F(h)D(h),$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1(h) & * \\ P_2^T(h) & P_3(h) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} R & S \\ W^T & W \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R^T A(h) + \mathbf{B}_F(h)C(h) & \mathbf{A}_F(h) \\ S^T A(h) + \mathbf{B}_F(h)C(h) & \mathbf{A}_F(h) \end{bmatrix}.$$

证明 定义^[4]

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_4 & G_3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_3^{-1}G_4 \end{bmatrix},$$

$$R = G_1, \quad S = G_2G_3^{-1}G_4, \quad W = G_4^T G_3^{-1}G_4,$$

$$\Sigma^T X(h) \Sigma = \Sigma^T \begin{bmatrix} X_1(h) & X_2(h) \\ X_2^T(h) & X_3(h) \end{bmatrix} \Sigma =$$

$$\begin{bmatrix} P_1(h) & * \\ P_2^T(h) & P_3(h) \end{bmatrix}.$$

在式 (10) 左右两侧分别乘以矩阵 $\text{diag}\{\Sigma^T, I, \Sigma^T, I\}$ 及其转置, 在式 (11) 左右两侧分别乘以矩阵 $\text{diag}\{I \otimes \Sigma^T, I \otimes \Sigma^T\}$ 及其转置, 可获得不等式 (17) 和 (18), 其中

$$\mathbf{A}_F(h) = G_4^T \mathbf{A}_F(h) G_3^{-1} G_4,$$

$$\mathbf{B}_F(h) = G_4^T \mathbf{B}_F(h),$$

$$\mathbf{C}_F(h) = \mathbf{C}_F(h) G_3^{-1} G_4,$$

$$\mathbf{D}_F(h) = \mathbf{D}_F(h). \quad (19)$$

由此, 定理得证. \square

由定理 2, 有如下的滤波器设计条件:

定理 3 考虑滤波误差系统 (4), 对于给定的 $\gamma > 0$ 和 LMI 稳定区域 \mathcal{D} , 如果存在对称矩阵 $P_{1i}, P_{2i}, P_{3i}, R, S, W, \mathbf{A}_{Fi}, \mathbf{B}_{Fi}, \mathbf{C}_{Fi}, \mathbf{D}_{Fi}, i = 1, 2, \dots, r$, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\theta_{iil} < 0, \quad \theta_{ijl} + \theta_{jil} < 0, \quad i, j, l = 1, 2, \dots, r, \quad i < j; \quad (20)$$

$$\Omega_{ii} < 0, \quad \Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \quad i < j. \quad (21)$$

则系统在区域 \mathcal{D} 内是二次稳定的, 具有 H_∞ 性能指标 γ . 其中

$$\Theta_{ijl} = \begin{bmatrix} -P_{1i} & * & * & * & * & * \\ -P_{2i}^T & -P_{3i} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ \epsilon_{41ij} & \mathbf{A}_{Fj} & \epsilon_{43ij} & \epsilon_{44l} & * & * \\ \epsilon_{51ij} & \mathbf{A}_{Fj} & \epsilon_{53ij} & \epsilon_{54l} & \epsilon_{55l} & * \\ \epsilon_{61ij} & -\mathbf{C}_{Fj} & -\mathbf{D}_{Fj} \mathbf{D}_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma \otimes \mathcal{P}_i + \Pi \otimes \mathcal{R}_{ij} + \Pi^T \otimes \mathcal{R}_{ij}^T & * \\ I \otimes \mathcal{P}_i - I \otimes \mathcal{S} + \Pi \otimes \mathcal{R}_{ij} & -I \otimes \mathcal{S} - I \otimes \mathcal{S}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{Fj} = G_4^T \mathbf{A}_{Fj} G_3^{-1} G_4, \mathbf{B}_{Fj} = G_4^T \mathbf{B}_{Fj},$$

$$\mathbf{C}_{Fj} = \mathbf{C}_{Fj} G_3^{-1} G_4, \mathbf{D}_{Fj} = \mathbf{D}_{Fj},$$

$$\epsilon_{41ij} = R^T \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{Fj} \mathbf{C}_i, \epsilon_{43ij} = R^T \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_{Fj} \mathbf{D}_i,$$

$$\epsilon_{44l} = -R - R^T + P_{1l}, \epsilon_{51ij} = S^T \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{Fj} \mathbf{C}_i,$$

$$\epsilon_{53ij} = S^T \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_{Fj} \mathbf{D}_i, \epsilon_{54l} = -W^T - S^T + P_{2l}^T,$$

$$\epsilon_{55l} = -W - W^T + P_{3l}, \epsilon_{61ij} = L_i - \mathbf{D}_{Fj} \mathbf{C}_i,$$

$$\mathcal{P}_i = \begin{bmatrix} -P_{1i} & * \\ -P_{2i}^T & -P_{3i} \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{ij} = \begin{bmatrix} R^T \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{Fj} \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_{Fj} \\ S^T \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{Fj} \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_{Fj} \end{bmatrix}.$$

式(3)中所要设计的滤波器参数由下式给出:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Fi} & \mathbf{B}_{Fi} \\ \mathbf{C}_{Fi} & \mathbf{D}_{Fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_4^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Fi} & \mathbf{B}_{Fi} \\ \mathbf{C}_{Fi} & \mathbf{D}_{Fi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_4^{-1} G_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (22)$$

定理3的证明很容易,由文献[10]及式(19)即可获得,限于篇幅,此略.

5 仿真分析

考虑如下一具有两条模糊规则的离散T-S模糊系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(h)x(k) + B(h)w(k), \\ y(k) &= C(h)x(k) + D(h)w(k), \\ z(k) &= L(h)x(k). \end{aligned} \quad (23)$$

这里

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1.7 \ 2.8], C_2 = [-1.9 \ 2.2], D_1 = 0.05,$$

$$D_2 = 0.05, L_1 = [0.8 \ 0.2], L_2 = [0.4 \ 1.2];$$

$$w(k) = \begin{cases} \sin(0.5k), & 30 \leq k \leq 50; \\ 0, & k \leq 30, k \geq 50. \end{cases}$$

其隶属度函数为 $h_1(x_1(k)) = \sin^2 x_1(k)$, $h_2(x_1(k)) = 1 - h_1(x_1(k))$.

考虑一个如图1所示的圆盘LMI稳定区域 \mathcal{D} , 这

里 $q=0.5, r=0.5$, 则式(5)中的参数为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -r & -q \\ -q & -r \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

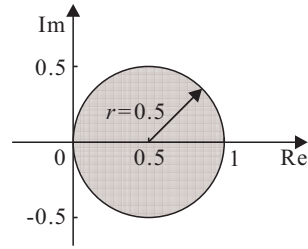


图1 LMI 稳定区域

求解矩阵不等式(20)和(21),可获得 H_∞ 性能最优值为 $\gamma_{\min} = 2.5814$, 且有

$$\mathbf{A}_{F1} = \begin{bmatrix} 0.3509 & 0.6534 \\ 0.6357 & 2.2063 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{F1} = \begin{bmatrix} 0.0325 \\ 0.0395 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{F1} = [-0.4835 \ 0.0704], \mathbf{D}_{F1} = 0.0757,$$

$$\mathbf{A}_{F2} = \begin{bmatrix} 0.3491 & 0.6285 \\ 0.0191 & 1.2927 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{F2} = \begin{bmatrix} 0.0444 \\ 0.1543 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{F2} = [-0.3856 \ -0.8150], \mathbf{D}_{F2} = 0.0938,$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.8390 & 1.0431 \\ 0.6738 & 4.7354 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0.5490 & 0.7733 \\ 0.4032 & 3.7780 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.5657 & 0.4960 \\ 0.6204 & 3.7332 \end{bmatrix}.$$

利用SVD方法,可以获得

$$G_4^{-T} = \begin{bmatrix} 0.1544 & 0.9880 \\ 0.9880 & -0.1544 \end{bmatrix},$$

$$G_4^{-1} G_3 = \begin{bmatrix} 0.0477 & 2.0867 \\ 0.2567 & -0.3881 \end{bmatrix}.$$

将 $\mathbf{A}_{Fj}, \mathbf{B}_{Fj}, \mathbf{C}_{Fj}, \mathbf{D}_{Fj}, G_4^{-T}, G_4^{-1} G_3, j = 1, 2$, 代入式(22),可以获得滤波器矩阵

$$\mathbf{A}_{F1} = \begin{bmatrix} 0.6181 & 0.5385 \\ 0.0902 & 0.4003 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{F1} = \begin{bmatrix} 0.0440 \\ 0.0260 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{F1} = [-0.0050 \ -1.0361], \mathbf{D}_{F1} = 0.0757,$$

$$\mathbf{A}_{F2} = \begin{bmatrix} 0.3563 & -0.3816 \\ 0.1245 & 0.5500 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{F2} = \begin{bmatrix} 0.1593 \\ 0.0201 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{F2} = [-0.2276 \ -0.4884], \mathbf{D}_{F2} = 0.0938.$$

滤波误差子系统的极点分别如下:

$$i = 1, j = 1,$$

$$0.7550, 0.7236, 0.2764, 0.2634;$$

$$i = 1, j = 2,$$

$$0.7236, 0.2764,$$

$$0.4532 + 0.1953i, 0.4532 - 0.1953i;$$

$$i = 2, j = 1,$$

0.755 0, 0.656 2, 0.243 8, 0.263 4;
 $i = 2, j = 2,$
 0.656 2, 0.243 8,
 $0.453 2 + 0.195 3i, 0.453 2 - 0.195 3i.$

显然, 它们都位于指定的稳定区域 \mathcal{D} 内. 因此, 由文献 [2] 可知, 整个滤波误差系统满足 \mathcal{D} 稳定性的要求.

图 2 和图 3 分别给出了滤波器状态和滤波误差的仿真结果.

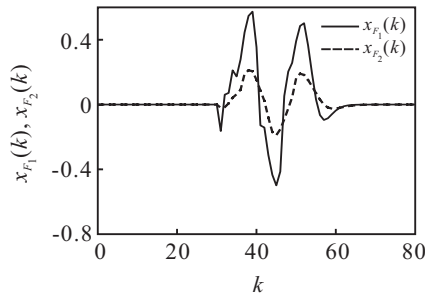


图 2 滤波器状态响应

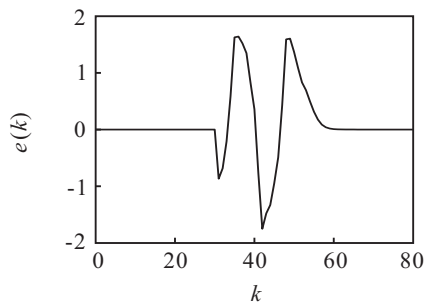


图 3 滤波误差响应

从图 2 和图 3 及极点分布可以看出, 本文设计的滤波器完全可以满足指定的稳定性和 H_∞ 性能要求.

6 结 论

本文针对离散 T-S 模糊系统, 采用模糊 Lyapunov 函数方法和 LMI 技术, 给出了一种 \mathcal{D} 稳定性约束下的 H_∞ 滤波器设计方法. 相对于以往文献采用状态转换的方法, 本文直接采用增加松弛变量的方法将得到的设计条件归结为 LMI 形式. 仿真结果表明, 所提出的方法是可行而有效的.

参考文献(References)

[1] Nagpal K M, Khargonekar P P, Ksantini M. Filtering and smoothing in an H_∞ setting[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(2): 152-166.
 [2] Nguang S K, Assawinchaichote W. H_∞ filtering for fuzzy dynamic systems with \mathcal{D} stability constraints[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2003, 50(11): 1503-1508.
 [3] Gao H J, Wang C. Delay-dependent robust H_∞ and L_2 - L_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay

systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(9): 1661-1666.

- [4] Gao H J, Zhao Y, Lam J, et al. H_∞ fuzzy filtering of nonlinear systems with intermittent measurements[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(2): 291-300.
 [5] 陈淼, 王道波, 王志胜. 极点约束不确定系统非脆弱滤波器的设计[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1261-1265. (Chen M, Wang D B, Wang Z S. Design of non-fragile filter for uncertain linear system with pole constraints[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1261-1265.)
 [6] Guo X G, Yang G H. Non-fragile H_∞ filter design for delta operator formulated systems with circular region pole constraints: An LMI optimization approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(9): 1209-1215.
 [7] Zhou S S, Lam J, Xue A K. H_∞ filtering of discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov function approach[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(2): 180-139.
 [8] Xu S, Chen T. An LMI approach to the H_∞ filter design for uncertain systems with distributed delays[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2004, 51(4): 195-201.
 [9] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, 1985, SMC-15(1): 116-132.
 [10] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(2): 250-265.
 [11] 常晓恒, 井元伟, 高曦莹, 等. T-S模糊系统 H_∞ 跟踪控制设计[J]. 控制与决策, 2008, 23(3): 329-332. (Chang X H, Jing Y W, Gao X Y, et al. H_∞ tracking control design of T-S fuzzy systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(3): 329-332.)
 [12] Chang X H, Yang G H. Relaxed stability condition and state feedback H_∞ controller design for T-S fuzzy systems[J]. Int J of Control, Automation, and Systems, 2009, 7(1): 139-144.
 [13] Guerra T M, Vermeiren L. LMI based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form[J]. Automatica, 2004, 40(5): 823-829.
 [14] Delmotte F, Guerra T M, Ksantini M. Continuous Takagi-Sugeno's models: Reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(3): 426-438.
 [15] Chilali M, Gahinet P. H_∞ design with pole place constraints: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 358-367.