

文章编号: 1001-0920(2011)08-1136-05

高阶滑模微分器的分析与改进

蒲明, 吴庆宪, 姜长生, 程路

(南京航空航天大学 a. 自动化学院, b. 模式识别与智能控制实验室, 南京 210016)

摘要: 首先采用 Terminal 吸引子函数代替原不连续函数, 以避免滑模微分器的抖振; 然后针对现有文献中高阶滑模微分器设计参数选取苛刻这一问题, 放宽了设计参数选择范围, 并分不同情况证明了高阶滑模微分器的稳定性. 在此基础上, 给出了高阶滑模微分器估计误差的上界与设计参数和滑模微分器阶次的关系式; 通过对设计参数的选取和系统整体结构的分析, 提出了高阶滑模微分器减小估计误差且更适于工程应用的设计方法, 并给出所需条件. 仿真结果表明了所得结论的正确性和有效性.

关键词: 高阶滑模微分器; 稳定性证明; 减小误差; 去除抖振; 改进

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Analysis and improvement of higher-order sliding mode differentiator

PU Ming, WU Qing-xian, JIANG Chang-sheng, CHENG Lu

(a. College of Automation Engineering, b. Lab of Pattern Recognition and Intelligent Control, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: PU Ming, E-mail: msznuaa@163.com)

Abstract: Firstly, the discontinuous function is substituted by Terminal attractor function to eliminate chattering. To solve the problem that it is difficult to choose proper design parameters for higher-order differentiator, the range of design parameters is relaxed and the stability of higher-order differentiator in different conditions is proved. By analyzing design parameters and system structure, a design method which is more suitable for engineering application to reduce estimation error is proposed and the conditions needed are given. Finally, the simulation results show the effectiveness and correctness of these conclusions.

Key words: higher-order differentiator; stability prove; reduce error; eliminate chattering; improvement

1 引言

在PID控制、优化控制以及动态滑模控制等很多控制方法中, 均会使用到状态的微分^[1-2]. 然而一般认为, 状态的微分不能直接获得. 早期的方法是采用差分或超前网络来近似估计, 但不论其精度, 还是抑制噪声的效果都不理想. 近年来, 性能更优的各种微分器得到了较大发展, 其中最具代表性的是 Levant^[3-6]提出的高阶滑模微分器和韩京清等人^[7-9]提出的非线性跟踪-微分器. 特别是高阶滑模微分器吸纳了滑模变结构鲁棒性强、精度高、收敛快等优点, 其设计独立于控制系统. 但遗憾的是, 文献[3-6]中设计参数的选取异常苛刻, 实际上无法做到, 且所得结论只反映了一类情况; 此外, 滑模微分器还存在抖振现象.

在文献[3-6]的基础上, 本文利用 Terminal 吸引

子函数代替原不连续函数以避免抖振, 并在不同情况下证明了高阶滑模微分器整体的稳定性, 放宽了设计参数的选择范围; 然后给出高阶滑模微分器估计误差的上界与设计参数及滑模微分器阶次的具体关系式, 通过分析, 提出了更适于工程应用且能减小估计误差的设计方法, 并给出所需条件; 最后通过仿真验证了上述结论的有效性和控制方案的优越性.

2 高阶滑模微分器

2.1 改进的高阶滑模微分器

改进的高阶滑模微分器如下式所示:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0 = z_1 = \\ &-\lambda_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

收稿日期: 2010-05-04; 修回日期: 2010-11-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(90716028, 60974106).

作者简介: 蒲明(1981-), 男, 博士生, 从事飞行控制、滑模控制的研究; 吴庆宪(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、自适应控制等研究.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= v_i = z_{i+1} = \\ &- \lambda_i |z_i - v_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \operatorname{sgn}(z_i - v_{i-1}), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= v_{n-1} = z_n = \\ &- \lambda_{n-1} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \operatorname{sgn}(z_{n-1} - v_{n-2}), \\ \dot{z}_n &= -\lambda_n |z_n - v_{n-1}|^{q/p} \operatorname{sgn}(z_n - v_{n-1}). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $f(t) = f_0(t) + \xi(t)$, $f_0(t)$ 为待微分原始信号, $\xi(t)$ 为 $f_0(t)$ 受到的噪声污染或其他干扰; v_i 为 $f_0(t)$ 的第 $i + 1$ 阶微分估计值; z_i 为系统 (1) 中内部状态; $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ 为微分器设计参数; q, p 为 Terminal 吸引子设计参数.

为便于分析, 令

$$\sigma_0 = z_0 - f_0(t), \dots, \sigma_n = z_n - f_0^{(n)}(t),$$

则在 Filippov 意义下, 式 (1) 可变换为如下误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_0 &= \sigma_1 = \\ &- \lambda_0 |\sigma_0 - \xi(t)|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(\sigma_0 + \xi(t)), \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_i &= \sigma_{i+1} = \\ &- \lambda_i |\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \operatorname{sgn}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}), \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_{n-1} &= \sigma_n = \\ &- \lambda_{n-1} |\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}|^{1/2} \operatorname{sgn}(\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}), \\ \dot{\sigma}_n &= f_0^{(n+1)}(t) = \\ &- \lambda_n |\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}|^{q/p} \operatorname{sgn}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

当式 (2) 中各误差状态 $\sigma_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 收敛于零点时, 高阶滑模微分器内部状态 z_i 可精确估计出 $f_0(t)$ 的第 i 阶微分值 $f_0^{(i)}(t)$.

相比于式 (1), 式 (2) 最后一式显含了 $f_0^{(n+1)}(t)$. 该项是影响滑模微分器性能的重要因素. 下面针对 $f_0^{(n+1)}(t)$ 的不同情况给出系统 (2) 的稳定性证明.

2.2 稳定性分析

定义 1^[10] 对于 $s_i < s'_i, i = 0, 1, \dots, n$, 若 $\xi(t) = 0$ 时, 存在一个有限时刻 T , 使得 $t > T$ 后, 从区域 $|\sigma_i| < s'_i$ 出发的高阶滑模微分器误差状态系统 (2) 的轨迹能够收敛并停留在区域 $|\sigma_i| < s_i$ 之内, 则系统 (2) 是有限时间稳定的, 也即 Lyapunov 稳定的.

定理 1 对于 n 阶滑模微分器误差系统 (2), 当干扰 $\xi(t) = 0$ 时, 对于任意有限初始状态 $\sigma_i(0), i = 0, 1, \dots, n$, 存在 $n+1$ 阶微分的任意时变函数 $f_0(t)$, 取一组足够大的正数 $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, 系统 (2) 是 Lyapunov 稳

定的, 且:

1) 若满足 $f_0^{(n+1)}(t) = 0$, 则系统 (2) 中各状态 σ_i 渐近收敛至零点, 收敛过程振荡衰减.

2) 若满足 $f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$, 且 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 $L > 0$, 则存在一有限时刻 T , 使得 $t > T$ 后, σ_i 收敛至一包含原点的闭球 B_i 内. 闭球半径满足

$$r(B_i) = \frac{L^{(n-i+1)p/q}}{\lambda_n^{(n-i+1)p/q} \lambda_{n-1}^{n-i+1} \lambda_{n-2}^{n-i+1/2} \dots \lambda_i^{(n-i+1)/(n-i)}}, \quad (3)$$

$$r(B_{i+1}) = \lambda_i (r(B_i))^{(n-i)/(n-i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

且收敛过程振荡衰减.

为证明定理 1, 先证明以下几个引理.

引理 1 $|a + b|^l \leq |a|^l + |b|^l, \forall 0 < l < 1$.

证明 若 a, b 同号, 设 $a \geq 0, b \geq 0$. 令 $f(x) = x^l, x > 0, 0 < l < 1$, 有 $f(0) = 0$. 设 $0 \leq x_1 \leq x_2$, 由拉格朗日中值定理有 $f(x_1) - f(0) = x_1 \dot{f}(\xi_1), 0 \leq \xi_1 \leq x_1; f(x_1 + x_2) - f(x_2) = x_1 \dot{f}(\xi_2), x_2 \leq \xi_2 \leq x_1 + x_2$. 因此有 $\xi_1 \leq \xi_2$. 又 $\ddot{f}(x) = l(l-1)x^{l-2} \leq 0$, 则有 $\dot{f}(\xi_1) \leq \dot{f}(\xi_2)$, 所以 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) \leq x_1 \dot{f}(\xi_1) = f(x_1)$. 即 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$. 令 $x_1 = a, x_2 = b$, 引理得证.

当 $a < 0, b < 0$ 时, 以及 a, b 异号时, 引理证明简单, 不再详述. \square

引理 2 存在一足够小的时间段 δ , 对于任意 $0 < s_i < s'_i, i = 0, 1, \dots, n$, 在时间段 δ 内, 若存在一正数 K , 使得

$$\int_{\delta} |\xi(t)| dt < K$$

成立, 则式 (2) 中各误差系统状态从区域 $|\sigma_i| < s_i$ 出发的轨迹不会超出区域 $|\sigma_i| < s'_i$.

证明 设 s_{Mi} 满足 $s_i < s'_i < s_{Mi}, i = 0, 1, \dots, n$, 对于 $|\sigma_0| < s_i$, 由引理 1 有

$$\begin{aligned} |\dot{\sigma}_0| &\leq \lambda_0 (|\sigma_0 - \xi(t)|)^{n/(n+1)} + s_{M1} \leq \\ \lambda_0 |\sigma_0|^{n/(n+1)} + \lambda_0 |\xi(t)|^{n/(n+1)} + s_{M1} &\leq \\ \lambda_0 |\xi(t)|^{n/(n+1)} + s_{M1} + \lambda_0 s_{M0}^{n/(n+1)}. \end{aligned}$$

只要时间段 δ 足够小, $|\sigma_0|$ 变化就足够小, 可以保证 $|\sigma_0| < s'_0$. 再由引理 1 和 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{\delta} |\dot{\sigma}_0| dt &\leq \\ \int_{\delta} (\lambda_0 |\xi(t)|^{n/(n+1)} + s_{M1} + \lambda_0 s_{M0}^{n/(n+1)}) dt &\leq \\ \lambda_0 \int_{\delta} |\xi(t)|^{n/(n+1)} dt + \int_{\delta} (s_{M1} + \lambda_0 s_{M0}^{n/(n+1)}) dt &\leq \\ \left(\int_{\delta} (|\xi(t)|^{n/(n+1)})^{(n+1)/n} dt \right)^{n/(n+1)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\delta} 1^{n+1} dt \right)^{1/(n+1)} \times \lambda_0 + \delta \lambda_0 s_{M0}^{n/(n+1)} + \delta s_{M1} = \\ & \delta^{1/(n+1)} \left(\int_{\delta} |\xi(t)| dt \right)^{n/(n+1)} \times \lambda_0 + \\ & \delta (s_{M1} + \lambda_0 s_{M0}^{n/(n+1)}) \leq \\ & \lambda_0 \delta^{1/(n+1)} K^{n/(n+1)} + \delta (s_{M1} + \lambda_0 s_{M0}^{n/(n+1)}) \triangleq K_0. \end{aligned}$$

因此 σ_1 满足引理 2 的条件. 同理可证 $|\sigma_1| < s'_1$.

逐步递推, 可以证明 $|\sigma_i| < s'_i, i = 2, \dots, n-1$. 特别的, 对于改进的最后一式, 类似于上面证明, 可证得 $|\sigma_n| < s'_n$. \square

定理 1 证明 在引理 1 和引理 2 的前提下, 系统 (2) 的稳定性证明同文献 [1]. 下面仅证明定理 1 其余结论.

1) 考虑式 (2) 的第 1 个方程. 在定理 1 的条件下, $-\lambda_0 |\sigma_0|^{n/(n+1)} \text{sgn}(\sigma_0)$ 总有使 σ_0 趋于零的作用, 同时将 σ_1 视为扰动部分. 对于给定的 $|\sigma_1|$, 若 $|\sigma_0|$ 总存在一定的值得 $\dot{\sigma}_0 = 0$, 记该 $|\sigma_0|$ 值为第 k_i 次振幅 $r(B_{0k_i})$, 则有 $r(B_{0k_i}) = \Gamma(r(B_{1k_j}))$, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 为某一函数. 其他各方程有相同定义.

假设定理 1 结论不成立, 若有 $r(B_{0k_{i+1}}) \geq r(B_{0k_i})$, 则须 $|\sigma_{1k_{j+1}}| \geq |\sigma_{1k_j}|$. 以此递推, 为满足上述假设, 必须 $|\sigma_{nk_{k+1}}| \geq |\sigma_{nk_k}|$. 在定理 1 的条件 1) 下, 联合式 (2) 中最后两式, 显然 $|\sigma_{nk_{k+1}}| \geq |\sigma_{nk_k}|$ 这一条件不成立. 因此, 假设不成立, 定理 1 的结论 1) 得证.

2) 将式 (2) 中前 $n-1$ 个式子代入式 (2) 的最后一式, 因为 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 L , 并取上界 $f_0^{(n+1)}(t) = L$ 及 $\dot{\sigma}_n = 0$, 所以

$$\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \lambda_{n-2}^{q/2p} \dots \lambda_0^{q/np} |\sigma_0|^{q/(n+1)p} = L.$$

化简后即有

$$r(B_0) = \left(\frac{L}{\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \lambda_{n-2}^{q/2p} \dots \lambda_0^{q/np}} \right)^{(n+1)p/q} = \frac{L^{(n+1)p/q}}{\lambda_n^{(n+1)p/q} \lambda_{n-1}^{n+1} \lambda_{n-2}^{(n+1)/2} \dots \lambda_0^{(n+1)/n}}.$$

因而结论 $r(B_{i+1}) = \lambda_i (r(B_i))^{(n-i)/(n-i+1)} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 显然可得. 逐步代入, 有

$$\begin{aligned} r(B_1) &= \lambda_0 r(B_0)^{n/(n+1)} = \\ & \lambda_0 \left(\frac{L^{(n+1)p/q}}{\lambda_n^{(n+1)p/q} \lambda_{n-1}^{n+1} \dots \lambda_0^{(n+1)/n}} \right)^{n/(n+1)} = \\ & \frac{\lambda_0 L^{np/q}}{\lambda_n^{np/q} \lambda_{n-1}^n \dots \lambda_0^{n/n}} = \frac{L^{np/q}}{\lambda_n^{np/q} \lambda_{n-1}^n \dots \lambda_1^{n/(n-1)}}. \end{aligned}$$

现假设

$$r(B_{i-1}) = \frac{L^{(n-i+2)p/q}}{\lambda_n^{(n-i+2)p/q} \lambda_{n-1}^{(n-i+2)} \dots \lambda_{i-1}^{(n-i+2)/(n-i+1)}},$$

则有

$$\begin{aligned} r(B_i) &= \\ & \lambda_{i-1} \left(\frac{L^{(n-i+2)p/q}}{\lambda_n^{(n-i+2)p/q} \lambda_{n-1}^{(n-i+2)} \dots \lambda_{i-1}^{(n-i+2)/(n-i+1)}} \right)^{\frac{n-i+1}{n-i+2}} = \\ & \lambda_{i-1} \frac{L^{(n-i+1)p/q}}{\lambda_n^{(n-i+1)p/q} \lambda_{n-1}^{n-i+1} \dots \lambda_{i-1}^{(n-i+1)/(n-i+1)}} = \\ & \frac{L^{(n-i+1)p/q}}{\lambda_n^{(n-i+1)p/q} \lambda_{n-1}^{n-i+1} \dots \lambda_i^{(n-i+1)/(n-i)}}. \end{aligned}$$

由数学归纳法可证得式 (3). 其他结论参见 1) 中的证明. \square

注 1 在以上证明中, 假设 σ_i 是一维的. 当 σ_i 是多维状态向量时, 也有类似的证明.

注 2 因为设计参数 λ_i 是任意选取的, 误差系统各状态初始值 $\sigma_i(0) (i = 0, 1, \dots, n)$ 及其正负符号并不相同, 所以式 (2) 中, 总是存在某些误差系统状态先收敛到零点而其他误差系统状态尚未收敛到零点的情况, 即各 σ_i 的收敛速度不相同. 以 $\sigma_{i+1} \neq 0, \sigma_j = 0 (j \neq i+1, 0 \leq j \leq n)$ 为例. 因为方程之间存在耦合, $\sigma_{i+1} \neq 0$, 所以 $\dot{\sigma}_i \neq 0$, 使得 σ_i 偏离原点. 逐步递推, 最终使得所有误差系统状态均偏离原点. 因此只有 $[0, \dots, 0]$ 才是系统 (4) 的唯一平衡点.

注 3 在定理 1 结论 2) 的证明中, 因确定了恒定边界 $r(B_i)$, 故有 $f_0^{(n+1)} = L, \dot{\sigma}_i = 0$ 这一静态的考虑是成立的.

注 4 当 $f_0^{(n+1)}(t) = 0$ 时, 系统 (2) 实际上是一个负能量系统. 当 $f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$ 时, 相当于第 n 个方程中存在一个干扰源, 此时, σ_i 收敛到原点后, 在 $f_0^{(n+1)}(t)$ 的作用下将再次偏离原点. 但注意到 $f_0^{(n+1)}(t)$ 具有上界 L , 因此 $f_0^{(n+1)}(t)$ 对 σ_i 产生偏离原点的影响是有限的. 可见, 讨论 σ_i 对应的闭球半径 $r(B_i)$ 比讨论 σ_i 何时收敛到原点更有意义. 只要 $r(B_i)$ 足够小, 总能满足工程需要.

注 5 $r(B_i)$ 的大小仅与 $\lambda_n, \dots, \lambda_i$ 有关, 而与 $\lambda_{i-1}, \dots, \lambda_0$ 无关. 这正反映了扰动项 $f_0^{(n+1)}(t)$ 的影响从后向前传播的趋势, 以及相应各滑模克服扰动的的作用.

2.3 两个重要结论

$f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$ 的情况是比较普遍的. 如果固定了微分器的阶次 n , 则根据定理 1 的结论 2), 要减小 $r(B_i)$, 即提高估计精度, 只能增大 $\lambda_n, \dots, \lambda_i$. 然而参数选取过大, 一是工程实现上难度增大, 二是会引起抖振等不利影响. 反之, 将滑模微分器可变的阶次 n 作为一种减小估计误差的手段, 则由定理 1 的结论 2) 可知, 要使 σ_i 满足给定的要求精度 ε , 需有

$$r(B_i) = \left(\frac{L}{\lambda_n \dots \lambda_i^{q/p(n-i)}} \right)^{p(n-i+1)/q} < \varepsilon, \quad (5)$$

即

$$\lambda_n \cdots \lambda_i^{q/p(n-i)} > \frac{L}{\varepsilon^{q/p(n-i+1)}}. \quad (6)$$

由于 i 和 L 固定, n 越大, 不等式 (6) 的右边越小, 而且左边设计参数的增加, 更有利于减小误差和防止设计参数过大. 于是有如下结论:

定理 2 在 n 阶滑模微分器误差系统 (2) 中, 若 $\xi(t) = 0, f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$, 且 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 $L > 0$, 设计参数满足

$$L < \frac{(\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \cdots \lambda_j^{q/p(n-j)})^{(j-i)/(n-2i+j+1)}}{(\lambda_{j-1}^{q/p(n-j+1)} \cdots \lambda_i^{q/p(n-i)})^{(n-i+1)/(n-2i+j+1)}}, \quad (7)$$

则阶次低的误差状态 σ_i 所对应的闭球半径 $r(B_i)$ 小于阶次高的误差状态 σ_i 所对应的闭球半径 $r(B_j)$, $0 \leq i < j \leq n$.

证明 由定理 1 的结论 2), 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{L}{\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \cdots \lambda_j^{q/p(n-j)}} \right)^{(n-j+1)p/q} > \\ & \left(\frac{L}{\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \cdots \lambda_i^{q/p(n-i)}} \right)^{(n-i+1)p/q} = \\ & \left(\frac{L}{\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \cdots \lambda_j^{q/p(n-j)}} \right)^{(n-j+1)p/q} \times \\ & \left(\frac{L}{\lambda_n \lambda_{n-1}^{q/p} \cdots \lambda_j^{q/p(n-j)}} \right)^{(j-i)p/q} \times \\ & \left(\frac{L}{\lambda_{j-1}^{q/p(n-j+1)} \cdots \lambda_i^{q/p(n-i)}} \right)^{(n-i+1)p/q}. \end{aligned}$$

上式经化简即可得到定理 2 的结论. \square

注 6 不能从定理 1 的结论 2) 中 $r(B_{i+1}) = \lambda_i (r(B_i))^{(n-i)/(n-i+1)}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) 简单地认为只要 $\lambda_i > 1$, 即能保证定理 2 成立. 因为此时若要满足 $r(B_i) < r(B_{i+1})$, 又会有新的要求出现, 即 $r(B_{i+1}) < \lambda_i^{n-i+1}$. 这从证明来看并不完全满足.

定理 3 在 n 阶滑模微分器误差系统 (2) 中, 假设 $\xi(t) = 0, f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$, 且 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 $L > 0$. 若取 n_1 阶滑模微分器参数 $\lambda_{n_1, n_1}, \lambda_{n_1, n_1-1}, \dots, \lambda_{n_1, 0}$ 及 n_2 阶滑模微分器参数 $\lambda_{n_2, n_2}, \lambda_{n_2, n_2-1}, \dots, \lambda_{n_2, 0}$, 且设计参数满足

$$L < \left(\frac{(\lambda_{n_1, n_1} \cdots \lambda_{n_1, i}^{q/p(n_1-i)})^{n_1-i+1}}{(\lambda_{n_2, n_2} \cdots \lambda_{n_2, i}^{q/p(n_2-i)})^{n_2-i+1}} \right)^{1/(n_1-n_2)}, \quad (8)$$

则由 n_1 阶滑模微分器所得的第 i 阶微分估计误差对应的闭球半径 $r(B_{n_1, i})$ 小于由 n_2 阶滑模微分器所得的第 i 阶微分估计误差对应的闭球半径 $r(B_{n_2, i})$, $n_1 > n_2, i \leq n_2$.

定理 3 的证明类似于定理 2, 此处不再详述.

注 7 定理 2 和定理 3 的条件较弱, 在设计微分器时很容易满足.

注 8 从式 (2) 知, $f_0^{(n+1)}(t)$ 作用在第 n 个滑模面上, 即

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \int -\lambda_1 |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{(n-1)/n} \operatorname{sgn}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) + \\ & \int -\lambda_2 |\sigma_2 - \dot{\sigma}_1|^{(n-2)/(n-1)} \operatorname{sgn}(\sigma_2 - \dot{\sigma}_1) + \\ & \underbrace{\int \cdots \int}_{n-2} -\lambda_n |\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}|^{1/2} \operatorname{sgn}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}) - \\ & \underbrace{f_0^{(n+1)}(t) dt \cdots dt}_n. \end{aligned}$$

定理 3 的作用类似于高阶动态滑模克服抖振.

2.4 两个特例

定理 1 的两个特例, 如推论 1 所示:

推论 1 对于任意给定有限初始状态 $\sigma_i(0) (i = 0, 1, \dots, n)$ 的 n 阶滑模微分器误差系统 (2), 及存在 $n+1$ 阶微分的任意时变函数 $f_0(t)$, 有:

1) 若满足 $f_0^{(n+1)}(t) = 0$, 则总存在一组恰当的有限正数 $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, 使得 n 阶滑模微分器各误差状态 $\sigma_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 刚好同时收敛于原点, 系统 (2) 在有限时间 T 内收敛至平衡点;

2) 若 $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ 均取为无穷大, 则 n 阶滑模微分器误差系统 (2) 能任意点精确跟踪信号各阶微分.

注 9 推论 1 的第 1 个结论即为 Levant 在文献 [1] 中所得结论; 第 2 个结论则类似于韩京清在文献 [2] 中所得结论. 推论 1 在理论上成立, 但实际中无法做到.

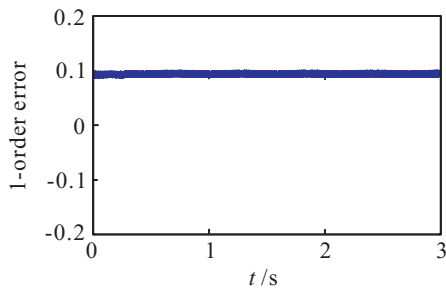
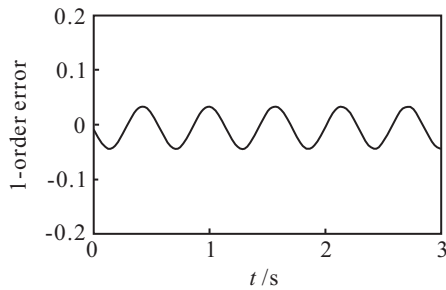
注 10 限于篇幅, 关于 $\xi(t) \neq 0$ 的情况将另文研究.

3 仿真算例

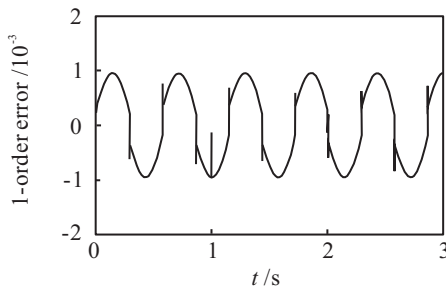
任何函数总可以分解为不同频率的正弦信号之和, 因此仿真中仅考虑 $f_0(t) = \sin(at)$ 的情况, 其中 a 为某一正数, 代表正弦信号具有的某一频率. 若 $a < 1$, 则总可以选择足够高阶次的 n 阶滑模微分器, 使得 $f_0^{(n+1)}(t) \approx 0$. 当 $a \geq 1$ 时, 通过定理 3 的结论选取恰当的阶次 n 可削弱 $f_0^{(n+1)}(t)$ 的影响, 提高估计精度.

根据系统 (1) 分别设计各阶滑模微分器, 当 $\xi(t) = 0$ 时, 估计 $\sin(11t)$ 的微分. 限于篇幅, 这里仅给出各阶滑模微分器对 $(\sin 11t)'$ 的估计误差曲线.

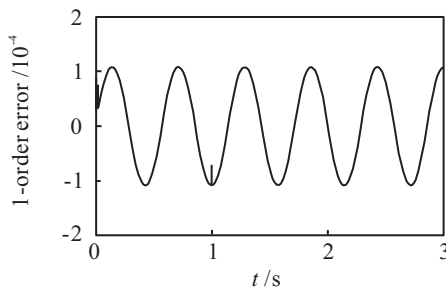
未改进和改进的一阶滑模微分估计器设计参数均取为 $\lambda_0 = 500, \lambda_1 = 3000, q = 5, p = 7$. 对 $\sin(11t)'$ 的估计误差分别如图 1 和图 2 所示. 对比图 1 和图 2 可以看出, 改进后的滑模微分器很好地消除了抖振.

图 1 一阶未改进滑模微分器中 $\sin(11t)'$ 的估计误差图 2 一阶改进滑模微分器中 $\sin(11t)'$ 的估计误差

改进的二阶滑模微分估计器设计参数为 $\lambda_0 = 500, \lambda_1 = 3000, \lambda_2 = 6000, q = 5, p = 7$. 对 $\sin(11t)'$ 的估计误差如图 3 所示.

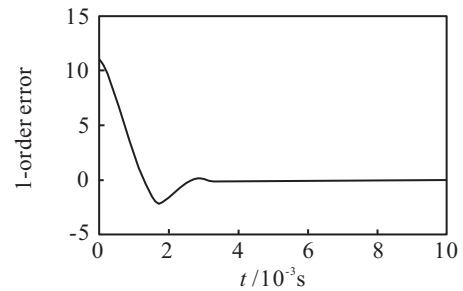
图 3 二阶改进滑模微分器中 $\sin(11t)'$ 的估计误差

改进的三阶滑模微分估计器设计参数为 $\lambda_0 = 500, \lambda_1 = 3000, \lambda_2 = 6000, \lambda_3 = 4000, q = 5, p = 7$. 对 $\sin(11t)'$ 的估计误差如图 4 所示.

图 4 三阶改进滑模微分器中 $\sin(11t)'$ 的估计误差

从图 2~图 4 可以看出, 滑模微分器的阶次越高, 所获得的 $\sin(11t)'$ 的估计误差越小.

图 5 为三阶微分器所得 $\sin(11t)'$ 的估计误差在 $0 \sim 0.005$ s 内的曲线图. 可以清楚看到收敛过程是振荡衰减过程, 且微分器收敛速度快, 进入稳态的时间小于 0.005 s.

图 5 三阶改进滑模微分器中 $\sin(11t)'$ 的估计误差收敛过程

4 结 论

本文对高阶滑模微分器进行了深入分析. 首先采用 Terminal 吸引子函数代替原不连续函数, 很好地避免了滑模微分器的抖振; 然后放宽设计参数选择范围, 并在不同情况下, 以泛函分析理论为基础证明了误差系统的稳定性, 给出了高阶滑模微分器估计误差的上界与设计参数及滑模微分器阶次的具体关系式, 提出了减小高阶滑模微分器估计误差且更适于工程应用的设计方法, 并给出所需条件; 最后通过仿真实验表明了所提出方案的有效性和优越性.

参考文献(References)

- [1] 郑剑飞, 冯勇, 郑雪梅. 不确定非线性系统的自适应反演终端滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4): 410-414.
(Zheng J F, Feng Y, Zheng X M. Adaptive backstepping-based terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(4): 410-414.)
- [2] 王艳丽, 冯勇, 韩向东. 不确定多变量系统的高阶滑模控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 455-459.
(Wang Y L, Feng Y, Han X D. High-order sliding mode control of uncertain multivariable systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(4): 455-459.)
- [3] Arie Levant. High-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. Int J of Control, 2003, 76(9/10): 924-941.
- [4] Arie Levant, Leonid M Fridman. Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(3): 810-814.
- [5] Arie Levant. Principles of 2-sliding mode design[J]. Automatica, 2007, 43(4): 576-586.
- [6] Arie Levant. Finite differences in homogeneous discontinuous control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(7): 1208-1217.
- [7] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪-微分器[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 177-183.
(Han J Q, Wang W. Nonlinear tracking-differentiator[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 1994, 14(2): 177-183.)