文章编号: 1001-0920 (2011) 08-1224-05

线性随机系统有限时间 H_∞ 控制

严志国, 张国山

(天津大学 电气与自动化工程学院，天津 300072)

摘 要: 讨论一类具有时变、有限能量外部扰动的线性随机系统有限时间 H_∞ 控制问题. 首先, 给出了线性随机系统有限时间 H_∞ 控制问题的定义; 然后, 通过构造 Lyapunov-Krasovskii 函数, 并结合线性矩阵不等式, 给出了随机系统有限时间 H_∞ 控制器有解的充分条件; 进一步, 将该问题简化为具有线性矩阵不等式约束的优化问题, 并给出了相应的求解算法; 最后, 通过数值算例表明了该设计方法的有效性.

关键词: 随机系统；有限时间 H_∞ 控制；时变外界干扰；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Finite-time H_∞ control for linear stochastic systems

YAN Zhi-guo, *ZHANG Guo-shan*

(School of Electrical Engineering and Automation，Tianjin University，Tianjin 300072，China. Correspondent：YAN Zhi-guo，E-mail：yanzg500@sina.com)

Abstract: The finite time H_∞ control problem for a class of linear stochastic systems with norm bounded exogenous disturbance is considered. Firstly, the definition of finite time H_∞ control of linear stochastic systems is given. Then by constructing Lyapunov-Krasoviskii function and using linear matrix inequality approach, a sufficient condition for finite time H_∞ control of linear stochastic systems is presented. Furthermore, the problem is reduced to the optimization problem under the constraint of linear matrix inequalities and the corresponding solving algorithm is given. Finally, an example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: stochastic systems；finite-time H_∞ control；time-varying exogenous disturbance；linear matrix inequality

1 引 言

近年来, 随机系统的 H_∞ 控制问题正受到越来越多学者的关注, 已成为控制理论界研究的热门方向之一. 文献 [1] 研究了一般形式的随机系统 H_∞ 控制问题, 并以线性矩阵不等式的形式给出了随机有界实引理; 同时考虑了输出反馈 H_∞ 控制问题, 得到了一个充分条件. [2] 研究了不确定随机系统的 H_∞ 控制问题, 并以广义 Riccati 不等式的形式, 给出了充分必要条件. [3] 以耗散的观点研究了随机非线性系统 H_∞ 控制问题, 并以哈密尔顿-雅可比不等式 (HJI) 的形式给出了非线性随机有界实引理. 目前, 对这类问题的研究成果大都是基于 Lyapunov 意义的随机稳定性[4]. 基于 Lyapunov 意义的稳定性是刻画系统无限时间上的渐近行为, 即稳态性能, 它并不反映系统的暂态性能. 在实际工业过程中, 除了系统的稳态性能外, 暂态性能有时尤其重要, 比如要求控制系统的轨迹不能超过某一个给定的界限. 实际上, 在 Lyapunov 意义下稳定的系统可能具有很坏的暂态性能(如振荡剧烈), 无法满足工业生产要求. 对此, [5-6] 提出了有限时间稳定的概念. 但因当时缺少检验有限时间稳定性的有效工具, 人们的兴趣主要集中在经典的 Lyapunov 稳定性上.

近年来, 线性矩阵不等式理论的发展促进了对有限时间稳定的研究. 基于线性矩阵不等式理论, 文献 [7] 重新给出了有限时间稳定的概念; [8] 提出了使得闭环系统为有限时间有界的动态输出反馈控制器设计方法, 并以线性矩阵不等式的形式给出了充分条件; [9] 进一步提出了有限时间 (c_1, c_2)- 稳定性, 并给出了判别准则以及镇定控制器存在的充分条件. 有限时间稳定性的概念被推广到奇异系统[10]、随机系统[11]以及脉冲系统[12]. 然而据作者所知, 对于随机伊藤系统

收稿日期: 2010-05-04; **修回日期:** 2011-01-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674019, 61074088).

作者简介: 严志国(1981–), 男, 博士生, 从事随机系统、广义系统的研究；张国山(1961–), 男, 教授, 博士生导师, 从事广义系统、非线性系统及鲁棒控制等研究.

的研究, 目前几乎没有文献将有限时间稳定性与 H_∞ 控制问题相结合.

本文提出了随机系统有限时间稳定的 H_∞ 控制问题. 首先, 给出了受时变有界干扰的随机系统有限时间 H_∞ 控制问题的定义. 该定义即为寻求一个反馈控制器, 使得闭环系统是有限时间随机有界的, 且满足从干扰输入到控制输出的增益小于一个给定的正常数. 其意义在于既考虑了系统在给定时间段上的瞬态响应, 又考虑了对干扰的抑制效果. 进而, 以矩阵不等式的形式给出了随机系统有限时间 H_∞ 控制器存在的充分条件.

2　定义和问题描述

首先给出如下记号: A': 矩阵或向量 A 的转置; $A>0\,(A\geqslant 0)$: A 是正定或半正定矩阵; $I_{n\times n}$: n 阶单位阵; $\mathrm{tr}\,(A)$: 矩阵 A 的迹; $\lambda_{\max}(A)(\lambda_{\min}(A))$: 矩阵 A 的最大或最小特征值.

考虑如下线性随机系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=(Ax(t)+Gv(t))\mathrm{d}t+\\ \qquad (A_1x(t)+G_1v(t))\mathrm{d}w(t),\\ x(0)=x_0.\end{cases}\tag{1}$$

其中: A, A_1, G, G_1 是常数矩阵; $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 是系统的状态; $w(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的标准一维 Brown 运动; $v(t)$ 是外界干扰且满足

$$\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s<d^2.\tag{2}$$

定义 1[11]　系统 (1) $(v(t)=0)$ 关于 (c_1,c_2,T,R) 是有限时间随机稳定的, 如果

$$x'(0)Rx(0)\leqslant c_1^2\Rightarrow \mathrm{E}x'(t)Rx(t)<c_2^2,\ \forall t\in[0,T].$$

其中: $c_1>0, c_2>c_1, R>0, T>0$.

定义 2[11]　系统 (1) 关于 (c_1,c_2,T,R,d) 是有限时间随机有界的, 如果

$$x_0'Rx_0\leqslant c_1^2\Rightarrow \mathrm{E}x'(t)Rx(t)<c_2^2,\ \forall t\in[0,T].$$

其中: $0\leqslant c_1<c_2, R\geqslant 0, T>0$.

注 1　从定义 1 和定义 2 可以看出, 有限时间随机稳定是有限时间随机有界的特殊情况 $(v(t)=0)$.

考虑如下线性随机控制系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=(Ax(t)+Bu(t)+Gv(t))\mathrm{d}t+\\ \qquad (A_1x(t)+B_1u(t)+G_1v(t))\mathrm{d}w(t),\\ z(t)=Cx(t)+D_1u(t)+D_2v(t),\\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{3}$$

对 式 (3) 应用状态反馈

$$u(t)=Kx(t),\tag{4}$$

得到闭环系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=(\bar{A}x(t)+Gv(t))\mathrm{d}t+\\ \qquad (\bar{A}_1x(t)+G_1v(t))\mathrm{d}w(t),\\ z(t)=\bar{C}x(t)+D_2v(t),\\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{5}$$

其中: $\bar{A}=A+BK, \bar{A}_1=A_1+B_1K, \bar{C}=C+D_1K$, K 是一个待求的反馈增益矩阵.

本文研究的有限时间 H_∞ 控制问题定义如下:

给定一个 $\gamma>0$, 设计状态反馈控制器 (4) 使得:

1) 闭环系统 (5) 是有限时间随机有界的;

2) 在 0 初始条件下, 对于任意非零干扰 $v(t)$, 控制输出 $z(t)$ 满足如下关系式:

$$\mathrm{E}\int_0^t z'(\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau<\gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{6}$$

注 2　本文定义的有限时间 H_∞ 控制问题与文献 [13] 中关于有限水平 H_∞ 控制问题的定义不同. 本文的定义既考虑了系统在给定时间段上的瞬态响应, 又考虑了对干扰的抑制效果; 而文献 [13] 中的定义仅考虑了对干扰的抑制效果, 没有考虑系统在给定时间段上的瞬态响应.

为了推导本文的主要结果, 将用到如下引理:

引理 1 (Gronwall 不等式)[14]　设 $v(t)$ 是一个非负函数, 若对于常数 a 和 $b\geqslant 0$, 满足

$$v(t)\leqslant a+b\int_0^t v(s)\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

则有下式成立:

$$v(t)\leqslant a\exp(bt),\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

引理 2 (Schur's 补)　对于实矩阵 N, $M'=M$, $R=R'>0$, 下列两式等价:

1) $M+NR^{-1}N'<0$;

2) $\begin{bmatrix}M & N\\ N' & -R\end{bmatrix}<0$.

3　主要结果

下面将解决系统 (3) 有限时间 H_∞ 控制问题, 并给出充分条件. 为此, 先给出几个重要引理.

引理 3　系统 (1) 关于 (c_1,c_2,T,R,d) 是有限时间随机有界的, 如果存在一个标量 $\alpha\geqslant 0$ 和两个对称正定矩阵 $Q_1\in\mathcal{R}^{n\times n}$ 和 $Q_2\in\mathcal{R}^{l\times l}$ 且满足

$$\begin{bmatrix}\tilde{Q}_1A'+A\tilde{Q}_1-\alpha\tilde{Q}_1 & G & \tilde{Q}_1A_1'\\ * & -Q_2 & G_1'\\ * & * & -\tilde{Q}_1\end{bmatrix}<0,\tag{7}$$

和

$$\frac{c_1^2}{\lambda_{\min}(Q_1)}+\lambda_{\max}(Q_2)d^2<\frac{c_2^2}{\lambda_{\max}(Q_1)}\mathrm{e}^{-\alpha T},\tag{8}$$

其中 $\tilde{Q}_1=R^{-\frac{1}{2}}Q_1R^{-\frac{1}{2}}$.

证明　令 $V(x(t))=x'(t)\tilde{Q}_1^{-1}x(t)$, 设系统 (1) 的微分生成算子为 $\mathcal{L}_1$, 其定义见文献 [4]. 根据 Ito 公式,

得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_1V(x(t))=\\&[Ax(t)+Gv(t)]'\tilde{Q}_1^{-1}x(t)+\\&x'(t)\tilde{Q}_1^{-1}[Ax(t)+Gv(t)]+\\&[A_1x(t)+G_1v(t)]'\tilde{Q}_1^{-1}[A_1x(t)+G_1v(t)]=\\&\begin{bmatrix}x(t)\\v(t)\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}Z_1 & A_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1+\tilde{Q}_1^{-1}G\\ * & G_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\v(t)\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{9}$$

其中$Z_1=A'\tilde{Q}_1^{-1}+\tilde{Q}_1^{-1}A+A_1'Q_1^{-1}A_1$.

在条件(7)两边同乘以$\mathrm{diag}\{\tilde{Q}_1^{-1},I,\tilde{Q}_1^{-1}\}$, 得到等价条件

$$\begin{bmatrix}A'\tilde{Q}_1^{-1}+\tilde{Q}_1^{-1}A-\alpha\tilde{Q}_1^{-1} & \tilde{Q}_1^{-1}G & A_1'\tilde{Q}_1^{-1}\\ * & -Q_2 & G_1'\tilde{Q}_1^{-1}\\ * & * & -\tilde{Q}_1^{-1}\end{bmatrix}<0.\tag{10}$$

由引理2易知, 式(10)与下式等价:

$$\begin{bmatrix}\varGamma_0 & A_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1+\tilde{Q}_1^{-1}G\\ * & -Q_2+G_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1\end{bmatrix}<0,\tag{11}$$

其中

$$\varGamma_0=A\tilde{Q}_1^{-1}+\tilde{Q}_1^{-1}A'+A_1'Q_1^{-1}A_1-\alpha\tilde{Q}_1^{-1}.$$

从式(9)和(11), 可得

$$\mathcal{L}_1V(x(t))<\alpha V(x(t))+v'(t)Q_2v(t).\tag{12}$$

对(12)从0到t积分, 然后取数学期望, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(x(t))<&V(x(0))+\alpha\int_0^t\mathrm{E}V(x(s))\mathrm{d}s+\\&\mathrm{E}\int_0^t v'(s)Q_2v(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{13}$$

根据引理1, 有

$$\mathrm{E}V(x(t))<V(x(0))\mathrm{e}^{\alpha t}+\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}\int_0^t v'(s)Q_2v(s)\mathrm{d}s.\tag{14}$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(x(t))=&\mathrm{E}x'(t)R^{1/2}Q_1^{-1}R^{1/2}x(t)\geqslant\\&\lambda_{\min}(Q_1^{-1})\mathrm{E}x'(t)Rx(t),\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}V(x(0))\mathrm{e}^{\alpha t}=&x'(0)R^{1/2}Q_1^{-1}R^{1/2}x(0)\mathrm{e}^{\alpha t}\leqslant\\&\lambda_{\max}(Q_1^{-1})x'(0)Rx(0)\mathrm{e}^{\alpha t}\leqslant\\&\lambda_{\max}(Q_1^{-1})c_1^2\mathrm{e}^{\alpha T},\end{aligned}\tag{16}$$

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}\int_0^t v'(s)Q_2v(s)\mathrm{d}s<\mathrm{e}^{\alpha T}\lambda_{\max}(Q_2)d^2.\tag{17}$$

所以, 由式(15)～(17)容易得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}x'(t)Rx(t)\leqslant\\&\lambda_{\max}(Q_1)\mathrm{e}^{\alpha T}\Big[\frac{c_1^2}{\lambda_{\min}(Q_1)}+\lambda_{\max}(Q_2)d^2\Big].\end{aligned}\tag{18}$$

考虑到条件(8), 易知对于$t\in[0,T]$, 有$\mathrm{E}x'(t)Rx(t)<c_2^2$. □

引理4 系统(1)关于(c_1,c_2,T,R,d)是有限时间随机有界的, 如果存在两个标量$\alpha\geqslant 0$, $\gamma>0$和一个正定矩阵$Q_1\in R^{n\times n}$满足

$$\begin{bmatrix}A\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_1A'-\alpha\tilde{Q}_1 & G & \tilde{Q}_1A_1'\\ * & -\gamma^2I & G_1'\\ * & * & -\tilde{Q}_1\end{bmatrix}<0,\tag{19}$$

和

$$\frac{c_1^2}{\lambda_{\min}(Q_1)}+d^2\gamma^2<\frac{c_2^2}{\lambda_{\max}(Q_1)}\mathrm{e}^{-\alpha T},\tag{20}$$

其中$\tilde{Q}_1=R^{-\frac{1}{2}}Q_1R^{-\frac{1}{2}}$.

证明 令$Q_2=\gamma^2I$, 类似于引理3的证明方法, 易证得该结论. □

引理5 系统(5)关于(c_1,c_2,T,R,d)是有限时间随机有界的, 且满足式(6), 如果存在两个标量$\alpha\geqslant 0,\gamma>0$和一个正定矩阵$Q_1\in R^{n\times n}$满足式(20)和

$$\begin{bmatrix}\varGamma_1 & G+\tilde{Q}_1\bar{C}'D_2 & \tilde{Q}_1\bar{A}_1'\\ * & -\gamma^2I+D_2'D_2 & G_1'\\ * & * & -\tilde{Q}_1\end{bmatrix}<0.\tag{21}$$

其中: $\tilde{Q}_1=R^{-\frac{1}{2}}Q_1R^{-\frac{1}{2}}$, $\varGamma_1=\bar{A}\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_1\bar{A}'-\alpha\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_1\bar{C}'\bar{C}\tilde{Q}_1$.

证明 注意到

$$\begin{bmatrix}\tilde{Q}_1\bar{C}'\bar{C}\tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_1\bar{C}'D_2 & 0\\ D_2'\bar{C}\tilde{Q}_1 & D_2'D_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{Q}_1\bar{C}'\\ D_2'\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{Q}_1\bar{C}'\\ D_2'\\ 0\end{bmatrix}'\geqslant 0,\tag{22}$$

因此, 条件(21)意味着

$$\begin{bmatrix}\bar{A}\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_1\bar{A}'-\alpha\tilde{Q}_1 & G & \tilde{Q}\bar{A}_1'\\ * & -\gamma^2I & G_1'\\ * & * & -\tilde{Q}_1\end{bmatrix}<0.\tag{23}$$

由引理4知, 条件(20)和(21)保证了系统(3)是有限时间随机有界的. 下面证明条件(21)能保证(6)成立.

令$V(x(t))=x'(t)\tilde{Q}_1^{-1}x(t)$, 设系统(5)的微分生成算子为$\mathcal{L}_2$, 应用Ito公式, 得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_2V(x(t))=\\&\begin{bmatrix}x(t)\\v(t)\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\bar{Z}_1 & \bar{A}_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1+\tilde{Q}_1^{-1}G\\ * & G_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\v(t)\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{24}$$

其中$\bar{Z}_1=\bar{A}'\tilde{Q}_1^{-1}+\tilde{Q}_1^{-1}\bar{A}+\bar{A}_1'Q_1^{-1}\bar{A}_1$.

在条件(21)左右两边同乘以$\mathrm{diag}\{\tilde{Q}_1^{-1},I,\tilde{Q}_1^{-1}\}$,得到等价条件

$$\begin{bmatrix}\varGamma_2 & \tilde{Q}_1^{-1}G+\bar{C}D_2 & \bar{A}_1'\tilde{Q}_1^{-1}\\ * & -\gamma^2I+D_2'D_2 & G_1'\tilde{Q}_1^{-1}\\ * & * & -\tilde{Q}_1^{-1}\end{bmatrix}<0,\tag{25}$$

其中$\varGamma_2=\bar{A}'\tilde{Q}_1^{-1}+\tilde{Q}_1^{-1}\bar{A}-\alpha\tilde{Q}_1^{-1}+\bar{C}'\bar{C}$.

由引理4易知, 条件(25)与下式等价:

$$\begin{bmatrix}\varGamma_3 & \bar{A}_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1+\tilde{Q}_1^{-1}G+\bar{C}D_2\\ * & -\gamma^2I+G_1'\tilde{Q}_1^{-1}G_1+\bar{D}_2'D_2\end{bmatrix}<0,\tag{26}$$

其中$\varGamma_3=\bar{A}'\tilde{Q}_1^{-1}+\tilde{Q}_1^{-1}\bar{A}+\bar{A}_1'Q_1^{-1}\bar{A}_1-\alpha\tilde{Q}_1^{-1}+\bar{C}'\bar{C}$.

由式 (24) 和 (26), 得到

$$\mathcal{L}_2V(x(t)) < \alpha V(x(t)) + \gamma^2 v'(t)v(t) - z'(t)z(t). \tag{27}$$

在 0 初始条件下, 对式 (27) 从 0 到 t 积分, 然后取数学期望, 再根据引理 1 有

$$\mathrm{E}V(x(t)) < \mathrm{e}^{\alpha t}\left[\gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s - \mathrm{E}\int_0^t z'(s)z(s)\mathrm{d}s\right]. \tag{28}$$

显然, 式 (28) 意味着下式成立:

$$\mathrm{E}\int_0^t z'(s)z(s)\mathrm{d}s < \gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s. \qquad \square$$

有了上面的引理, 可以给出本文的主要结果:

定理 1 存在状态反馈控制器 (4), 使得闭环系统 (5) 关于 (c_1, c_2, T, R, d) 是有限时间随机有界的, 且满足条件 (6). 如果存在两个标量 $\alpha \geqslant 0, \gamma > 0$ 和一个正定矩阵 Q_1 和矩阵 L, 且满足条件 (20) 和

$$\begin{bmatrix} \varGamma_4 & G & \tilde{Q}_1A_1' + L'B_1' & \tilde{Q}_1C' + L'D_1 \\ * & -\gamma^2 I & G_1' & D_2 \\ * & * & -\tilde{Q}_1 & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{29}$$

其中: $\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}}Q_1R^{-\frac{1}{2}}$, $\varGamma_4 = A\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1A' - \alpha\tilde{Q}_1 + BL + L'B'$.

证明 注意到 $\bar{A} = A + BK$, $\bar{A}_1 = A_1 + BK_1$, $\bar{C} = C + D_1K$, 令 $L = K\tilde{Q}_1$, 据引理 5, 易得该结论. $\square$

注 3 若 $\alpha = 0$ 且没有条件 (20), 则定理 1 退化为无限时间 H_∞ 控制器存在的充分条件, 即 (29) 能保证闭环系统 (5) 是均方渐近稳定的, 且满足

$$\mathrm{E}\int_0^\infty z'(s)z(s)\mathrm{d}s < \gamma^2\mathrm{E}\int_0^\infty v'(s)v(s)\mathrm{d}s.$$

注意到式 (20) 含有 $\lambda_{\min}(Q_1)$ 和 $\lambda_{\max}(Q_1)$, 不易处理, 因此由下式代替:

$$\lambda_1 I < Q_1 < I, \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} d^2\gamma^2 - c_2^2\mathrm{e}^{-\alpha T} & c_1 \\ c_1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} < 0. \tag{31}$$

注 4 注意到定理 1 不是线性矩阵不等式, 然而一旦固定 α, 便可化为线性矩阵不等式问题处理.

上述问题的具体求解算法如下:

算法 1

Step 1: 给定 R, T, c_1 和 d.

Step 2: 利用线性搜索算法, 如果能够发现一系列 $\alpha_i (i = 1, \cdots, n)$ 使式 (29) ∼ (31) 有可行解, 则转 Step 3; 否则, 转 Step 7.

Step 3: 令 $i = 1$, 取 α_i.

Step 4: 解下列优化问题:

$$\min_{\text{s.t.}(29)\sim(31)} c_2^2, \quad \min_{\text{s.t.}(29)\sim(31)} \gamma^2.$$

Step 5: 令 $i = i + 1$. 如果 $i + 1 > n$, 则转 Step 6; 否则, $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, 转 Step 4.

Step 6: 该问题有解, 打印数据, 停止.

Step 7: 该问题无解, 停止.

4 数值算例

考虑系统 (3), 其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} -2.2 & 1.4 \\ 1 & 1.7 \end{bmatrix},$$

$$B = [\,0.5 \ \ 0\,]', \ B_1 = [\,0 \ \ 0.4\,]',$$

$$G = [\,0.1 \ \ 0.2\,]', \ G_1 = [\,0.2 \ \ -0.1\,]',$$

$$x(0) = [\,-0.7 \ \ 0.6\,]', \ c_1 = 1, \ D_1 = 1,$$

$$D_2 = 0.1, \ T = 0.5, \ d = 1, \ R = I.$$

利用算法 1, 得到 c_2 与 α 以及 γ 与 α 的关系曲线如图 1, 图 2 所示. 图 3 给出了更清晰的 γ 随 α 的变化趋势.

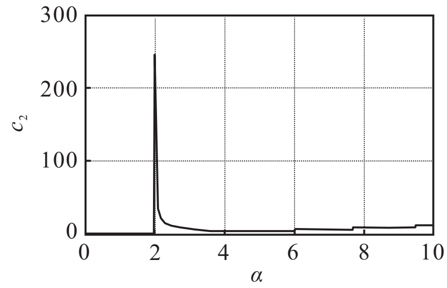

图 1 $\boldsymbol{\alpha \in [0, 10]}$ **时, $\boldsymbol{c_2}$ 的最小上界**

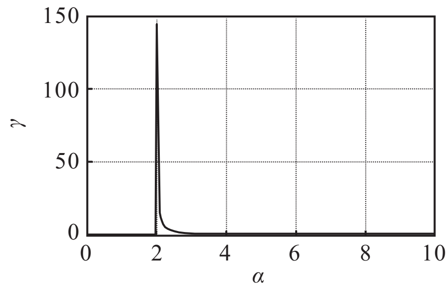

图 2 $\boldsymbol{\alpha \in [0, 10]}$ **时, $\boldsymbol{\gamma}$ 的最小上界**

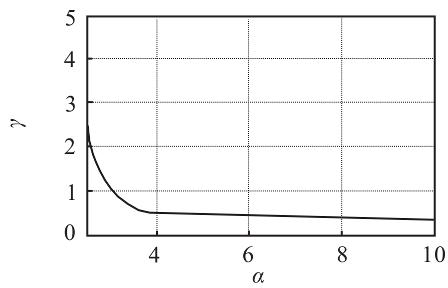

图 3 $\boldsymbol{\alpha \in [2.5, 10]}$ **时, $\boldsymbol{\gamma}$ 的最小上界**

从图 1 ∼ 图 3 可以看出, 当 $\alpha > 2$ 时, 问题才有解, 且当 $\alpha = 4.15$ 时, c_2 的最小上界为 4.585 2, 所对应的 $\gamma = 0.507\,5$. 从图 3 看到 γ 随着 α 的增大而减小. 图 1

$\sim$图3对如何选择适合条件的有限时间 H_∞ 控制器具有指导意义.

下面分析适合给定条件的有限时间 H_∞ 控制问题. 给定 $\gamma = 0.6, c_1 = 1, c_2 = 5, T = 0.5, d = 1$, 选择 $\alpha = 4.2$, 根据定理1, 得到

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.8797 & 0.2138 \\ 0.2138 & 0.5023 \end{bmatrix} > 0,\ L = \begin{bmatrix} -2.3283 \\ -1.1940 \end{bmatrix}',$$

$$K = [\,-2.3078 \ \ -1.3947\,],\ \lambda_1 = 0.3886.$$

这表明, 在控制器 $u(t) = -2.3078x_1(t) - 1.3947x_2(t)$ 的作用下, 只要系统的初值满足 $x'(0)Rx(0) \leqslant 1$, 则在时间 $T = 0.5\,\mathrm{s}$ 内, 闭环系统的轨迹必满足 $\mathrm{E}x'(t)Rx(t) < 25$, 并在 $\int_0^T v'(t)v(t)\mathrm{d}t < 1$ 的条件下, 满足 $\mathrm{E}\int_0^t z'(\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau < 0.36\,\mathrm{E}\int_0^t v'(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau$.

图4为在外界干扰 $v(t) = \sin t$ 情形下, 闭环系统的 $\mathrm{E}x'(t)Rx(t)$ 随时间变化的曲线. 可以看出, 闭环系统关于 $(1, 5, 0.5, I, 1)$ 是有限时间随机有界的.

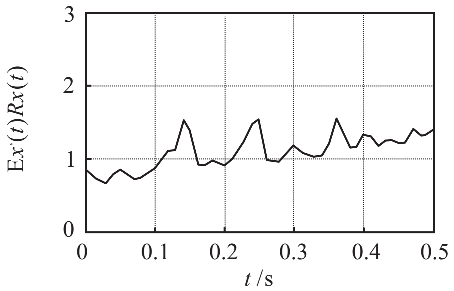

图4 $\mathrm{E}x'(t)Rx(t)$ 随时间变化的趋势

5 结 论

本文提出了线性随机系统有限时间 H_∞ 控制问题, 并指出了与有限水平 H_∞ 控制[13]的不同, 说明了有限时间 H_∞ 控制问题的意义. 利用矩阵变换方法, 给出了该问题解存在的充分条件, 该条件可以退化为具有线性矩阵不等式约束的优化问题, 并给出了优化数值求解算法. 一个数值算例表明了所提出方法的可行性.

如何将本文结果应用于其他线性或非线性随机系统模型, 有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Hinrichsen D, Pritchard A J. Stochastic H_∞[J]. SIAM J on Control and Optimization, 1998, 36(5): 1504-1538.

[2] Damm T. State-feedback H_∞-type control of linear systems with time-varying parameter uncertainty[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2002, (351/352): 185-210.

[3] Zhang W H, Chen B S. State feedback H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems[J]. SIAM J of Control and Optimization, 2006, 44(6): 1973-1991.

[4] Hasminskii R Z. Stochastic stability of differential aligns[M]. Alphen: Sijtjoff, Nordhoff, 1980.

[5] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of IRE Int Convention Record. New York, 1961, 4: 83-87.

[6] Weiss Infante L E. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12(1): 54-59.

[7] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite time control of linear system subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.

[8] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite time stabilization via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2006, 42(2): 337-342.

[9] Yan Z G, Zhang G S, Wang J K. Finite-time stability and stabilization of linear stochastic systems[C]. Proc of the 29th Chinese Control Conf. Beijing: IEEE Press, 2010: 1115-1120.

[10] Feng J E, Wu Z, Sun J B. Finite-time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(4): 634-637.

[11] Zhang W H, An X Y. Finite-time control of linear stochastic systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(3): 687-694.

[12] Liu L, Sun J T. Finite-time stabilization of linear systems via impulsive control[J]. Int J of Control, 2008, 81(6): 905-909.

[13] Subrahmanyam M B. Finite horizon H_∞ and related control problems[M]. Boston: Birkhäuser, 1995.

[14] Oksendal B. Stochastic differential aligns: An introduction with applications[M]. 5th ed. New York: Springer-Verlag, 2000.