

文章编号: 1001-0920(2011)09-1288-07

## 带状态约束的非线性系统单向辅助面滑模控制

傅健, 吴庆宪, 姜长生, 程路

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

**摘要:** 针对带有状态输出有界约束的一类不确定仿射非线性系统, 提出一种单向辅助面滑模控制器设计方法. 该方法通过将状态量的约束条件引入单向辅助面的设计, 并利用单向辅助面构成系统状态输出量正不变集的边界, 以保证系统状态能够满足状态输出量的约束条件. 随后给出了该方法稳定性以及单向辅助面构成正不变集的理论证明, 并通过仿真验证了所提出的设计方法的有效性.

**关键词:** 非线性系统; 正不变集; 滑模控制; 单向辅助面; 状态约束; 干扰

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Robust sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces for nonlinear system with state constraints

FU Jian, WU Qing-xian, JIANG Chang-sheng, CHENG Lu

(College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: FU Jian, E-mail: fujian1986216@126.com)

**Abstract:** The sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces(UAS-SMC) is proposed for a class of nonlinear systems with state constraints. And the unidirectional auxiliary surfaces(UAS) are designed by the state constraints. By using the UAS to constitute the boundaries of the positive invariant sets, the constraints of the system states are guaranteed. The stability of the system and the invariant sets which consist of the UAS are proved. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** nonlinear system; positive invariant sets; sliding mode control; unidirectional auxiliary surfaces; state constraints; disturbance

### 1 引言

滑模变结构控制(SMC)具有良好的鲁棒性, 在实际系统中得到了广泛应用. 但是, 实际系统不可避免地存在控制输入及状态输出的约束问题, 这便降低了滑模变结构控制器的控制性能<sup>[1]</sup>.

针对上述问题, 国内外学者展开了一系列的研究: 文献[2]针对控制输入约束问题提出了一种解决二阶非线性系统滑模控制饱和问题的方法, 其缺点是没有考虑状态输出约束问题; 文献[3]针对状态在切换面上的情况, 研究了滑模状态约束问题, 然而没有对状态输出有界约束进行讨论. 此外, 人们还提出了自适应滑模控制和模糊滑模控制等解决控制输入约束问题的方法<sup>[4-5]</sup>. 现有的滑模控制研究主要集中在控制约束方面, 对状态约束未进行深入探讨. 而作为

实际系统中广泛存在的一类状态约束问题, 状态输出有界约束对滑模控制系统的性能有重要影响. 因此, 如何在此约束下提高滑模控制器的性能, 是值得研究的问题.

本文针对状态输出有界约束问题, 提出一种单向辅助面滑模控制方法(UAS-SMC), 将状态输出有界约束条件引入单向辅助面设计, 利用单向辅助面构造系统状态输出正不变集<sup>[6]</sup>的边界, 使系统状态在整个运行过程中都能满足约束条件. 本文首先叙述要解决的问题; 然后阐述单向辅助面滑模控制器的设计步骤; 接着给出相关证明, 并进行了数学模型的仿真验证; 最后给出了研究结论.

### 2 问题描述

考虑如下系统:

收稿日期: 2010-04-18; 修回日期: 2010-06-30.

基金项目: 国家自然科学基金重大课题项目(60974106, 90716028).

作者简介: 傅健(1986—), 男, 博士生, 从事智能飞行控制的研究; 吴庆宪(1955—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制和智能控制等研究.

$$\dot{X} = f(X) + g(X)u + \eta. \quad (1)$$

其中:  $X \in R^n$ ,  $f(X) \in R^n$ ,  $g(X) \in R^{n \times n}$ ,  $u \in R^n$ , 且  $g(X)$  可逆. 状态  $X$  的约束条件如下:

$$\Psi = \{X | X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n, n_i \leq x_i \leq m_i, n_i, m_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

且  $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T \in R^n$  表示由不确定项  $\Delta f(X)$ ,  $\Delta g(X)$  和外部干扰  $d(X)$  构成的复合干扰. 这里假定该复合干扰的上下界是可估计的.

### 3 单向辅助面滑模控制器设计

按如下步骤设计单向滑模控制器:

**Step 1** 选择合适的组合切换面

$$\begin{cases} S_1(X) = X + \xi_1 \int X = 0, \\ S_2(X) = X + \xi_2 \int X = 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\xi_1 = \text{diag}\{\xi_{11}, \dots, \xi_{1n}\}$ ,  $\xi_2 = \text{diag}\{\xi_{21}, \dots, \xi_{2n}\}$ ,  $S_1(X) = [S_{11}, \dots, S_{1n}]^T$ ,  $S_2(X) = [S_{21}, \dots, S_{2n}]^T$ ,  $\xi_{1i} > 0$ ,  $\xi_{2i} > 0$ ,  $\xi_{1i} \neq \xi_{2i}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 为简便起见, 本文中用  $\int X$  表示  $\int_0^t X(\tau) d\tau$ .

**Step 2** 对于二维空间  $(x_i, \int x_i)$ , 切换面  $S_{1i} = x_i + \xi_{1i} \int x_i$ ;  $S_{2i} = x_i + \xi_{2i} \int x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 将其划分为4个子空间, 分别记为第  $k_i$  子空间,  $k = 0, 1, 2, 3$ , 如图1所示.

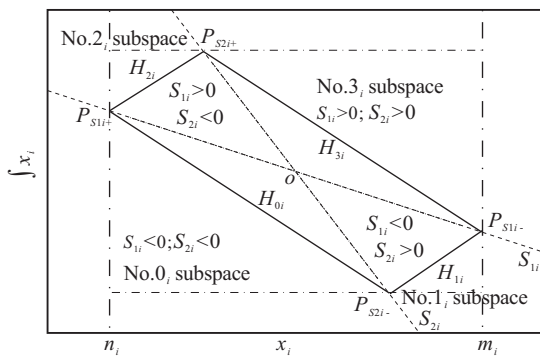


图1 切换面划分二维空间示意图

根据状态限制条件(2), 如图1所示取适当的点  $P_{S1i+}, P_{S1i-}, P_{S2i+}, P_{S2i-}$ , 满足

$$\begin{cases} S_{1i}(P_{S1i+}) = 0, S_{1i}(P_{S1i-}) = 0, \\ S_{2i}(P_{S2i+}) = 0, S_{2i}(P_{S2i-}) = 0. \end{cases}$$

点  $P_{S1i+}, P_{S1i-}, P_{S2i+}, P_{S2i-}$  在约束条件(2)内组成凸四边形  $P_{S1i+}P_{S1i-}P_{S2i+}P_{S2i-}$ , 记为凸四边形  $\Delta$ , 并分别由线段  $P_{S1i+}P_{S2i-}, P_{S1i-}P_{S2i+}, P_{S1i+}P_{S2i+}, P_{S1i-}P_{S2i-}$  构成单向辅助面  $H_{0i}, H_{1i}, H_{2i}, H_{3i}$ .

$$H_{k_i} = \omega_{k_{i1}}x_i + \omega_{k_{i2}} \int x_i + M_{k_i} = 0, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}, M_{k_i} > 0, \omega_{k_{i1}} \neq 0. \quad (4)$$

其中:  $H_{0i} = 0, H_{1i} = 0, H_{2i} = 0, H_{3i} = 0$  分别表示线段  $P_{S1i+}P_{S2i-}, P_{S1i-}P_{S2i+}, P_{S1i+}P_{S2i+}, P_{S1i-}P_{S2i-}$  所属直线在二维空间的数学方程;  $\omega_{k_{i1}}, \omega_{k_{i2}}, M_{k_i}, k \in$

$\{0, 1, 2, 3\}$ , 表示这4个直线方程中对应的系数. 则点集  $Q = \{(x_i, \int x_i) | H_{k_i} \geq 0, k = 0, 1, 2, 3\}$  表示凸四边形  $\Delta$  内部的所有点. 如此, 该点集便构成了正不变集. 下文中, 将对此进行证明.

**Step 3** 考虑当前单向辅助面的第  $i$  个分量为

$$H_i = \omega_{i_1}x_i + \omega_{i_2} \int x_i + M_i = 0.$$

其中

$$\omega_{i_1} = \begin{cases} \omega_{0_{i1}}, S_{1i} < 0, S_{2i} < 0; \\ \omega_{1_{i1}}, S_{1i} < 0, S_{2i} > 0; \\ \omega_{2_{i1}}, S_{1i} > 0, S_{2i} < 0; \\ \omega_{3_{i1}}, S_{1i} > 0, S_{2i} > 0; \\ 1, S_{1i} = 0; \\ 1, S_{2i} = 0; \end{cases}$$

$$\omega_{i_2} = \begin{cases} \omega_{0_{i2}}, S_{1i} < 0, S_{2i} < 0; \\ \omega_{1_{i2}}, S_{1i} < 0, S_{2i} > 0; \\ \omega_{2_{i2}}, S_{1i} > 0, S_{2i} < 0; \\ \omega_{3_{i2}}, S_{1i} > 0, S_{2i} > 0; \\ \xi_{1i}, S_{1i} = 0; \\ \xi_{2i}, S_{2i} = 0; \end{cases}$$

$$M_i = \begin{cases} M_{0_i}, S_{1i} < 0, S_{2i} < 0; \\ M_{1_i}, S_{1i} < 0, S_{2i} > 0; \\ M_{2_i}, S_{1i} > 0, S_{2i} < 0; \\ M_{3_i}, S_{1i} > 0, S_{2i} > 0; \\ 0, S_{1i} = 0; \\ 0, S_{2i} = 0. \end{cases}$$

则当前单向辅助面可记为  $H = \Omega_1 \cdot X + \Omega_2 \cdot \int X + M$ . 其中:  $H = [H_1, \dots, H_n]^T$ ,  $\Omega_1 = \text{diag}\{\omega_{1_1}, \dots, \omega_{n_1}\}$ ,  $\Omega_2 = \text{diag}\{\omega_{1_2}, \dots, \omega_{n_2}\}$ ,  $M = [M_1, \dots, M_n]^T$ .

**Step 4** 设计对于非线性系统(1)的状态输出约束滑模控制器, 即

$$u = (\Omega_1 \cdot g(X))^{-1} (N - \Omega_1 \cdot f(X) - \Omega_2 \cdot X) = (g(X))^{-1} (\Omega_1^{-1} \cdot N - f(X) - \Omega_1^{-1} \cdot \Omega_2 \cdot X). \quad (5)$$

其中

$$N = [N_1, \dots, N_i, \dots, N_n]^T.$$

$$N_i = \begin{cases} 0, S_{1i} = 0 \text{ or } S_{2i} = 0; \\ \bar{N}_i, \text{ others}; \end{cases} \quad \bar{N}_i > \sup\{-\omega_{i_1} \eta_i\}.$$

### 4 单向辅助面滑模控制的证明

**引理 1** 考虑位于第  $k_i (k \in \{0, 1, 2, 3\})$  子空间的点  $P = (x, y) = (x_i, \int x_i)$ , 如图2所示. 点  $P_{S1i\pm}, P_{S2i\pm} \in \{P_{S1i+}, P_{S1i-}, P_{S2i+}, P_{S2i-}\}$  构成编号  $k_i$  子空间的单向辅助面

$$H_{k_i} = \omega_{k_{i1}}x_i + \omega_{k_{i2}} \int x_i + M_{k_i} = 0, \quad M_{k_i} > 0, \quad (6)$$

则对于点  $P$  有  $M_{k_i} - H_{k_i}(P) \geq 0$ , 并且当  $H_{k_i}(P) = M_{k_i}$  时, 有  $P = (0, 0)$ .

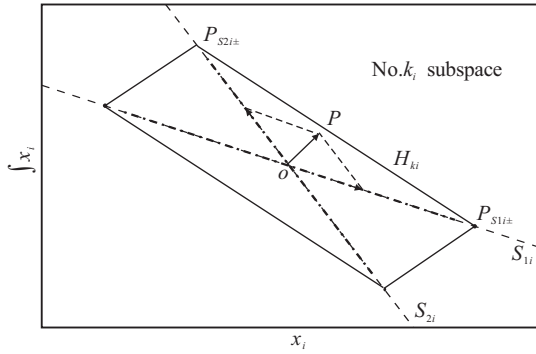


图 2 P 点坐标变换示意图

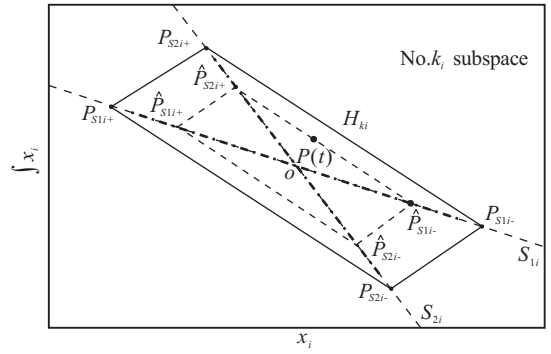


图 3 点 P(t) 在第 k\_i 子空间内运动的示意图

**证明** 因为点  $P_{S1i\pm} = (x_1, y_1), P_{S2i\pm} = (x_2, y_2)$  构成单向面  $H_{k_i}$ , 所以点  $P_{S1i\pm}, P_{S2i\pm}$  在单向面  $H_{k_i}$  上. 因此有

$$\begin{cases} H_{k_i}(P_{S1i\pm}) = \omega_{k_{i1}}x_1 + \omega_{k_{i2}}y_1 + M_{k_i} = 0, \\ H_{k_i}(P_{S2i\pm}) = \omega_{k_{i1}}x_2 + \omega_{k_{i2}}y_2 + M_{k_i} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

由于点  $P(t)$  位于第  $k_i$  子空间, 由图 2 可知

$$\vec{oP} = k_1 \cdot \vec{oP}_{S1i\pm} + k_2 \cdot \vec{oP}_{S2i\pm}, \quad k_1 \geq 0, k_2 \geq 0.$$

由此, 点  $P$  的坐标可变换为

$$P = (x, y) = (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2, k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2).$$

将其代入式 (6), 可知

$$\begin{aligned} H_{k_i}(P) = & k_1(\omega_{k_{i1}}x_1 + \omega_{k_{i2}}y_1 + M_{k_i}) + k_2(\omega_{k_{i1}}x_2 + \\ & \omega_{k_{i2}}y_2 + M_{k_i}) - (k_1 \cdot M_{k_i} + k_2 \cdot M_{k_i}) + M_{k_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

将式 (7) 代入 (8), 得

$$H_{k_i}(P) = -(k_1 \cdot M_{k_i} + k_2 \cdot M_{k_i}) + M_{k_i},$$

所以有

$$M_{k_i} - H_{k_i}(P) = k_1 \cdot M_{k_i} + k_2 \cdot M_{k_i}.$$

又因为  $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, M_{k_i} > 0$ , 所以有

$$M_{k_i} - H_{k_i}(P) \geq 0.$$

当  $H_{k_i}(P) = M_{k_i}$  时, 由  $k_1 M_{k_i} + k_2 M_{k_i} = M_{k_i} - H_{k_i}(P)$ ,  $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, M_{k_i} > 0$ , 可知  $k_1 = 0, k_2 = 0$ . 又因为

$$P = (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2, k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2),$$

所以此时  $P = (0, 0)$ .  $\square$

**定义 1** 对于点  $P(t) = (x_i, \int x_i)$ , 定义

$$\|oP(t)\| = \sqrt{x_i^2 + \left(\int x_i\right)^2}.$$

作凸四边形  $\hat{P}_{S1i+}\hat{P}_{S1i-}\hat{P}_{S2i+}\hat{P}_{S2i-}$  如图 3 所示, 记为凸四边形  $\delta$ . 且对于凸四边形  $\Delta$  有

$$\begin{cases} \hat{P}_{S1i+}\hat{P}_{S1i-} // P_{S1i+}P_{S1i-}, \\ \hat{P}_{S2i+}\hat{P}_{S2i-} // P_{S2i+}P_{S2i-}, \\ \hat{P}_{S1i-}\hat{P}_{S2i+} // P_{S1i-}P_{S2i+}, \\ \hat{P}_{S2i-}\hat{P}_{S1i+} // P_{S2i-}P_{S1i+}, \end{cases} \quad (9)$$

式中符号 // 表示平行于. 点  $P(t)$  在凸四边形  $\delta$  的边界上.

1) 若有  $H_{k_i}(P(t)) \geq 0, i = 0, 1, 2, 3$ , 则称点  $P(t)$  在凸四边形  $\Delta$  的内部.

2) 若存在  $H_{k_i}(P(t)) < 0, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , 则称点  $P(t)$  在凸四边形  $\Delta$  的外部.

易知, 当点  $P(t)$  在凸四边形  $\Delta$  的外部时有如下性质:

1) 当点  $P(t)$  位于第  $k_i$  子空间时, 其中  $k \in \{0, 1, 2, 3\}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 有  $H_{k_i}(P(t)) < 0$ .

2) 当点  $P(t)$  位于切换面  $S_{1i}$  或  $S_{2i}$  上时, 点  $P(t)$  与凸四边形  $\delta$  中的某一个顶点重合. 若设点  $P(t)$  与顶点  $\hat{P}_{S1i+}$  重合, 则有  $\|oP(t)\| > \|oP_{S1i+}\|$ . 类似地, 若点  $P(t)$  分别与顶点  $\hat{P}_{S1i-}, \hat{P}_{S2i+}, \hat{P}_{S2i-}$  重合, 则分别有  $\|oP(t)\| > \|oP_{S1i-}\|, \|oP(t)\| > \|oP_{S2i+}\|, \|oP(t)\| > \|oP_{S2i-}\|$ .

**定理 1** 考虑非线性系统 (1), 设计受限滑模控制器  $u$  如式 (5) 所示, 则系统状态  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  是渐近稳定的, 并且凸点集

$$Q = \left\{ \left( x_i, \int x_i \right) \mid H_{k_i} \geq 0, k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

构成正不变集<sup>[6]</sup>, 即对于  $P(t) = (x_i, \int x_i)$ , 如果有  $P(t_0)$  在凸四边形  $\Delta$  的内部, 则对于  $t > t_0$  有  $P(t)$  在凸四边形  $\Delta$  的内部.

**证明** 1) 首先给出稳定性证明.

对于点  $P(t) = (x_i, \int x_i)$ , 按定义所示构造凸四边形  $\delta$ . 定义公共 Lyapunov 函数

$$V = \sum_{i=1}^n \hat{V}_i. \quad (10)$$

其中

$$\hat{V}_i =$$

$$\frac{1}{2} [\text{Max}(\|o\hat{P}_{S1i+}\|, \|o\hat{P}_{S1i-}\|, \|o\hat{P}_{S2i+}\|, \|o\hat{P}_{S2i-}\|)]^2.$$

因为点  $P(t)$  的运动状态可分为两种情况, 一种是在第  $k_i (k \in \{0, 1, 2, 3\}, i \in \{1, 2, \dots, n\})$  子空间内运动; 另一种是在切换面  $S_{1i}$  或  $S_{2i}$  上运动. 下面分别对这两种情况下的 Lyapunov 函数  $\hat{V}_i$  进行讨论.

① 对于  $\hat{V}_i$ , 当点  $P(t)$  在第  $k_i (k \in \{0, 1, 2, 3\}, i \in$

$\{1, 2, \dots, n\}$  子空间内运动(如图 3 所示), 且第  $k_i$  子空间的单向辅助面为  $H_{k_i}$  时, 有如下证明:

首先证明  $V \geq 0$ , 且当  $V = 0$  时, 有  $X = 0$ . 由式 (9) 可知

$$\|o\hat{P}_{S_{1i+}}\| = \frac{H_{k_i}(0) - H_{k_i}(P(t))}{H_{k_i}(0)} \cdot \|oP_{S_{1i+}}\| = \frac{M_{k_i} - H_{k_i}(P(t))}{M_{k_i}} \cdot \|oP_{S_{1i+}}\|.$$

同理可知

$$\begin{aligned} \|o\hat{P}_{S_{1i-}}\| &= \frac{M_{k_i} - H_{k_i}(P(t))}{M_{k_i}} \cdot \|oP_{S_{1i-}}\|, \\ \|o\hat{P}_{S_{2i+}}\| &= \frac{M_{k_i} - H_{k_i}(P(t))}{M_{k_i}} \cdot \|oP_{S_{2i+}}\|, \\ \|o\hat{P}_{S_{2i-}}\| &= \frac{M_{k_i} - H_{k_i}(P(t))}{M_{k_i}} \cdot \|oP_{S_{2i-}}\|. \end{aligned}$$

简便起见, 令

$$\Theta = \text{Max}(\|oP_{S_{1i+}}\|, \|oP_{S_{1i-}}\|, \|oP_{S_{2i+}}\|, \|oP_{S_{2i-}}\|),$$

所以

$$\hat{V}_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{M_{k_i} - H_{k_i}(P(t))}{M_{k_i}} \right]^2 \Theta^2 \geq 0, \quad M_{k_i} > 0, \quad \Theta > 0. \quad (11)$$

由上式可知, 当  $\hat{V}_i = 0$  时, 有  $H_{k_i}(P(t)) = M_{k_i}$ . 根据引理 1 可知, 当  $H_{k_i}(P(t)) = M_{k_i}$  时, 有  $P(t) = (0, 0)$ .

综上所述,  $\hat{V}_i \geq 0$ , 且当  $\hat{V}_i = 0$  时, 有  $x_i = 0$ . 又由式 (10) 可知  $V \geq 0$ , 且当  $V = 0$  时, 有  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0$ .

下面讨论  $\dot{V}$ , 证明当  $X \neq 0$  时有  $\dot{V} < 0$ . 对式 (11) 求导, 可得

$$\dot{\hat{V}}_i = -(M_{k_i} - H_{k_i}(P(t))) \cdot \dot{H}_{k_i}(P(t)) \cdot \frac{\Theta^2}{M_{k_i}^2}. \quad (12)$$

由引理 1 可知  $M_{k_i} - H_{k_i}(P(t)) \geq 0$ . 将式 (5) 代入当前单向辅助面的导数

$$\dot{H} = \Omega_1 \cdot (f(X) + g(X)u + \eta) + \Omega_2 \cdot X,$$

可得  $\dot{H}_i = \dot{H}_{k_i} = N_i + \omega_{i1}\eta_i$ . 因为点  $P(t)$  在第  $k_i$  子空间内运动, 所以  $S_{1i}(P(t)) \neq 0, S_{2i}(P(t)) \neq 0$ .

由式 (5) 可知  $N_i = \bar{N}_i > \sup\{-\omega_{i1}\eta_i\}$ , 所以可得  $\dot{H}_{k_i}(P(t)) > 0$ . 将  $\dot{H}_{k_i}(P(t))$  代入式 (12), 可知  $\dot{\hat{V}}_i \leq 0$ . 由引理 1 可知, 当  $P(t) \neq (0, 0)$  时, 有  $H_{k_i}(P(t)) - M_{k_i} > 0$ .

综上所述, 可知当  $P(t) = \left(x_i, \int x_i\right) \neq (0, 0)$  时, 有  $\dot{\hat{V}}_i < 0$ . 由式 (10) 可知  $\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{\hat{V}}_i$ , 所以当  $X \neq 0$  时有  $\dot{V} < 0$ .

② 对于  $\hat{V}_i$ , 当点  $P(t)$  在切换面  $S_{1i}$  或  $S_{2i}$  上运动时, 点  $P(t)$  与凸四边形  $\delta$  中的某一点重合. 不妨设  $P(t)$  在切换面  $S_{1i}$  上运动, 点  $P(t)$  与顶点  $\hat{P}_{S_{1i+}}$  重合.

首先, 证明  $V \geq 0$ , 且当  $V = 0$  时, 有  $X = 0$ . 由式 (9) 以及等比例关系可知

$$\begin{aligned} \text{Max}(\|o\hat{P}_{S_{1i+}}\|, \|o\hat{P}_{S_{1i-}}\|, \|o\hat{P}_{S_{2i+}}\|, \|o\hat{P}_{S_{2i-}}\|) &= \\ \frac{\|oP(t)\|}{\|oP_{S_{1i+}}\|} \cdot \text{Max}(\|oP_{S_{1i+}}\|, \|oP_{S_{1i-}}\|, & \\ \|oP_{S_{2i+}}\|, \|oP_{S_{2i-}}\|) &= \\ \frac{\|oP(t)\|}{\|oP_{S_{1i+}}\|} \cdot \Theta. & \end{aligned}$$

此时有 Lyapunov 函数

$$\hat{V}_i = \frac{1}{2} \frac{\|oP(t)\|^2}{\|oP_{S_{1i+}}\|^2} \cdot \Theta^2 \geq 0, \quad \|oP_{S_{1i+}}\| > 0, \quad \Theta > 0. \quad (13)$$

由此可知, 当  $\hat{V}_i = 0$  时, 有  $\|oP(t)\|^2 = 0$ . 又因为

$$\|oP(t)\|^2 = x_i^2 + \left(\int x_i\right)^2,$$

所以当  $\hat{V}_i = 0$  时, 有  $x_i = 0, \int x_i = 0$ . 从而由式 (10) 和 (13) 可知  $V \geq 0$ , 且当  $V = 0$  时, 有

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0.$$

下面讨论  $\dot{V}$ , 证明当  $X \neq 0$  时有  $\dot{V} < 0$ . 对式 (13) 求导, 可得

$$\dot{\hat{V}}_i = \frac{1}{2} \frac{d\|oP(t)\|^2}{dt} \cdot \frac{\Theta^2}{\|oP_{S_{1i+}}\|^2}.$$

因为点  $P(t)$  在切换面  $S_{1i}$  上运动, 即

$$S_{1i}(P(t)) = x_i + \xi_{1i} \int x_i \equiv 0, \quad \xi_{1i} > 0. \quad (14)$$

对等式两边求导, 得  $\dot{x}_i = -\xi_{1i}x_i$ . 将  $x_i = -\xi_{1i} \int x_i$  和  $\dot{x}_i = -\xi_{1i}x_i$  代入  $\dot{\hat{V}}_i$ , 可知

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_i &= \frac{1}{2} \frac{d\|oP(t)\|^2}{dt} \cdot \frac{\Theta^2}{\|oP_{S_{1i+}}\|^2} = \\ & -\xi_{1i} \left[ x_i^2 + \left(\int x_i\right)^2 \right] \cdot \frac{\Theta^2}{\|oP_{S_{1i+}}\|^2}. \end{aligned}$$

由式 (13) 和 (14) 可知  $\xi_{1i} > 0, \Theta > 0, \|oP_{S_{1i+}}\| > 0$ . 所以当  $P(t) = \left(x_i, \int x_i\right) \neq (0, 0)$  时, 有  $\dot{\hat{V}}_i < 0$ . 由式 (10) 可知, 当  $X \neq 0$  时, 有  $\dot{V} < 0$ .

下面证明公共 Lyapunov 函数  $V$  的连续性. 因为当控制发生切换时, 点  $P(t)$  只可能从子空间进入切换面, 或者从切换面进入子空间, 不可能直接从一个子空间进入另一个子空间. 因此, 在这里只讨论点  $P(t)$  从子空间进入切换面, 或者从切换面进入子空间的情况. 不妨设点  $P(t)$  在第  $k_i$  子空间与切换面  $S_{1i}$  之间进行切换, 如图 4 所示, 点  $P(t)$  与点  $\hat{P}_{S_{1i\pm}}$  重合.

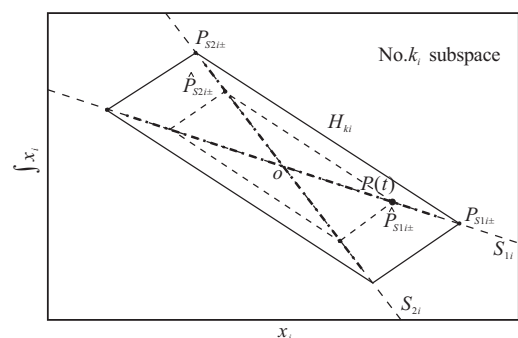


图 4 点  $P(t)$  在第  $k_i$  子空间与切换面  $S_{1i}$  之间切换示意图

对于第  $k_i$  子空间, 有

$$\hat{V}_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{H_{k_i}(0) - H_{k_i}(P(t))}{H_{k_i}(0)} \right]^2 \cdot \theta^2; \quad (15)$$

对于切换面  $S_{1i}$ , 有

$$\hat{V}_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\|oP(t)\|}{\|oP_{S_{1i\pm}}\|} \right]^2 \cdot \theta^2. \quad (16)$$

在图 4 中, 由式 (9) 以及三角形等比例关系可知

$$\frac{H_{k_i}(0) - H_{k_i}(P(t))}{H_{k_i}(0)} = \frac{\|oP(t)\|}{\|oP_{S_{1i\pm}}\|},$$

所以式 (15) 与 (16) 相等. 因此, Lyapunov 函数  $\hat{V}_i$  是连续的.

综上所述, Lyapunov 函数  $\hat{V}_i$  是连续函数. 又由式 (10) 可知, 公共 Lyapunov 函数  $V$  是连续的. 又因为  $V \geq 0$ , 当  $V=0$  时有  $X=0$ ; 当  $X \neq 0$  时有  $\dot{V} < 0$ , 所以系统状态  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  是渐近稳定的.

2) 下面证明点集  $Q$  构成正不变集.

运用反证法进行证明. 考虑点

$$P(t_0) = \left( x_i(t_0), \int_0^{t_0} x_i(\tau) d\tau \right)$$

在凸四边形  $\Delta$  内部. 假设存在点

$$P(t_1) = \left( x_i(t_1), \int_0^{t_1} x_i(\tau) d\tau \right), t_1 > t_0$$

位于四边形  $\Delta$  外部. 因为点  $P(t_0)$  在凸四边形  $\Delta$  的内部, 易知

$$\hat{V}_i(P(t_0)) \leq \frac{1}{2} \theta^2.$$

对于点  $P(t_1)$ , 可分两种情况讨论. 若点  $P(t_1)$  在第  $k_i (k \in \{1, 2, 3, 4\}, i \in \{1, 2, \dots, n\})$  子空间内, 则有

$$\hat{V}_i(P(t_1)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{M_{k_i} - H_{k_i}(P(t_1))}{M_{k_i}} \right]^2 \theta^2.$$

又因为点  $P(t_1)$  在凸四边形  $\Delta$  的外部, 由定义可知  $H_{k_i}(P(t_1)) < 0$ . 因此可得

$$\hat{V}_i(P(t_1)) > \frac{1}{2} \theta^2.$$

若点  $P(t_1)$  在切换面上, 点  $P(t)$  与凸四边形  $\delta$  中某一个顶点重合, 不妨设点  $P(t_1)$  与顶点  $\hat{P}_{S_{1i+}}$  重合, 则有

$$\hat{V}_i(P(t_1)) = \frac{1}{2} \frac{\|oP(t_1)\|^2}{\|oP_{S_{1i+}}\|^2} \cdot \theta^2.$$

因点  $P(t_1)$  在凸四边形  $\Delta$  外部, 由定义可知  $\|oP(t_1)\| > \|oP_{S_{1i+}}\|$ , 因此可得

$$\hat{V}_i(P(t_1)) > \frac{1}{2} \theta^2.$$

综上所述可知  $\hat{V}_i(P(t_0)) < \hat{V}_i(P(t_1))$ ,  $t_0 < t_1$ . 又因为  $\hat{V}_i$  是连续的, 故存在  $\hat{V}_i(t_2) > 0, t_0 < t_2 < t_1$ . 与稳定性证明中得出的  $\hat{V}_i \leq 0$  相矛盾, 所以假设不成立. 因此, 点集  $Q = \left\{ \left( x_i, \int x_i \right) \mid H_{k_i} \geq 0, k=0, 1, 2, 3 \right\}$  构成正不变集.  $\square$

### 5 仿真实验

考虑二阶非线性系统

$$\dot{X} = f(X) + g(X)u + \eta.$$

其中

$$X = [x_1 \ x_2]^T,$$

$$f(X) =$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(107.9 \sin x_1 - 1.5x_2^2 * \cos x_1 * \sin x_1)}{7.3 - 1.5 \cos(x_1)^2} \end{bmatrix},$$

$$g(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos x_1}{7.3 - 1.5 \cos(x_1)^2} \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} 0.1 \sin t \\ 0.1 \cos t \end{bmatrix}.$$

初始值为

$$x_1(t_0) = 0.45, x_2(t_0) = -0.45,$$

$$\int_0^{t_0} x_1(\tau) d\tau = -0.45, \int_0^{t_0} x_2(\tau) d\tau = 0.45.$$

状态范围为

$$\Psi = \{ [x_1 \ x_2]^T \mid -0.55 \leq x_1 \leq 0.55; -0.55 \leq x_2 \leq 0.55 \}.$$

采用单向辅助面滑模控制, 首先构造切换面

$$S_1(X) = X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int X,$$

$$S_2(X) = X + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \int X,$$

$$S_1(X) = [S_{11} \ S_{12}]^T, S_2(X) = [S_{21} \ S_{22}]^T.$$

对于  $x_1$ , 取点

$$P_{S_{1i+}} = (-0.45, 0.45), P_{S_{1i-}} = (0.45, -0.45),$$

$$P_{S_{2i+}} = (-0.55, 0.275), P_{S_{2i-}} = (0.55, -0.275),$$

可得当前单向辅助面  $H_1 = \omega_{11}x_1 + \omega_{12} \int x_1 + M_1$ . 其中

$$\omega_{11} = \begin{cases} 5.8586, & S_{11} < 0, S_{21} < 0; \\ 1.4141, & S_{11} < 0, S_{21} > 0; \\ -1.4141, & S_{11} > 0, S_{21} < 0; \\ -5.8586, & S_{11} > 0, S_{21} > 0; \\ 1, & S_{11} = 0; \\ 1, & S_{21} = 0; \end{cases}$$

$$\omega_{12} = \begin{cases} 8.0808, & S_{11} < 0, S_{21} < 0; \\ -0.8081, & S_{11} < 0, S_{21} > 0; \\ 0.8081, & S_{11} > 0, S_{21} < 0; \\ -8.0808, & S_{11} > 0, S_{21} > 0; \\ 1, & S_{11} = 0; \\ 2, & S_{21} = 0; \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{cases} 1, & S_{11} < 0, S_{21} < 0; \\ 1, & S_{11} < 0, S_{21} > 0; \\ 1, & S_{11} > 0, S_{21} < 0; \\ 1, & S_{11} > 0, S_{21} > 0; \\ 0, & S_{11} = 0; \\ 0, & S_{21} = 0. \end{cases}$$

对于  $x_2$ , 取点

$$P_{S_{1i+}} = (-0.45, 0.45), P_{S_{1i-}} = (0.45, -0.45),$$

$$P_{S_{2i+}} = (-0.55, 0.275), P_{S_{2i-}} = (0.55, -0.275),$$

可得当前单向辅助面

$$H_2 = \omega_{21}x_1 + \omega_{22} \int x_1 + M_2.$$

其中

$$\omega_{21} = \begin{cases} 5.8586, & S_{12} < 0, S_{22} < 0; \\ 1.4141, & S_{12} < 0, S_{22} > 0; \\ -1.4141, & S_{12} > 0, S_{22} < 0; \\ -5.8586, & S_{12} > 0, S_{22} > 0; \\ 1, & S_{12} = 0; \\ 1, & S_{22} = 0; \end{cases}$$

$$\omega_{22} = \begin{cases} 8.0808, & S_{12} < 0, S_{22} < 0; \\ -0.8081, & S_{12} < 0, S_{22} > 0; \\ 0.8081, & S_{12} > 0, S_{22} < 0; \\ -0.8081, & S_{12} > 0, S_{22} > 0; \\ 1, & S_{12} = 0; \\ 2, & S_{22} = 0; \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} 1, & S_{12} < 0, S_{22} < 0; \\ 1, & S_{12} < 0, S_{22} > 0; \\ 1, & S_{12} > 0, S_{22} < 0; \\ 1, & S_{12} > 0, S_{22} > 0; \\ 0, & S_{12} = 0; \\ 0, & S_{22} = 0. \end{cases}$$

则控制器设计为

$$u = (g(X))^{-1}(\Omega_1^{-1}N - f(X) - \Omega_1^{-1} \cdot \Omega_2 \cdot X).$$

其中

$$\Omega_1 = \text{diag}\{\omega_{11}, \omega_{21}\},$$

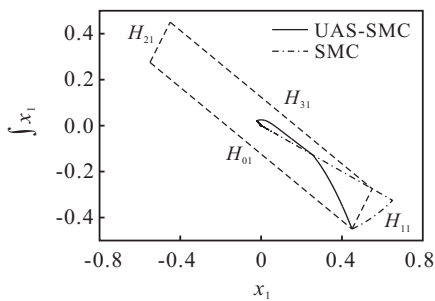
$$\Omega_2 = \text{diag}\{\omega_{12}, \omega_{22}\};$$

$$M = [M_1, M_2]^T,$$

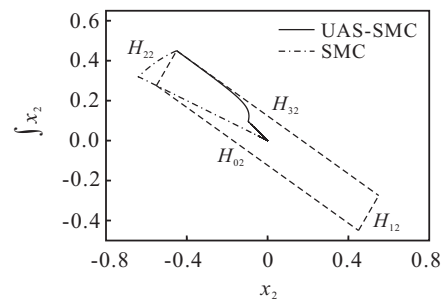
$$N = [N_1, N_2]^T;$$

$$N_i = \begin{cases} 0, & S_{1i} = 0; \\ 0, & S_{2i} = 0; \\ 0.65, & \text{others}; \end{cases} \quad 0.65 > \sup\{-\omega_{i1}\eta_i\}, i = 1, 2.$$

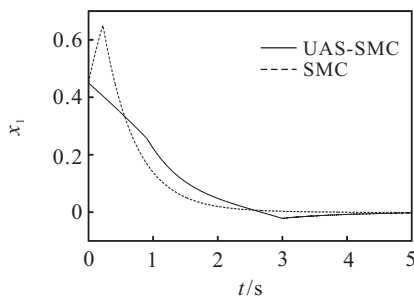
可得  $x_1, x_2$  轨迹如图5所示。



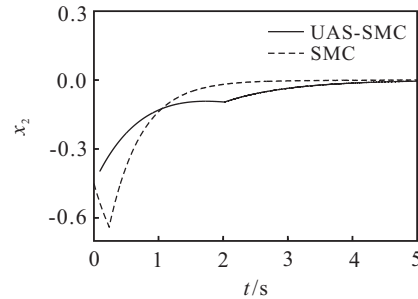
(a) 点  $(x_1, \int x_1)$  的轨迹



(b) 点  $(x_2, \int x_2)$  的轨迹



(c)  $x_1$  的轨迹



(d)  $x_2$  的轨迹

图5 仿真结果

由图5可知, 常规滑模面控制无法满足受限要求  $\Psi$ , 而单向辅助面滑模控制器满足状态  $x_1, x_2$  的约束条件, 并且其中单向辅助面确定的2个点集

$$Q = \left\{ \left( x_i, \int x_i \right) \middle| H_{k_i} \geq 0, k = 0, 1, 2, 3 \right\}; i = 1, 2$$

构成正不变集。

## 6 结论

本文研究了滑模变结构控制中状态输出有界约束问题. 根据理论证明和仿真实验可知, 本文设计的

单向辅助面滑模控制器能够使系统状态在整个过程中满足状态输出有界约束. 但是, 从图5可以看出, 单向辅助面滑模控制的收敛速度要比常规滑模控制慢一些, 因此对于如何加快单向辅助面滑模控制的收敛速度尚待进一步研究. 另外, 作者在仿真实验中发现, 单向辅助面滑模对于时滞的敏感程度较高, 如何解决这个问题, 也很有必要进行深入探讨。

## 参考文献(References)

- [1] Gao Weibing. Theory and design methods of variable structure control[M]. Beijing: Science Press, 1996.
- [2] Sohee Han, Byungsun Cho. Sliding mode controller with nonlinear sliding surface for a second order system with input saturation[C]. The 30th Annual Conf of the IEEE Industrial Electronics Society. Busan, 2004: 2159-2162.
- [3] Asif Šabanović, Meltem Elitaş, Kouhei Ohnishi. Sliding modes in constrained systems control[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2008, 55(9): 3332-3339.
- [4] Tao Hongfeng, Hu Shousong. Adaptive sliding mode tracking control with saturated dead-zone nonlinear inputs[J]. Information and Control, 2009, 38(3): 281-285.
- [5] Wang Xin, Wei-Dong Chen. Fuzzy sliding mode constrained input control for robotic manipulators based on systemic state[C]. Innovative Computing, Information and Control. Beijing, 2006: 445-449.
- [6] Blanchini F. Set invariance in control[J]. Automatica, 1999, 35(11): 1747-1767.
- [7] Burton J A, Zinober A S I. Continuous approximation of variable structure control[J]. Int J of Systems Science, 1986, 17(6): 875-885.
- [8] Fu L C, Liao T L. Globally stable robust tracking of nonlinear systems using variable structure control and with an application to a robotic manipulator[J]. Automatic Control, IEEE Trans on, 1990, 35(12): 1345-1350.
- [9] Huang Guoyong. Robust adaptive control of aerospace vehicles re-entry based on terminal sliding mode control[D]. Nanjing: College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007: 23-25.
- [10] Ju-Jang Lee, Xu Y, Dong Sang Yoo. Variable structure control using an adaptive boundary of system uncertainty[J]. Int J of Systems Science, 1993, 24(2): 277-287.

(上接第1287页)

- [50] 王晔, 刘山. 期望轨迹可变的非线性时变系统迭代学习控制[J]. 浙江大学学报, 2009, 43(5): 839-843.  
(Wang Y, Liu S. Iterative learning control of non-identical desired trajectories for a class of nonlinear time-varying systems[J]. J of Zhejiang University, 2009, 43(5): 839-843.)
- [51] 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制[J]. 自动化学报, 2010, 36(3): 454-458.  
(Zhu S, Sun M X, He X X. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(3): 454-458.)
- [52] 解永春, 吴宏鑫. 全系数自适应控制方法的鲁棒性[J]. 自动化学报, 1997, 23(2): 153-159.  
(Xie Y C, Wu H X. The robustness of the all coefficient adaptive control method[J]. Acta Automatica Sinica, 1997, 23(2): 153-159.)
- [53] 齐春子, 吴宏鑫, 吕振铎. 多变量全系数自适应控制系  
统稳定性的研究[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 489-494.  
(Qi C Z, Wu H X, Lv Z Z. Study on the stability of multivariable all-coefficient adaptive control system[J]. Control Theory & Applications, 2000, 17(4): 489-494.)
- [54] 张国琪, 吴宏鑫. 一类非线性时变系统的全系数自适应控制方法[J]. 中国科学(F辑: 信息科学), 2009, 39(10): 1072-1079.  
(Zhang G Q, Wu H X. The all coefficient adaptive control method of the nonlinear time-varying systems[J]. Science in China(Series F: Information Sciences), 2009, 39(10): 1072-1079.)
- [55] 吴宏鑫. 全系数自适应控制理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1990.  
(Wu H X. All-coefficient adaptive control theory and its application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1990.)