

文章编号: 1001-0920(2011)07-1087-04

## 带扩展记忆的粒子群优化算法仿真分析

段其昌<sup>a</sup>, 黄大伟<sup>a</sup>, 雷蕾<sup>a</sup>, 段盼<sup>b</sup>

(重庆大学 a. 自动化学院, b. 电气工程学院, 重庆 400044)

**摘要:** 从心理学的角度提出带扩展记忆的粒子群优化算法(PSOEM), 以克服标准粒子群优化算法(PSO)在优化多维函数过程中粒子搜索方向性差、目的性弱的缺陷. 采用扩展记忆存储粒子的历史信息, 并引入参数表征扩展记忆的重要性. 利用经典离散控制理论分析其定值算法的稳定范围. 此算法与标准算法是同源异构的, 可以与已改进的PSO算法结合使用. 基准测试函数的仿真结果验证了所提出算法的有效性.

**关键词:** 粒子群优化; 扩展记忆; 稳定性分析

中图分类号: TP18

文献标识码: A

## Simulation analysis of particle swarm optimization algorithm with extended memory

DUAN Qi-chang<sup>a</sup>, HUANG Da-wei<sup>a</sup>, LEI Lei<sup>a</sup>, DUAN Pan<sup>b</sup>

(a. College of Automation, b. College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China.

Correspondent: DUAN Qi-chang, E-mail: qc\_d@sina.com)

**Abstract:** Standing on a psychological point of view, a particle swarm optimization algorithm with extended memory (PSOEM) is presented for the problem that particles often lost their way when applying the standard particle swarm optimization(PSO) algorithm to optimization multidimensional functions. The extended memory is introduced to store each particle's historical information and a parameter is employed to describe the importance of extended memory as well. Stability region of its deterministic version in a dynamic environment is analyzed by means of the classic discrete control theory. Because PSO with extended memory(PSOEM) and PSO are homologous but heterogeneous in structure, the specialty of PSOEM is that it can integrate with numerous existing improved PSO algorithms and combine respective advantages. Results of simulation on benchmark functions show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** particle swarm optimization; extended memory; stability analysis

### 1 引言

Eberhart 等人于1995年提出了粒子群优化算法(PSO)<sup>[1]</sup>, PSO是基于种群的随机优化计算方法. 种群中的个体称为“粒子”, 粒子是给定问题的可能解. 在PSO算法中, 粒子更新它们在高维搜索空间的速度和位置, 直到一个或者多个粒子收敛到最优区域. 最优区域通常表示为全局最优值的某个范围.

PSO的思想来源于对社会行为的模拟, 其关键在于每个粒子在解空间内根据自己的记忆(memory)和从其他粒子获取的有关社会信息“随机地”进行搜索. 本文提出的带扩展记忆的粒子优化算法(PSOEM), 通过扩展记忆来存储粒子近来的位置, 个体极值点与全局极值点. 与众多的PSO改进算法相比, 本文提出的

算法不仅实现简单、计算高效, 而且保持了PSO调节参数少的优势. 最大的特点是可与其他已改进的PSO算法相结合, 充分利用各自的优势.

对PSO的稳定性进行分析研究, 有助于理解其在算法实现过程中各个参数的作用. 本文建立了PSO和PSOEM状态空间表达式, 根据经典离散控制理论的单位圆标准确定其稳定范围. 此外, 进行了大量的仿真实验, 对PSO和PSOEM的性能进行了对比分析.

### 2 PSO和PSOEM算法

#### 2.1 PSO和PSOEM算法表示

标准的PSO算法公式中, 具有对上次个体极值点和全局极值点记忆的粒子定义为给定 $D$ 维适应度函数空间的一个可能解. 在迭代过程中, 每个粒子均

收稿日期: 2010-05-10; 修回日期: 2010-08-21.

作者简介: 段其昌(1953—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络优化、人工智能等研究; 雷蕾(1986—), 女, 硕士生, 从事人工智能的研究.

会调整其在每一维空间的速度, 计算出其新的位置. 因为每个粒子更新是相对独立的, 且维数只与适应度函数的解空间有关, 所以可用下面的公式表示每个粒子一维空间的运动情况<sup>[2]</sup>:

$$v_{t+1} = \omega v_t + \alpha_t^l(p_t^l - x_t) + \alpha_t^g(p_t^g - x_t), \quad (1)$$

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1}, \quad (2)$$

其中:  $\alpha_t^l = c_1 r_1$ ,  $\alpha_t^g = c_2 r_2$ ;  $r_1, r_2 \sim U(0, 1)$ ;  $\omega, \alpha_t^l, \alpha_t^g \in \mathbf{R}$ ;  $v_t$  表示粒子在第  $t$  次迭代时的速度;  $x_t$  表示粒子在第  $t$  次迭代时的位置;  $p_t^l$  表示粒子在  $t$  次迭代过程中目前的个体极值点;  $p_t^g$  表示种群在  $t$  次迭代过程中目前的全局极值点;  $\alpha_t^l \sim U(0, c_1)$ ,  $\alpha_t^g \sim U(0, c_2)$ ;  $\omega$  称为惯性权重;  $c_1, c_2$  称为加速度因子. 通常设置速度的上边界为  $v_{\max}$ , 下边界为  $v_{\min}$ , 以防止粒子远离搜索空间.

PSO 作为相对较新的进化计算模式, 在过去的十几年得到了不同领域研究人员和专家学者的广泛关注, 提出了各种改进 PSO 的策略. 本文提出的带扩展记忆的 PSO 算法 (PSOEM) 的最大特点是可以结合已经改进的各种 PSO 算法, 充分利用其各自优势. 从心理学的角度看, 扩展的记忆意味着粒子个体搜索经验的积累, 有利于算法更快收敛. PSOEM 可表示为

$$\begin{aligned} v_{t+1} = & \omega v_t + \alpha_t^l [\xi_t(p_t^l - x_t) + \xi_{t-1}(p_{t-1}^l - x_{t-1})] + \\ & \alpha_t^g [\xi_t(p_t^g - x_t) + \xi_{t-1}(p_{t-1}^g - x_{t-1})], \quad (3) \\ x_{t+1} = & x_t + v_{t+1}. \end{aligned}$$

其中:  $\xi_t, \xi_{t-1} \in \mathbf{R}^+$  且  $\sum_{i=0}^1 \xi_{t-i} = 1$ ;  $p_{t-1}^l$  表示粒子在  $t-1$  次迭代过程中的局部极值点;  $p_{t-1}^g$  表示粒子在  $t-1$  次迭代过程中的全局极值点;  $\xi_t$  称为当前有效因子,  $\xi_{t-1}$  称为扩展记忆有效因子. 特别地, 当  $\xi_{t-1} = 0$ , 即  $\xi_t = 1$  时, 有式 (3) = 式 (1). 此时, PSO 是 PSOEM 的一种特殊情况, 二者是同源异构的.

## 2.2 PSO 和 PSOEM 稳定范围

PSO 稳定性的研究是目前 PSO 研究的热点, 本文从离散控制理论角度仅给出定值 PSO 和 PSOEM 的稳定范围. 设

$$x_t = p_t^g - x_t, \quad (4)$$

则

$$p_t^l - x_t = (p_t^l - p_t^g) + \bar{x}_t. \quad (5)$$

由式 (1) 和 (4), 得

$$\begin{aligned} v_{t+1} = & \omega v_t + \alpha_t^l [(p_t^l - p_t^g) + \bar{x}_t] + \alpha_t^g \bar{x}_t = \\ & \omega v_t + \alpha_t \bar{x}_t + \alpha_t^l (p_t^l - p_t^g), \quad (6) \end{aligned}$$

其中  $\alpha_t = \alpha_t^l + \alpha_t^g$ . 由式 (4) 可推出

$$\bar{x}_{t+1} = p_{t+1}^g - x_{t+1}. \quad (7)$$

由式 (2) 和 (6), 得

$$\begin{aligned} \bar{x}_{t+1} = & (1 - \alpha_t) \bar{x}_t - \omega v_t - \alpha_t^l (p_t^l - p_t^g) + p_{t+1}^g - p_t^g. \quad (8) \end{aligned}$$

联立式 (7) 和 (8), PSO 每次迭代的向量-矩阵形式可以用  $\bar{x}_t$  和  $v_t$  表示如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} \bar{x}_t \\ v_t \end{bmatrix} + b_0. \quad (9)$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_t) & -\omega \\ \alpha_t & \omega \end{bmatrix}, \quad b_0 = [M_0 \quad N_0]^T,$$

$M_0 = -\alpha_t^l (p_t^l - p_t^g) + p_{t+1}^g - p_t^g$ ,  $N_0 = \alpha_t^l (p_t^l - p_t^g)$ . 式 (9) 即为 PSO 的状态空间方程,  $A_0$  是其系数矩阵.

为了便于分析, 令  $\xi_t = \xi_{t-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \xi_{t-i}$ .

设  $\bar{x}_t = \frac{1}{2} (p_t^g - x_t) + \frac{1}{2} (p_{t-1}^g - x_{t-1})$ , 同理可得 PSOEM 的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{t+1} \\ \bar{x}_t \\ v_{t+1} \\ v_t \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{x}_{t-1} \\ v_t \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + b_1.$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_t\right) & -\frac{1}{2}\alpha_{t-1} & -\frac{1}{2}\omega & -\frac{1}{2}\omega \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_t & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = [M_1 \quad 0 \quad N_1 \quad 0]^T, \quad N_1 = \frac{1}{2} \alpha_t^l \sum_{i=0}^1 (p_{t-i}^l - p_{t-i}^g),$$

$$M_1 = -\frac{1}{4} \sum_{i=0}^1 \alpha_{t-i}^l \sum_{j=i}^{i+1} (p_{t-j}^l - p_{t-j}^g) + \frac{1}{2} (p_{t+1}^g - p_{t-1}^g).$$

为了简化 PSO 和 PSOEM 的稳定性分析, 在此假设  $\alpha_t$  和  $\alpha_{t-1}$  为实常数且  $\alpha_t = \alpha_{t-1}$ . PSO 和 PSOEM 的稳定性范围可以分别由各自的系数矩阵  $A_0$  和  $A_1$  的特征值得到.

$A_0$  的特征方程为

$$\lambda^2 + (\alpha_t - \omega - 1)\lambda + \omega = 0.$$

当其特征根均在单位圆内时, 稳定范围是<sup>[3-5]</sup>

$$S_0 = \{(\omega, \alpha_t) : |\omega| < 1, 0 < \alpha_t < 2(\omega + 1)\}.$$

$A_1$  的特征方程为

$$\lambda^4 + \left(\frac{1}{2}\alpha_t - \omega - 1\right)\lambda^3 + \left(\frac{1}{2}\alpha_t + \omega\right)\lambda^2 = 0,$$

可化简为

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha_t - \omega - 1\right)\lambda + \frac{1}{2}\alpha_t + \omega = 0.$$

当其特征根均在单位圆内时, 稳定范围是

$$S_1 = \{(\omega, \alpha_t) : |\omega| < 1, 0 < \alpha_t < 2(1 - \omega)\}.$$

图 1 表示 PSO 和 PSOEM 的稳定范围, 浅灰色区域表示其实数根, 深灰色区域表示其复数根, 实数根和复数根的分界线为判别式等于 0 时的抛物线. 二者稳定区域的面积相等.

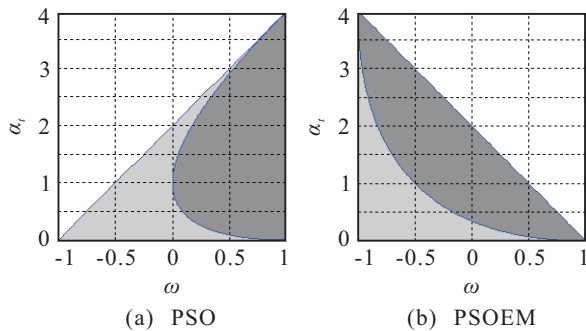


图 1 PSO 和 PSOEM 的稳定性范围

### 3 数值比较实验

#### 3.1 实验参数设置

为了验证本文算法的效果, 作者进行了大量的计算机数值实验. 实验仿真软件为 Matlab R2008a.

表 1 基准测试函数参数设置

函数名称	公式	最优值	阈值	非对称初始化范围	$[x_{min}, x_{max}]$	$v_{max}$
Sphere	$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$	0	0.01	$(50, 100)^n$	$[-100, 100]$	100
Rastrigin	$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$	0	100	$(2.56, 5.12)^n$	$[-5.12, 5.12]$	5.12
Griewank	$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	0	0.15	$(300, 600)^n$	$[-600, 600]$	600

表 2 PSOEM 参数设置

Algorithm	$(\xi_t, \xi_{t-1})$
PSOEM <sub>1</sub>	(0.1, 0.9)
PSOEM <sub>2</sub>	(0.2, 0.8)
PSOEM <sub>3</sub>	(0.3, 0.7)
PSOEM <sub>4</sub>	(0.4, 0.6)
PSOEM <sub>5</sub>	(0.5, 0.5)
PSOEM <sub>6</sub>	(0.6, 0.4)
PSOEM <sub>7</sub>	(0.7, 0.3)
PSOEM <sub>8</sub>	(0.8, 0.2)
PSOEM <sub>9</sub>	(0.9, 0.1)

#### 3.2 实验结果分析

如果算法没有收敛到给定的阈值, 则认为此次运行失败. 限于篇幅, 本文仅列出 Griewank 函数的部分测试结果. 表 3 中: Pop size 表示粒子数目, Dim 表示解空间维数, Gene 表示最大的迭代次数, M\_iteration 表示算法收敛到给定阈值或者最优值的平均迭代次数, Success ratio 表示成功率, E\_number 表示函数期望的评估迭代次数. E\_number 由下式计算:

$$E\_number = \frac{(\text{Pop size}) \times (M\_iteration)}{(\text{Success ratio})}, \quad (10)$$

涉及粒子数目、平均迭代次数和成功率 3 个方面.

本文将 E\_number 作为衡量算法性能优劣的主

在 PSO 和 PSOEM 性能比较实验过程中, 无法详尽无遗地根据每个相关参数的变化进行测试, 为了得到一般性的结论, 采取如下策略:

1) 众所周知, 粒子对于不同的基准测试函数表现出的行为差异很大, 本文采用线性递减的惯性权重 (LDW)<sup>[6]</sup> 方法对 3 个基准测试函数进行测试 (见表 1). 其中  $\omega$  从 0.9 到 0.4 线性递减,  $c_1 = 2, c_2 = 2$ , 与文献 [6] 相同.

2) 根据建议<sup>[7]</sup>, 种群采用非对称初始化. 另外, 对粒子位置  $x$  和速度  $v$  加以限制, 以防止粒子远离搜索空间. 初始化范围和粒子的速度和位置的范围见表 1.

3) 为了避免 PSOEM 在第 1 次迭代过程中无扩展的记忆情况发生, PSOEM 在第 1 次迭代过程中执行 PSO 算法. PSOEM 的 9 组参数设置见表 2.

4) 对于各基准测试函数, 测试 3 组, 维数分别为 10, 30, 50, 相应的最大迭代次数为 1 000, 2 000, 3 000, 且种群大小均设置为 100. 为减小随机差异性, 每组仿真运行 100 次.

要标准, 因为在实际应用中, 目标函数优化成本由其迭代的次数决定<sup>[3]</sup>. 图 2~图 7 中: Ave( $E\_number$ ) 表示 3 组  $E\_number$  的平均值,  $\log_{10}^{Std(E\_number)}$  表示以 10 为底的 3 组  $E\_number$  标准差的对数值.

通过测试结果, 可得出以下结论:

1) 从图 2, 图 4 和图 6 比较 Ave ( $E\_number$ ) 可知, PSOEM 除 PSOEM<sub>9</sub> 外, 函数期望的评估迭代次数均比 PSO 有显著减小. 说明 PSOEM 扩展的记忆使得搜索过程的方向性、目的性增强, 粒子的搜索能力提高. 太小的扩展记忆有效因子则削弱了这种能力, 使其性能接近于 PSO.

2) 从图 3, 图 5 和图 7 比较 Std ( $E\_number$ ) 可知, 除 PSOEM<sub>9</sub> 外, PSOEM 对维数的敏感度比 PSO 低很多, 说明 PSOEM 优化多维函数时优势明显.

3) 一般而言, 维数越大,  $E\_number$  越大. 图 4~图 7 所示多峰函数 Rastrigin 和 Griewank 在维数由 30 到 50 变化时, PSO 和 PSOEM<sub>9</sub> 出现了相反的结果, 二者较大的 Std( $E\_number$ ) 和较小的 Success ratio 说明这是由搜索过程不确定性增大导致的, 而扩展的记忆有利于减少不确定性.

表 3 Griewank 函数部分测试结果

Algorithm	Pop size	Dim	Gene	$(M\_iteration, Success\ ratio, E\_number)_1$			$(M\_iteration, Success\ ratio, E\_number)_2$			$(M\_iteration, Success\ ratio, E\_number)_3$		
				$M\_iteration$	Success ratio	$E\_number$	$M\_iteration$	Success ratio	$E\_number$	$M\_iteration$	Success ratio	$E\_number$
PSO	100	10	1000	(9.24, 99%, 933.58)	(11.41, 97%, 1176.53)	(9.35, 99%, 944.80)						
		30	2000	(26.93, 89%, 3026.13)	(32.22, 90%, 3580.25)	(33.92, 92%, 3687.38)						
		50	3000	(40.71, 87%, 4679.61)	(21.83, 80%, 2728.13)	(24.08, 88%, 2736.31)						
PSOEM <sub>1</sub>	100	10	1000	(5.81, 100%, 581.00)	(5.92, 99%, 597.90)	(5.84, 100%, 584.00)						
		30	2000	(5.97, 100%, 597.00)	(5.87, 99%, 592.80)	(5.94, 98%, 606.00)						
		50	3000	(5.86, 99%, 591.78)	(5.99, 97%, 617.49)	(5.93, 96%, 617.40)						
PSOEM <sub>3</sub>	100	10	1000	(5.16, 100%, 516.00)	(5.24, 100%, 524.00)	(5.28, 100%, 528.00)						
		30	2000	(5.38, 100%, 538.00)	(5.39, 100%, 539.00)	(5.38, 100%, 538.00)						
		50	3000	(5.38, 100%, 538.00)	(5.42, 100%, 542.00)	(5.45, 100%, 545.00)						
PSOEM <sub>5</sub>	100	10	1000	(5.06, 100%, 506.00)	(5.02, 100%, 502.00)	(5.06, 100%, 506.00)						
		30	2000	(5.09, 99%, 514.23)	(5.13, 100%, 513.00)	(5.16, 100%, 516.00)						
		50	3000	(5.11, 99%, 516.27)	(5.14, 100%, 514.00)	(5.10, 99%, 515.25)						
PSOEM <sub>7</sub>	100	10	1000	(4.81, 99%, 485.66)	(5.01, 100%, 501.00)	(5.14, 100%, 514.00)						
		30	2000	(5.65, 100%, 565.00)	(5.64, 99%, 569.33)	(5.01, 99%, 506.07)						
		50	3000	(5.35, 100%, 535.00)	(5.34, 99%, 539.74)	(5.38, 99%, 543.82)						
PSOEM <sub>9</sub>	100	10	1000	(6.23, 100%, 623.00)	(6.29, 100%, 629.00)	(6.83, 100%, 683.00)						
		30	2000	(9.88, 97%, 1018.17)	(10.22, 96%, 1064.45)	(9.94, 100%, 994.00)						
		50	3000	(11.42, 97%, 1177.60)	(38.41, 96%, 4000.65)	(37.84, 98%, 3860.89)						

注: 图2~图7中, 以EM<sub>1</sub>表示PSOEM<sub>1</sub>, EM<sub>2</sub>表示PSOEM<sub>2</sub>, 依次类推。

4) 从表3可以看出, 除PSOEM<sub>9</sub>外, PSOEM总体上比PSO的Std( $E\_number$ )小, Success ratio高. 说明

PSOEM比PSO的收敛速度更快, 精度更高, 从而改善了粒子的搜索能力。

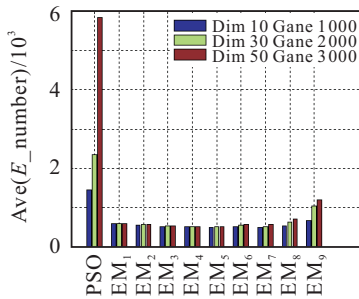


图 2 Sphere 期望评估迭代次数的平均值

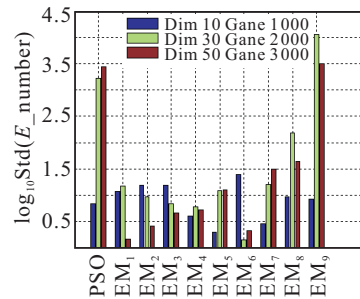


图 5 Rastrigin 期望评估迭代次数的标准差

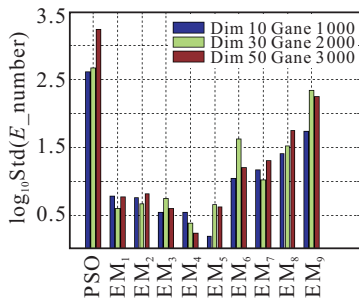


图 3 Sphere 期望评估迭代次数的标准差

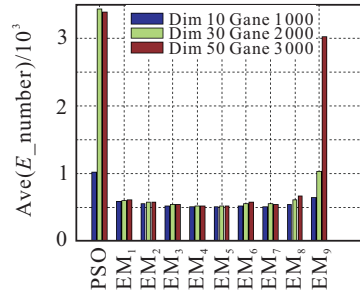


图 6 Griewank 期望评估迭代次数的平均值

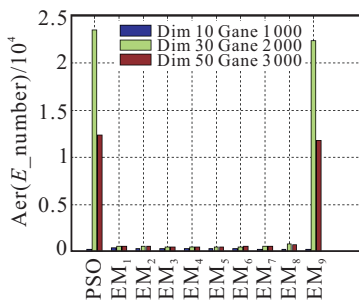


图 4 Rastrigin 期望评估迭代次数的平均值

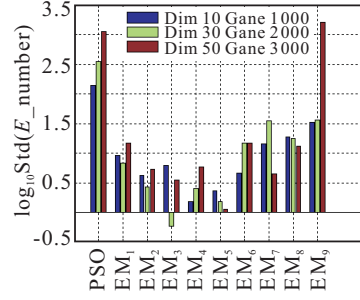


图 7 Griewank 期望评估迭代次数的标准差