第 26 卷 第 8 期
Vol. 26 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 8 月
Aug. 2011

文章编号: 1001-0920(2011)08-1219-05

一种多维连续型动态规划的新算法

张 鹏

(武汉科技大学 管理学院，武汉 430081)

摘 要: 在求解一维连续型动态规划问题的自创算法——离散近似迭代法的基础上, 结合双收敛方法, 对多维连续型动态规划问题进行计算. 该算法的基本思路为: 在给定其他状态向量序列的基础上, 每次对一个状态变量序列进行离散近似迭代, 并找出该状态变量的最优序列, 直到所有状态向量序列都检查完. 当模型为非凸非凹动态规划时, 证明了该算法的收敛性; 当模型为凸动态规划时, 证明了该算法的线性收敛性. 最后, 通过具体算例验证了该模型和算法的有效性.

关键词: 动态规划问题；多维；离散近似迭代方法；双收敛法

中图分类号: O221.2 **文献标识码:** A

New algorithm for multidimensional continuing dynamic programming

ZHANG Peng

(School of Management，Wuhan University of Science and Technology，Wuhan 430081，China. E-mail：zhangpeng300478@yahoo.com.cn)

Abstract: The paper uses the discrete approximate iteration method and bi-convergent method to solve the multidimensional continuing convex dynamic programming model. Firstly, the state value of one of state equations is set to be unknown and the others be known. Then, discrete approximate iteration method is used to find the optimal value of the unknown state values until all state equations have found optimal values. If the objective function is non-concave and non-convex, the algorithm is proved convergent. If the objective function is convex, the algorithm is proved linear convergent. Finally, an example shows the effectiveness of the formation and the algorithm.

Key words: dynamic programming；multidimensional；discrete approximate iteration；bi-convergent method

1 引 言

Bellman[1]于上世纪50年代提出了动态规划的最优性原理, 为动态最优化的研究奠定了坚实的基础. 自该理论提出以来, 动态规划在运筹学、控制论和管理科学的发展中发挥了巨大的作用. 根据状态变量的维数, 动态规划问题可分为一维和多维动态规划问题; 根据状态变量是否连续, 动态规划问题又可分为离散型和连续型. 目前, 学术界对离散型动态规划问题的求解比较成熟, 如秦裕瑗[2]建立了离散动态规划的基本公理系统, 并提出了嘉量原理; Bernd Heidergott 等人[3]提出了离散动态规划问题的一般性解法——极大代数法; Kumar[4], Palanisamy[5], Trzaskalik[6] 和 Sebastian[7]等人提出了离散动态规划的神经网络法、蚁群算法和模拟退火算法等.

相对而言, 对连续型动态规划问题的解法尚不完善. 一般是采用动态规划的递推关系式求解. 但是当动态规划问题含有不等式约束条件时, 求解很不方便. 为了克服这一难题, Ohno[8]将动态规划问题转化为拉格朗日函数, 并用牛顿迭代法求解, 当约束条件较多时, 该方法的计算量会很大; Villarreal 等人[9]运用嵌入状态变量方法求解多目标整数线性动态规划问题; Philbrick 等人[10]运用一阶和二阶偏导函数近似指标函数方法求解动态规划问题; Bertsimas 等人[11]提出了近似动态规划方法求解多维背包问题, 并与遗传算法进行比较, 结果表明该算法优于遗传算法; Farias 等人[12]提出了近线性规划方法, 但该方法只适用于部分动态规划问题, 缺乏普适性, 且随着变量的增加, 精确度会大大下降; Abo-Sinna[13]系统地研究了多目

收稿日期: 2010-04-29；**修回日期:** 2010-06-30.

基金项目: 教育部人文社会科学基金项目(08JC630062)；湖北省社会科学基金项目“十一五”规划课题([2010]102)；湖北省自然科学基金项目(2010CDB03304).

作者简介: 张鹏(1975–), 男, 副教授, 博士, 从事最优化理论与方法、投资组合优化等研究.

标动态规划的参数化方法、约束法和目标规划法, 并深入分析了模糊多目标动态规划算法; Li 和 Cheng 等人[14]提出了具有 α 水平模糊参数的多目标动态规划问题, 并用参数化方法进行求解; Xu 等人[15]提出了分解法求解动态规划问题, 但没有考虑决策变量具有限制的情况; Wang 和 Dang[16]将连续时间多目标动态规划问题离散成一般多目标动态规划问题, 引入新理想点距离策度, 将多目标问题转化为双目标问题, 并用进化算法进行求解; Kien 等人[17]运用一阶梯度法求解参数动态规划问题; 李端等人[18-19]运用嵌入式方法将不可分离的动态规划问题转化为可分离的, 并用拉格朗日乘数法获得其解析解.

尽管国内外关于动态规划优化方法的研究已取得了很多有意义的成果, 但是算法设计仍需改进. 国外学者一般是针对不同的模型设计不同的方法进行求解, 优化方法缺乏普适性, 难以检验其有效性, 也不能改变动态规划问题的“维数灾”和高阶非线性等问题, 对于求解大规模动态规划问题非常困难.

由于静态连续型规划问题存在全局最优解且其算法较成熟, 本文将静态连续型规划问题拓展到多维动态规划问题, 并结合双收敛法和自创算法——离散近似迭代法进行求解.

2 一维连续型动态规划优化

2.1 一维连续型动态规划模型

一般情况下, 一维连续型动态规划问题可描述为

$$\min\sum_{k=1}^{T} f_t(x_t).$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} S_t = a_t'x_t + S_{t-1},\ t=1,\cdots,T;\\ q_i(x_t)=b_i,\ i=1,\cdots,m;\\ l_{it}\leqslant x_{it}\leqslant u_{it},\ i=1,\cdots,n,\ t=1,\cdots,T. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_t=(x_{1t},\cdots,x_{nt})'(t=1,\cdots,T,T$ 为确定型的正整数) 为第 t 阶段的决策向量; $a_t=(a_{1t},\cdots,a_{nt})'$ 为第 t 阶段目标函数中一次函数的系数; $q_i(x_t)$ 为向量 x_t 的函数; l_{it}, u_{it} 分别为变量 x_{it} 的上下界; S_t 为第 t 阶段的状态变量, 是标量.

设第 t 阶段的目标函数为 $f_t(x_t)$, S_0 为已知数, $S_T\geqslant\omega$ (ω 为已知数), $'$ 表示矩阵或向量的转置符号. 于是状态转移方程可改写为

$$a_t'x_t = S_t - S_{t-1}. \tag{2}$$

令 $g_t(x_t)=a_t'x_t$. 当 T 和 n 较大时, 运用动态规划递推关系式求解很困难, 会不可避免地出现维数灾问题. 在此本文运用自创算法——离散近似迭代法进行求解.

2.2 离散近似迭代法

算法 1 离散近似迭代法的基本步骤[20-21]如下:

1) 确定各阶段状态变量的最大值和最小值, 将状态变量按照从小到大离散成 4 等份, 即形成 5 个值.

2) 运用旋转算法求出不同状态值所对应的目标函数值, 并构造多阶段有向赋权图.

3) 运用极大代数方法求出多阶段有向赋权图的最短路径. 若第 $k+1$ 次最短路径 $F^{(k+1)}$ 与第 k 次最短路径 F^k 的差小于等于 $\epsilon(\epsilon\leqslant 10^{-6})$, 则停止迭代, 此时最短路径为 $F^{(k+1)}$; 否则, 转 4).

4) 在上述最短路径的基础上继续迭代. 将第 $k+1$ 次最短路径的各阶段状态值与该阶段状态值的最小值和最大值分别等分成 2 等份, 转 2).

2.3 离散近似迭代方法的收敛性及收敛速度

定理 1 当模型 (1) 的目标函数 $f_t(x_t)$ 为非凸非凹函数时, 算法 1 是收敛的.

证明 设第 1 阶段最短边为 $f_1(0,j_1)$, 第 2 阶段至第 $T-1$ 阶段最短边分别为 $f_t(i_{t-1},j_t)$, $t=2,\cdots,T-1$, 第 T 阶段最短边为 $f_T(i_{T-1},i_T)$, 则模型最优解的下界不小于 $f_1(0,j_1)\otimes\cdots\otimes f_T(i_{T-1},i_T)$.

通过将状态变量离散化, 构建多阶段有向赋权图, 并通过极大代数获得从起点至终点的最短路径, 该最短路径即为模型的可行解. 以该可行解为基础继续迭代, 获得又一最短路径, 则该路径不会大于前一最优路径. 因此, 离散近似迭代方法的可行解是单调递减. 又因为模型的最优解有下界, 所以离散近似迭代方法是收敛的. □

定理 2 当模型 (1) 的目标函数 $f_t(x_t)$ 为凸函数时, 算法 1 是线性收敛的.

证明 设模型的最优值为 F^*, 其第 t 阶段的最优解为 f_t^*; 第 $k+1$ 次迭代最优值为 $F^{(k+1)}$, 其第 t 阶段的值为 $f_t^{(k+1)}$; 第 k 次迭代值为 $F^{(k)}$, 其第 t 阶段的值为 $f_t^{(k)}$. 根据定理 1 可知 $f_t^{(k)}\leqslant f_t^{(k+1)}$. 若第 t 阶段的目标函数 f_t 是凸函数, 则有 $|f^{(k+1)}-f^*|/|f^{(k)}-f^*|\leqslant 1$, 即 $f_t^{(k+1)}-f_t^*\leqslant f_t^{(k)}-f_t^*$. 于是有

$$\sum_{i=1}^{T}(f_t^{(k+1)}-f_t^*)\leqslant\sum_{i=1}^{T}(f_t^{(k)}-f_t^*),$$

因此

$$\sum_{i=1}^{T}(f_t^{(k+1)}-f_t^*)\Big/\sum_{i=1}^{T}(f_t^{(k)}-f_t^*)\leqslant 1,$$

即 $|F^{(k+1)}-F^*|/|F^{(k)}-F^*|\leqslant 1$. 所以离散近似迭代方法是线性收敛的. □

3 多维连续型动态规划优化

3.1 多维连续型动态规划模型

一般情况下, 多维连续型动态规划问题可描述为

$$\min\sum_{k=1}^{T}f_t(x_t,S_1(t),\cdots,S_N(t)).$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}S_k(t+1)=H_kx_t,S_k(t),\\ k=1,\cdots,N,\ t=1,\cdots,T;\\ q_ix_t=b_i,\ i=1,\cdots,m;\\ l_{it}\leqslant x_{it}\leqslant u_{it},\ i=1,\cdots,n,\ t=1,\cdots,T.\end{cases}\tag{3}$$

其中: $x_t=(x_{1t},\cdots,x_{nt})'(t=1,\cdots,T,\ T$ 为确定型的正整数) 为第 t 阶段的决策向量; $a_t=(a_{1t},\cdots,a_{nt})'$ 为第 t 阶段目标函数中一次函数的系数; $q_i(x_t)$ 为向量 x_t 的函数; l_{it}, u_{it} 分别为变量 x_{it} 的上下界; $S_k(t)(k=1,\cdots,N)$ 为第 t 阶段第 k 个状态变量. 第 t 阶段的目标函数为 $f_t(x_t,S_1(t),\cdots,S_N(t))$, $S_k(0)$ 为已知数, $S_k(T)\geqslant\omega_k$ (ω_k 为已知数), $'$ 为矩阵或向量的转置符号.

3.2 多维连续型动态规划问题的优化方法

算法 2 结合双收敛法和离散近似迭代法求解多维连续型动态规划问题. 具体步骤如下:

1) 令 $I_0=\{\varnothing\}$, $I/I_0=\{1,2,\cdots,N\}$. 其中: I_0, I/I_0 分别为已搜索和未搜索的状态向量的下标集; $\mathrm{num}(I_0)$ 和 $\mathrm{num}(I/I_0)$ 分别为下标集 $I,I/I_0$ 的个数.

2) 确定 N 个状态转移方程中的 $N-1$ 个状态向量的初始序列. 令第 k 个状态向量初始序列为 $S_k^0(t)$, $k=1,\cdots,N,k\neq i,t=1,\cdots,T$. 针对第 i 个状态向量, 运用离散近似迭代法分别求出目标函数值和最优状态向量序列, 其值分别为 G^1 和 $S_k^1(t),k=1,\cdots,N$, $t=1,\cdots,T$. 此时 $I_0=\{i\}$, $I/I_0=\{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,N\}$. 从 I/I_0 中取出一个下标 j 作为下一步搜索的状态向量.

3) 以状态向量的最优序列 $S_k^1(t)(k=1,\cdots,N,k\neq j,\ t=1,\cdots,T)$ 为初始序列. 针对第 j 个状态向量, 运用离散近似迭代法求出目标函数值和最优状态向量序列, 其值分别为 G^2 和 $S_k^2(t)$, $k=1,\cdots,N$, $t=1,\cdots,T$. 此时 $I_0=\{i,j\}$, $I/I_0=\{2,\cdots,N\}$.

4) 若 $I/I_0=\{\varnothing\}$, 则计算停止; 否则, 从 I/I_0 中取出一个下标作为一步搜索的状态向量, 转 3).

3.3 离散近似迭代方法的收敛性及收敛速度

定理 3 当模型 (1) 的目标函数 $f_t(x_t)$ 为非凸非凹函数时, 算法 2 是收敛的.

证明 设从 I/I_0 中取出一个下标 j 作为下一步搜索的状态向量, 此时, 目标函数值为 $G^{(j-1)}$. 以状态向量的最优序列 $S_i^i(t)\,(i=1,\cdots,N,\ t=1,\cdots,T)$ 为初始序列, 运用离散近似迭代法求出第 j 个状态向量的最优序列 $S_j^j(t)\,(j=1,\cdots,N,\ t=1,\cdots,T)$, 其对应的目标函数值为 G^j. 根据离散近似迭代原理可知 $G^j\leqslant G^{j-1}$, 即目标函数值构成了一个单调递减序列.

当只考虑第 i 个状态向量, 而忽略其他 $N-1$ 个状态向量时, 运用离散近似迭代法求出此时目标函数的最小值, 并获得第 i 个状态向量的值为 $\overline{S}_i^i(t),t=1,\cdots,T$. 依照同样的方法可以得到其他使目标函数取得最小值的状态向量序列. 以 $\overline{S}_i^i(t)\,(i=1,\cdots,N,\ t=1,\cdots,T)$ 为初始值可以得到每一阶段最小值 $\overline{f}_t^*$, 则模型 (3) 的最优值将不小于 $\sum\limits_{t=1}^{T}\overline{f}_t^*$, 即目标函数值有下界. 因此, 算法 2 是收敛的. □

定理 4 当模型 (1) 的目标函数 $f_t(x_t)$ 为凸函数时, 算法 2 是线性收敛的.

证明 假设第 $j-1$ 次和第 j 次搜索目标函数的最优值分别为 G^{j-1} 和 G^j. 根据定理 3 可知 $G^j\leqslant G^{(j-1)}$. 假设模型 (3) 的最优值为 G^*, 若模型 (3) 的目标函数为凸函数, 则 $|G^*-G^j|/|G^*-G^{j-1}|\leqslant 1$. 因此, 算法 2 是线性收敛的. □

4 算　例

求解以下 5 阶段动态规划问题的最优解:

$$\min\sum_{t=1}^{5}g_t'x_t;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}S_t=S_{(t-1)}+r_t'x_t,\\ \overline{S}_t=\overline{S}_{(t-1)}+\overline{r}_t'x_t,\\ x_{1t}+\cdots+x_{6t}=1,\\ 0\leqslant x_{it}\leqslant 1,\ i=1,\cdots,6.\end{cases}\tag{4}$$

其中

$S_0=0,\ \overline{S}_0=0,\ S_5\geqslant 0.38,\ \overline{S}_5\geqslant 0.38;$

$g_1'=(0.1,1.2,0.5,0.8,0.9,0.6,0.75,1.15,0.85,0.45)'$,

$r_1'=(0.13,0.1,0.05,0.06,0.07,0.05,0.11,0.075,0.065,0.095)'$,

$\overline{r}_1'=(0.10,0.1,0.05,0.06,0.07,0.05,0.11,0.075,0.065,0.095)'$;

$g_2'=(1.2,0.3,0.9,1.1,0.8,0.7,0.95,0.65,0.54,0.89)'$,

$r_2'=(0.14,0.1,0.054,0.065,0.076,0.052,0.085,0.12,0.07,0.09)'$,

$\overline{r}_2'=(0.12,0.1,0.04,0.07,0.08,0.06,0.11,0.075,0.09,0.045)'$;

$g_3'=(0.8,0.7,0.6,0.5,0.6,0.5,0.75,0.96,1.1,0.78)'$,

$r_3'=(0.14,0.09,0.05,0.06,0.07,0.04,0.065,0.095,0.12,0.085)'$,

$\overline{r}_3'=(0.13,0.10,0.06,0.08,0.09,0.06,0.075,0.095,0.11,0.085)'$;

$g'_4 = (0.7, 0.8, 0.65, 0.75, 0.86, 0.76, 1.1, 0.95, 0.56, 0.84)'$,

$r'_4 = (0.125, 0.09, 0.05, 0.06, 0.07, 0.04, 0.065, 0.095, 0.12, 0.085)'$,

$\overline{r}'_4 = (0.135, 0.14, 0.076, 0.088, 0.079, 0.085, 0.11, 0.065, 0.095, 0.12)'$;

$g'_5 = (0.85, 1.1, 0.76, 0.85, 0.75, 0.65, 0.97, 0.72, 0.95, 1.2)'$,

$r'_5 = (0.13, 0.085, 0.075, 0.09, 0.08, 0.095, 0.065, 0.09, 0.11, 0.058)'$,

$\overline{r}'_5 = (0.125, 0.105, 0.096, 0.085, 0.095, 0.09, 0.11, 0.065, 0.075, 0.13)'$.

解 令第2个状态方程各阶段状态变量的初始值分别为: $\overline{S}_1 = 0.065$, $\overline{S}_2 = 0.14$, $\overline{S}_3 = 0.22$, $\overline{S}_4 = 0.305$, $\overline{S}_5 = 0.395$. 运用离散近似迭代法可以求出第1个状态方程各阶段的最优决策值及其相应的状态变量和目标函数值, 如表1所示.

表 1 第1个状态转移方程离散近似迭代的结果

阶段	t				
	1	2	3	4	5
x_{1t}	0.417	0.000	0.000	0.000	0.300
x_{2t}	0.000	0.375	0.000	0.000	0.000
x_{3t}	0.583	0.000	0.000	0.526	0.000
x_{4t}	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
x_{5t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{6t}	0.000	0.625	0.000	0.000	0.000
x_{7t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{8t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{9t}	0.000	0.000	0.000	0.474	0.700
x_{10t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
状态变量	0.083	0.153	0.213	0.299	0.394
目标函数值	0.333	0.550	0.500	0.607	0.920

表 2 第2个状态转移方程离散近似迭代的结果

阶段	t				
	1	2	3	4	5
x_{1t}	0.417	0.000	0.000	0.000	0.300
x_{2t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{3t}	0.583	0.000	0.000	0.526	0.000
x_{4t}	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
x_{5t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{6t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{7t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{8t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{9t}	0.000	1.000	0.000	0.474	0.700
x_{10t}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
状态变量	0.065	0.155	0.236	0.321	0.411
目标函数值	0.333	0.540	0.500	0.607	0.650

令第1个状态方程各阶段状态变量的初始值分别为: $S_1 = 0.083$, $S_2 = 0.153$, $S_3 = 0.213$, $S_4 = 0.299$, $S_5 = 0.394$. 运用离散近似迭代法可以求出第2个状态方程各阶段的最优决策值及其相应的状态变量和目标函数值, 如表2所示.

由上可得模型(4)目标函数的最优值为

$$0.333 + 0.540 + 0.500 + 0.607 + 0.650 = 2.630.$$

5 结 论

本文在求解一维连续型动态规划问题的自创算法——离散近似迭代算法的基础上, 结合双收敛法求解多维连续型动态规划问题, 并证明了该算法为线性收敛. 算例计算结果验证了该算法的有效性. 本文算法有助于求解最优控制、动态投资组合优化、随机动态规划问题和序贯决策问题, 具有较大的应用前景.

参考文献(References)

[1] Bellman R. Dynamic programming[M]. Princeton: Princeton University Press, 1957: 30-34.

[2] 秦裕瑗. 离散动态规划与Bellman代数[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 9-11.
(Qin Y Y. Discrete dynamic programming and Bellman algebra[M]. Beijing: Science Press, 2009: 9-11.)

[3] Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder, Jacob Van der Woude. Max plus at work-modeling and analysis of synchronized systems: A course on max-plus algebra and its applications[M]. Princeton: Princeton University Press, 2006: 20-24.

[4] Senthil Kumar S, Palanisamy V. A dynamic programming based fast computation Hopfield neural network for unit commitment and economic dispatch[J]. Electric Power Systems Research, 2007, 77(8): 917-925.

[5] Sitarz S. Hybrid methods in multi-criteria dynamic programming[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 180(1): 38-45.

[6] Trzaskalik T, Sitarz S. Discrete dynamic programming with outcomes in random variable structures [J]. European J of Operational Research, 2007, 177(3): 1535-1548.

[7] Sitarz S. Ant algorithms and simulated annealing for multicriteria dynamic programming[J]. Computers & Operations Research, 2007, 36(2): 1-14.

[8] Ohno K. Differential dynamic programming and separable programs[J]. J of Optimization Theory and Applications, 1978, 24(4): 617-637.

[9] Villarreal B, Karwan M H. Multicriteria integer programming: A hybrid dynamic programming recursive approach[J]. Mathematical Programming, 1981, 21(1): 204-223.

[10] Philbrick C R, Jr Kitanidis P K. Improved dynamic programming methods for optimal control of lumped-paramter stochastic system[J]. Operations Research, 2001, 49(3): 398-412.

[11] Bertsimas D, Demir R. An approximate dynamic programming approach to multidimensional knapsack problems[J]. Management Science, 2002, 48(4): 550-565.

[12] De Farias D P, Van Roy B. The linear programming approach to approximate dynamic programming[J]. Operations Research, 2003, 51(6): 850-865.

[13] Abo-Sinna M A. Multiple objective fuzzy dynamic programming problems: A survey and some applications[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 157(3): 861-888.

[14] Li Dengfeng, Cheng Chuntian. Stability on multiobjective dynamic programming problems with fuzzy parameters in the objective functions and in the constraints[J]. European J of Operational Research, 2004, 158(3): 678-696.

[15] Xu Fu-xia. Decomposable algorithm for large dynamic programming[J]. China Quarterly J of Maths, 2007, 22(2): 220-224.

[16] Wang Yuping, Dang Chuangyin. An evolutionary algorithm for dynamic multi-objective optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 205(1): 6-18.

[17] Kien B T, Liou Y C, Wong N C, et al. Subgradient of value functions in parametric dynamic programming[J]. European J of Operational Research, 2009, 193(1): 12-22.

[18] Li D, Chan T F, Ng W L. Safety-first dynamic portfolio selection[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 1998, 4(4): 585-600.

[19] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-406.

[20] 张鹏. 多阶段M-SV投资组合优化的离散近似迭代法研究[J]. 经济数学, 2008, 25(3): 257-264.
(Zhang P. The discrete approximate iteration method on the mean-semi-variance multiperiod portfolio selection[J]. Mathematics in Economics, 2008, 25(3): 257-264.)

[21] 张鹏. 基于离散近似迭代法的多阶段M-V投资组合优化[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(8): 44-52.
(Zhang P. The discrete approximate iteration method on the mean-semi-variance multiperiod portfolio selection[J]. Mathematics in Economics, 2009, 39(8): 44-52.)

[22] 张鹏, 张忠桢, 曾永泉. 限制性卖空的均值-方差投资组合优化[J]. 数理统计与管理, 2008, 27(1): 124-129.
(Zhang P, Zhang Z Z, Zeng Y Q. The optimization of the portfolio selection with the restricted short sales[J]. Application of Statistics and Management, 2008, 27(1): 124-129.)

[23] 张鹏. 不允许卖空情况下均值-方差和均值-VaR投资组合比较研究[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 30-35.
(Zhang P. The comparison between mean-variance and mean-VaR portfolio models without short sales[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 30-35.)

(上接第1218页)

[3] Bayardo R J. Efficiently mining long patterns from databases[C]. Proc of the ACM SIGMOD Int Conf on Management of Data. New York: ACM Press, 1998: 85-93.

[4] 路松锋, 卢正鼎. 快速开采最大频繁项目集[J]. 软件学报, 2001, 12(2): 293-297.
(Lu S F, Lu Z D. Fast mining maximum frequent itemsets[J]. J of Software, 2001, 12(2): 293-297.)

[5] 宋余庆, 朱玉全, 孙志挥, 等. 基于FP-Tree的最大频繁项目集挖掘及更新算法[J]. 软件学报, 2003, 14(9): 1586-1592.
(Song Y Q, Zhu Y Q, Sun Z H, et al. An algorithm and its updating algorithm based on FP-Tree for mining maximum frequent itemsets[J]. J of Software, 2003, 14(9): 1586-1592.)

[6] Park J S, Chen M S, Yu P S. Efficient parallel data Mining for association rules[C]. Proc of the 4th Int Conf on Information and Knowledge Management. Baltimore, 1995: 31-36.

[7] Agrawal R, Shafer J C. Parallel mining of association Rules[J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 1996, 8(6): 962-969.

[8] Cheung D W, Han J W, Ng W T, et al. A fast distributed algorithm for mining association rules[C]. Proc of IEEE 4th Int Conf on Management of Data. Miami Beach, 1996: 31-34.

[9] Han J W, Pei J, Yin Y. Mining frequent patterns without candidate generation[C]. Proc of the 2000 ACM SIGMOD Int Conf on Management of Data. Dallas: ACM Press, 2000: 1-12.

[10] 陆介平, 杨明, 孙志挥, 等. 快速挖掘全局最大频繁项目集[J]. 软件学报, 2005, 16(4): 553-560.
(Lu J P, Yang M, Sun Z H, et al. Fast mining of global maximum frequent itemsets[J]. J of Software, 2005, 16(4): 553-560.)