第 26 卷 第 7 期
Vol. 26 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 7 月
Jul. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 07-1056-04

基于区间粗糙算子的粗糙随机多准则决策方法

王坚强，唐 平

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 定义了区间粗糙随机变量、区间粗糙数的运算法则以及期望值和区间粗糙集结算子 (WIRDAA). 针对准则权重信息不完全, 准则值为区间粗糙随机变量的粗糙随机多准则决策问题, 提出一种基于 WIRDAA 算子的决策方法. 该方法首先计算出变量的期望值矩阵, 利用距离最小化建立模型求解出准则权重; 然后利用 WIRDAA 算子求出各方案的综合评价值, 通过比较得到方案集的排序; 最后通过实例表明了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则决策；区间粗糙随机变量；集结算子

中图分类号: C934　　**文献标识码:** A

Rough stochastic multi-criteria decision-making approach based on interval rough operators

WANG Jian-qiang, *TANG Ping*

(School of Business，Central South University，Changsha 410083，China．Correspondent：WANG Jian-qiang，E-mail: jqwang@csu.edu.cn)

Abstract: The definition of interval rough stochastic variables and the arithmetic operations as well as the expected value of interval rough stochastic numbers are given. And an interval rough operator called interval rough distance weighted arithmetic averaging(WIRDAA) is introduced. For the problem with information of criterion weights incomplete and the evaluation under each criterion represented as interval rough stochastic variables, a method based on WIRDAA operator is proposed. The method calculates the expected value of variables to obtain the expected value matrix. Then a programming model is built to get the criterion weights with the objective function of minimizing the distance. By WIRDAA operator, the overall evaluation of each alternate is obtained, and the resulted ordering of alternates is obtained according to their overall evaluations. Finally, an example shows the feasibility and validity of the proposed approach.

Key words: multi-criteria decision-making；interval rough stochastic variables；aggregation operators

1 引 言

多准则决策方法已广泛应用于经济、军事、管理、环境工程等众多领域. 在实际决策中, 由于社会经济环境的日益复杂和不确定性以及事物本身的模糊性、人类知识结构和专业水平的局限性, 决策信息通常具有不确定性. 不确定性的表现形式是多种多样的, 如随机性、模糊性、粗糙性、灰色及其多重不确定性等. 目前, 单一不确定性多准则决策问题已有很多研究, 而对于同时具有两种不确定性的多准则决策问题的研究也渐成焦点.

自从 Pawlak[1]提出粗糙集理论以来, 该理论便被成功地应用于机器学习、决策分析、过程控制、模式识别与数据挖掘等领域. 粗糙集通过下近似和上近似来刻画, 可以较准确地描述一些具有含糊性和不确定性的信息. 不难发现, 有很多实际的 MCDM 问题, 其准则值可通过形如 $([a, b], [c, d])$ 的粗糙集 (本文称其为区间粗糙数) 表示, 而且这种表示通过统计数据计算即可得到. 例如在项目评估决策问题中, 某项目的投资额用一个区间粗糙数 $([4, 6], [2, 8])$ 表示, 其解释为该项目的投资额在 $2 \sim 8$ 之间是肯定的, 而在 $4 \sim 6$ 之间是可能的. 同时, Liu[2]于 2002 年提出了粗糙空间、粗糙变量、粗糙运算、信赖性测度、信赖性分布、乐观值、悲观值、期望值算子、方差算子等概念, 以及几种粗糙规划模型, 并在 2004 年建立了信赖

收稿日期: 2010-04-15；**修回日期:** 2010-05-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70771115)；国家创新研究群体科研基金项目(70921001)；国家自然科学基金重点项目(70631004).

作者简介: 王坚强(1963−), 男, 教授, 博士, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究；唐平(1985−), 男, 硕士生, 从事决策理论与应用、信息管理等研究.

性理论[3], 给出了研究粗糙现象的公理化方法.

随机多准则决策是准则值为随机变量的多准则决策问题. 针对随机不确定性的多准则决策问题, 多准则期望效用理论和随机优势理论的应用比较广泛. 多属性效用理论主要通过设定自然状态的概率分布和效用函数, 并根据方案效用的期望值大小来得到对各方案的一个完全排序[4-5]. VonNermann 等人[6]将单目标期望效用理论扩展到多准则决策情形下, 建立了多准则期望效用理论. 有关随机多准则决策问题已有较多的研究, 文献 [7] 研究了离散的风险型多准则决策问题, 该方法基于加权法的思想, 利用非线性规划方法确定客观权重; 姜宁等人[8]研究了一类不完全信息随机不确定型多准则决策问题; 基于主客观赋权的思想, 姚升保等人[9-10]解决了准则值是有限区间上的连续型随机变量的随机多准则决策问题; 于义彬等人[11]基于理想点法的思想也建立了一种风险型多准则决策模型, 并给出了准则权重的确定方法.

粗糙随机变量由 Liu[2]于 2002 年提出的. 所谓粗糙随机变量是指取值于粗糙变量集合上的随机变量, 即取 "粗糙变量" 值的随机变量. 同时, Liu[2]提出了粗糙随机运算、机会测度、机会分布、乐观值、悲观值、期望值算子等概念, 以及几种粗糙随机规划模型.

迄今为止, 人们尚没有对粗糙随机多准则决策问题进行系统研究. 此类问题能够客观地描述众多决策问题, 为此本文在前人工作的基础上, 定义了区间粗糙随机变量及其相关概念, 并给出了区间粗糙集结算子, 为解决准则值为区间粗糙随机变量的多准则决策问题提供了新的方法.

2　区间粗糙数

一个粗糙集最初是通过一个等价关系而产生一对精确集, 分别称为下近似和上近似. Slowinski 等人[12]将等价关系引申到一般情形, 提出了一种不具有对称性和传递性, 但有自反性的二元相似关系 $\cong$, 并给出了基于相似关系的粗糙近似的一般定义.

定义 1[12]　设 U 是一个论域, 并且 X 是一个表示概念的集合, 它的下近似和上近似分别定义为

$$\underline{X}=\{x\in U|R^{-1}(x)\subseteq X\},\ \overline{X}=\bigcup_{x\in X}R(x).$$

其中: $R(x)=\{y\in U|y\cong x\}$, $R^{-1}(x)=\{y\in U|x\cong y\}$.

定义 2[1]　具有相同下近似和上近似的所有集合的整体称为一个粗糙集, 记为 $(\underline{X},\overline{X})$.

定义 3[2]　一个粗糙变量 ξ 是从粗糙空间 $(\varLambda,\varDelta,A,\pi)$ 到实数集的一个可测函数. 即, 设 $(\varLambda,\varDelta,A,\pi)$ 为一个粗糙空间, ξ 是从 $\varLambda$ 到实数集 R 的函数, 若对 R 的每个 Borel 集 B, 有 $\{\lambda\in\varLambda|\xi(\lambda)\in B\}\in A$, 则称 ξ 为粗糙空间 $(\varLambda,\varDelta,A,\pi)$ 上的粗糙变量. 更进一步, $\xi=\{\xi(\lambda)|\lambda\in\varDelta\}$, $\bar{\xi}=\{\xi(\lambda)|\lambda\in\varLambda\}$, 分别称为粗糙变量 ξ 的下近似和上近似. 这里 $\xi\subset\bar{\xi}$.

定义 4　一个区间粗糙数是下近似和上近似均为区间的粗糙变量, 记为 $([a,b],[c,d])$, 其中 $c\leqslant a<b\leqslant d$.

由文献 [2-3] 可得到区间粗糙数的算术运算、期望值定义以及排序方法.

定义 5　设 $\xi_i=([a_i,b_i],[c_i,d_i])\ (i=1,2)$ 为 2 个区间粗糙数, k 为实数, 则有

$$\xi_1+\xi_2=$$
$$([a_1+a_2,b_1+b_2],[c_1+c_2,d_1+d_2]);\tag{1}$$

$$k\xi_1=\begin{cases}([ka_1,kb_1],[kc_1,kd_1]),\ k\geqslant 0;\\([kb_1,ka_1],[kd_1,kc_1]),\ k<0.\end{cases}\tag{2}$$

定义 6　设 $\xi_1=([a_1,b_1],[c_1,d_1])$ 为区间粗糙数, 则 ξ_1 的期望值为

$$\mathrm{E}\,[\xi_1]=\frac{1}{4}(a_1+b_1+c_1+d_1).\tag{3}$$

对于区间粗糙数, 可按其期望值的大小进行排序, 即设 ξ_1 和 ξ_2 为 2 个区间粗糙数, 则 $\xi_1>\xi_2$ 当且仅当 $\mathrm{E}\,[\xi_1]>\mathrm{E}\,[\xi_2]$.

定义 7[3]　设 $\xi_i=([a_i,b_i],[c_i,d_i])\ (i=1,2)$ 为 2 个区间粗糙数, 则它们的距离定义为

$$d(\xi_1,\xi_2)=$$
$$\frac{|a_1-a_2|+|b_1-b_2|+|c_1-c_2|+|d_1-d_2|}{4}.\tag{4}$$

3　区间粗糙随机变量

定义 8　设 $\varOmega$ 为样本空间, A 为事件域, 对于任意随机事件 $\omega\in A$, 定义函数 $P_r(\omega)$, $0\leqslant P_r(\omega)\leqslant 1$, 称 $P_r(\omega)$ 为随机事件 ω 的概率, P_r 为 $(\varOmega,A)$ 上的概率, $(\varOmega,A,P_r)$ 为概率空间.

在概率为实数和状态值为区间粗糙数的决策问题中, 区间粗糙随机变量是对该类问题进行描述和研究的基础. 下面在上文所定义的概率空间的基础上, 给出区间粗糙随机变量的一些相关定义.

定义 9　设 ξ 是一个从概率空间 $(\varOmega,A,P_r)$ 到区间粗糙数集合的函数, 并且对于 R 上的任何 Borel 集 B, $T_r\{\xi(\omega)\in B\}$ 和 $T_r\{P_r(\omega)\in B\}$ 都是 ω 的可测函数, 则称 ξ 为一个区间粗糙随机变量.

例如, 式 (5) 为一个区间粗糙随机变量, 其中 $([a_i,b_i],[c_i,d_i])$ 表示其第 i 个状态的值, $P_r(\omega_i)$ 表示第 i 个状态的概率.

$$\xi=\begin{cases}([a_1,b_1],[c_1,d_1]),\ P_r(\omega_1);\\([a_2,b_2],[c_2,d_2]),\ P_r(\omega_2);\\\qquad\vdots\\([a_n,b_n],[c_n,d_n]),\ P_r(\omega_n).\end{cases}\tag{5}$$

定义 10 设 ξ 为一个区间粗糙随机变量, 如果存在 $\sum_{i=1}^{n} P_r(\omega_i)\times\xi_i$, 则称 $\sum_{i=1}^{n} P_r(\omega_i)\times\xi_i$ 为区间粗糙随机变量的期望值, 记作

$$\mathrm{E}(\xi)=\sum_{i=1}^{n} P_r(\omega_i)\times\xi_i. \tag{6}$$

根据区间粗糙数的运算法则 (1) 和 (3), 可知该期望值为区间粗糙数.

4 基于 WIRDAA 算子的粗糙随机多准则决策方法

对于一个粗糙随机多准则决策问题, 设有 m 个方案 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, n 个决策准则 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$, 且各准则相互独立, 则对应的权向量为 $W=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$, 且 $\omega_j\in[0,1]$, $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$, W 信息不完全, 且 $(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}\in\Omega$.

a_i 关于 c_j 的准则值为区间粗糙随机变量 ξ_{ij} (假设区间粗糙随机变量均可以根据实际情况确定各自的区间粗糙数取值, 并确定相应概率), 从而可构成区间粗糙随机决策矩阵 $M=(\xi_{ij})_{m\times n}$. 在各准则权重信息不完全的情况下, 欲确定方案集 $A=\{a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_m\}$ 的最佳方案或排序.

定义 11 设 $M=(\xi_{ij})_{m\times n}$ 为区间粗糙随机决策矩阵, 则称 $x^+=(\xi_1^+,\xi_2^+,\cdots,\xi_n^+)$ 为方案的正理想点. 其中: $\xi_j^+=([a_j^+,b_j^+],[c_j^+,d_j^+])$, $a_j^+=\max_i\{a_{ij}\}$, $b_j^+=\max_i\{b_{ij}\}$, $c_j^+=\max_i\{c_{ij}\}$, $d_j^+=\max_i\{d_{ij}\}$.

定义 12 设 $M=(\xi_{ij})_{m\times n}$ 为区间粗糙随机决策矩阵, $x^+=(\xi_1^+,\xi_2^+,\cdots,\xi_n^+)$ 为方案的正理想点. 根据定义 7, 令

$$d_{ij}=d(\xi_{ij},\xi_j^+)=\frac{|a_j^+-a_{ij}|+|b_j^+-b_{ij}|+|c_j^+-c_{ij}|+|d_j^+-d_{ij}|}{4},$$

若

$$f_\omega(d_{i1},d_{i2},\cdots,d_{in})=\sum_{j=1}^{n}\omega_j d_{ij},$$
$$i=1,2,\cdots,m, \tag{7}$$

则称 f 为加权的区间粗糙距离平均算子, 简称为 WIRDAA 算子. 显然, $f_\omega(d_{i1},d_{i2},\cdots,d_{in})$ 值越小, 说明方案 a_i 与方案的正理想点距离越小, 从而方案 a_i 越优.

根据上述分析, 建立一个线性规划模型来求解准则权重值, 有

$$\min f_\omega=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_j d_{ij};$$
$$\text{s.t. }\ \omega\in\Omega,\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j=1,\ \omega_j\geqslant 0. \tag{8}$$

求解线性规划模型, 得到最优解为

$$W^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots,\omega_n^*).$$

基于上述分析, 下面给出一种基于 WIRDAA 算子的粗糙随机多准则决策方法.

上述问题的决策步骤如下:

Step 1: 根据定义 10, 依次对方案计算其在各准则上的期望值. 方案 a_i 在准则 c_j 上的评价值 ξ_{ij} 的期望值可表示如下:

$$\mathrm{E}(\xi_{ij})=\sum_{k=1}^{t} P_r(\omega_{ij}^k)\times\xi_{ij}^k. \tag{9}$$

其中 t 为区间粗糙随机变量可能取值的个数, 它随区间粗糙随机变量取值个数的不同而不同.

Step 2: 规范化决策信息. 对于 MACM 问题, 常见的准则类型有效益型和成本型. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响, 首先给出区间粗糙准则值的规范化公式对准则值进行规范化处理, 可采用下列极差比例转换法:

1) 对于效益型准则, 转换公式为

$$\frac{\xi_{ij}-\min_i\{c_{ij}\}}{\max_i\{d_{ij}\}-\min_i\{c_{ij}\}}; \tag{10}$$

2) 对于成本型准则, 转换公式为

$$\frac{\max\{d_{ij}\}-\xi_{ij}}{\max_i\{d_{ij}\}-\min_i\{c_{ij}\}}. \tag{11}$$

由定义 5 可知, 规范化准则值仍为区间粗糙数. 为简单起见, 经规范化处理后, 方案 a_i 在准则 c_j 下的准则值仍记为 $\xi_{ij}=([a_{ij},b_{ij}],[c_{ij},d_{ij}])$. 从而可得到规范化的决策矩阵

$$R=\begin{bmatrix}\xi_{11}&\cdots&\xi_{1j}&\cdots&\xi_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \xi_{i1}&\cdots&\xi_{ij}&\cdots&\xi_{in}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \xi_{m1}&\cdots&\xi_{mj}&\cdots&\xi_{mn}\end{bmatrix}.$$

Step 3: 建立模型, 求解准则权重. 利用式 (7) 和 (8) 建立线性规划模型, 通过 Matlab 软件求解得到 $W^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots,\omega_n^*)$.

Step 4: 集结方案准则值. 利用 WIRDAA 算子对方案 a_i 的准则值进行集结, 得到 a_i 的综合评价值 Z_i, $i=1,2,\cdots,m$.

Step 5: 对方案集进行排序. 比较各方案的综合评价值 Z_i. Z_i 越小, 方案 a_i 越优.

5 实例分析

某投资银行拟对上市公司进行项目投资, 有 4 个备选公司 $A_1\sim A_4$, 3 个评价准则 $C_1\sim C_3$ (准则分别为年产值, 社会效益, 公司竞争力). 由于是对未来不

确定的环境作出判断, 受到国家政策、社会经济环境等因素的影响, 因而以上准则均为随机变量. 现由专家对各公司按上述3项准则进行评估, 已知各上市公司在每个准则下对应的自然状态基本一致, 且各公司对应的自然状态概率完全确定, 各种准则的粗糙随机决策表如表1～表3所示. 决策者给出准则权系数的不完全确定信息为 $\Omega=\{0.15\leqslant w_1\leqslant 0.25, 0.15\leqslant w_2\leqslant 0.35, 0.3\leqslant w_3\leqslant 0.45, w_1+w_2+w_3=1\}$, 试确定最优投资公司.

表 1　在准则 C_1 下的粗糙随机决策表

方案	概　率		
	$P_1=0.2$	$P_2=0.3$	$P_3=0.5$
A_1	([8,9],[3,12])	([7,8],[1,12])	([6,7],[1,8])
A_2	([6,7],[2,9])	([5,7],[2,8])	([4,6],[1,9])
A_3	([4,5],[2,7])	([3,5],[1,6])	([2,4],[0,6])
A_4	([7,8],[1,12])	([6,7],[3,9])	([7,8],[4,10])

表 2　在准则 C_2 下的粗糙随机决策表

方案	概　率			
	$P_1=0.1$	$P_2=0.2$	$P_2=0.9$	$P_3=0.7$
A_1	([7,8],[3,12])		([6,7],[1,9])	
A_2	([5,7],[2,9])		([8,9],[4,11])	
A_3	([6,8],[2,10])	([4,5],[1,9])		([3,6],[1,8])
A_4	([5,6],[2,8])	([7,8],[6,12])		([8,9],[6,12])

表 3　在准则 C_3 下的粗糙随机决策表

方案	概　率	
	$P_1=0.4$	$P_2=0.6$
A_1	([5,7],[1,12])	([6,8],[3,14])
A_2	([3,6],[2,9])	([5,6],[2,9])
A_3	([7,9],[5,15])	([6,7],[1,12])
A_4	([4,5],[2,7])	([5,7],[1,13])

根据定义10, 依次对方案计算其在各准则上的期望值, 得到期望矩阵 S 如下:

$$S=\left[\begin{matrix}([6.7,7.7],[1.4,10]) & ([6.1,7.1],[1.2,9.3])\\ ([4.7,6.5],[1.5,8.7]) & ([7.7,8.8],[3.8,10.8])\\ ([2.7,4.5],[0.7,6.2]) & ([3.5,6],[1.1,8.4])\\ ([6.7,7.7],[3.1,10.1]) & ([7.5,8.5],[5.6,11.6])\end{matrix}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{matrix}([5.6,7.6],[2.2,13.2])\\ ([4.2,6],[2,9])\\ ([6.4,7.8],[2.6,13.2])\\ ([4.6,6.2],[1.4,10.6])\end{matrix}\right].$$

利用式(8)建立线性规划模型, 通过Matlab软件求解得到 $W^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\omega_3^*)=(0.25,0.3,0.45)$.

利用WIRDAA算子对方案 A_i 的准则值进行集结, 得到 A_i 的综合评价值 $Z_1=0.097\,4$, $Z_2=0.144\,5$, $Z_3=0.264\,1$, $Z_4=0.003\,6$.

比较各方案的综合评价值 Z_i, 得 $Z_4>Z_1>Z_2>Z_3$, A_4 为最佳方案.

6　结　论

本文定义了区间粗糙数、区间粗糙随机变量及其相关概念, 给出了区间粗糙集结算子, 即加权区间粗糙距离平均算子, 提出了一种基于区间粗糙集结算子的决策方法, 并给出了具体步骤和实例, 有效地解决了准则值为区间粗糙随机变量的多准则决策问题, 从而丰富了粗糙集理论. 该方法可用于供应商选择、投资效益评价等相关决策.

参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Information and Computer Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] Liu B. Theory and practice of uncertain programming[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.

[3] Liu B. Uncertain theory: An introduction to its axiomatic foundation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[4] Keeney R L, Raiffa H. Decisions with multiple objectives[M]. New York: John Wiley Sons, 1976.

[5] Von Winterfeldt D, Edwards W. Decision analysis and behavioral research[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[6] Von Neumann J, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior[M]. Princeton: Princeton University Press, 1944.

[7] 王效俐, 吴健中. 风险型多目标决策的非线性规划模型[J]. 决策与决策支持系统, 1995, 4(1): 54-59.
(Wang X L, Wu J Z. Nonlinear programming model of risky multiobjective decision making[J]. J of Decision Making and Decision Support Systems, 1995, 4(1): 54-59.)

[8] 姜宁, 李登峰, 胡维礼. 不完全信息多属性决策的集成模型与方法[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(2): 71-73.
(Jiang N, Li D F, Hu W L. An integrated model and method for multiattribute decision making with incomplete information[J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(2): 71-73.)

[9] 姚升保, 岳超源, 张鹏, 等. 风险型多属性决策的一种求解方法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2005, 33(11): 83-85.
(Yao S B, Yue C Y, Zhang P, et al. Method for solving multi-attribute decision-making problems with risk[J]. Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2005, 33(11): 83-85.)

[10] 姚升保, 岳超源. 基于综合赋权的风险型多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(12): 2047-2050.
(Yao S B, Yue C Y. Method for multiple attribute decision-making under risk based on synthetic weighting[J]. Systems Engineering and Electronics, 2005, 27(12): 2047-2050.)

(下转第1064页)