文章编号: 1001-0920 (2011) 06-0945-04

# 一种基于 Lanchester 方程的交战取胜最优策略

陈向勇[a], 井元伟[a], 李春吉[b], 刘晓平[a]
(东北大学 a. 信息科学与工程学院, b. 理学院, 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对一类带有兵力增援作战系统交战双方取胜的最优决策问题, 在给出交战取胜性理论的基础上, 给出了作战决策方清空型取胜策略和非清空型取胜策略的定义. 依据 Lanchester 战斗方程, 得到了两种取胜策略存在的充分条件. 引入非线性优化技术, 求得相应的取胜最优策略. 它不仅保证了决策方的取胜性, 而且使得性能指标具有最大值. 通过仿真算例验证了所设计决策方案的可行性.

**关键词:** Lanchester 方程; 交战取胜性理论; 清空型策略; 非清空型策略; 兵力增援; 非线性优化
**中图分类号:** E072; TP273 **文献标识码:** A

## Optimal strategies for winning in military conflicts based on Lanchester equation

*CHEN Xiang-yong*[a], *JING Yuan-wei*[a], *LI Chun-ji*[b], *LIU Xiao-ping*[a]
(a. College of Information Science and Engineering, b. College of Science, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Correspondent: CHEN Xiang-yong, E-mail: cxy8305@163.com)

**Abstract:** For a class of optimal decision making problems of warfare systems with force resource complementary, the definitions of the empty type winning strategy and non-empty type winning strategy are proposed based on a defined winning theory of warfare systems. By means of Lanchester equation, the sufficient conditions for the existence of two strategies are presented. Nonlinear optimization technology is used to solve the corresponding optimal decision making problems for winner, and the optimal strategies is obtained, which ensures the victory of the decision maker in conflicts, and the maximum value of index performance is obtained. Numerical examples show the feasibility of the proposed optimal winning strategies.

**Key words:** Lanchester equation; winning theory; empty type winning strategy; non-empty type winning strategy; force resource complementary; nonlinear optimization

## 1 引 言

Lanchester 方程[1-2]又称 Lanchester 战斗理论或战斗动态理论, 是一种预测作战双方战斗结局的定量分析理论. 近年来, 基于 Lanchester 方程的作战指挥决策问题的研究取得了一系列的成果[3-9]. 文献 [3-4] 构建了若干类作战兵力资源的优化分配模型, 分别对作战时间和作战剩余兵力的优化问题进行了研究. [5] 针对总兵力不占优的取胜决策问题, 构建了一类非线性整数兵力优化分配模型. [6] 对一类带有不对称作战信息的作战效能评估进行了研究. [7] 建立了数理战术学, 主要利用 Lanchester 方程对作战火力分配最优策略设计和规范化交战模式的应用进行研究. [8] 研究了一类基于 Lanchester 方程的舰艇编队信息战火力分配微分对策问题, 研究结果为作战指挥决策提供了理论参考. [9] 针对一类对抗双方的兵力增援问题, 建立了相应的微分对策优化模型及其最优性条件. 值得指出的是, 上述文献的共同点是所设计的决策方案均具有较强的针对性. 因此, 如何设计合理有效的交战取胜策略成为作战指挥决策的研究热点.

基于文献 [5,7,10], 本文针对基于 Lanchester 方程的作战指挥决策问题, 提出了用于作战取胜决策分析的交战取胜性理论, 给出两类用于研究交战取胜决策问题的作战策略, 并将其应用于一类带有兵力增援的作战决策问题. 针对给出的性能指标, 利用非线性优化技术, 给出交战取胜最优策略求解的优化模型, 获得了相应的求解结果. 仿真算例表明了本文所给出作战方案的有效性.

**收稿日期:** 2010-05-09; **修回日期:** 2010-07-08.
**基金项目:** 国家自然科学基金项目(60774097); 中央高校基本科研业务费基金项目(N100604019).
**作者简介:** 陈向勇(1983−), 男, 博士, 从事作战指挥决策的研究; 井元伟(1956−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂性科学、复杂系统控制等研究.

## 2 交战取胜性理论

设定 $X_1$ 为攻击方, $X_2$ 为防御方, 考虑一类基于 Lanchester 方程的作战系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + u, \\ \dot{x}_2(t) = -\beta x_1(t) + v. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_1$ 和 $x_2$ 为在 $t$ 时刻作战双方的瞬时兵力数; $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 为作战双方中每一作战单位对于敌方的兵力损耗系数; $x_1(0) = x_{10}$ 和 $x_2(0) = x_{20}$ 为初始时刻的兵力数; $u$ 和 $v$ 分别为交战双方的控制输入量.

**注 1** $u$ 和 $v$ 是影响交战双方态势变化的控制量, 即影响交战双方兵力变化的控制量. 目前, 可以被考虑的控制量包括兵力增援、非战斗损耗等.

作战指挥决策关心的问题是作战决策方的取胜和性能. 对于交战双方, 其取胜性是指作战过程中取胜一方的剩余兵力保持在一个有限的允许范围内.

**定义 1** (交战取胜性) 考虑作战系统 (1), $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为双方在 $t$ 时刻的兵力, 如果存在整实数 $M_1$ 和 $M_2$, 使得下列条件在所考虑的时间区间 $[0, t]$ 内成立:

$$x_1(t) \geqslant M_1, \tag{2}$$

$$0 \leqslant x_2(t) \leqslant M_2, \tag{3}$$

$$\beta M_1^2 \geqslant \alpha M_2^2. \tag{4}$$

其中: $M_1$ 为攻击方 $X_1$ 在战斗过程中剩余兵力下界值, $M_2$ 为防御方 $X_2$ 在战斗过程中剩余兵力上界值. 则在给定的控制输入下, 称系统 (1) 对于攻击方 $X_1$ 具有交战取胜性.

**注 2** 由定义 1 可以看出, 交战双方的取胜性一般与系统的兵力损耗和控制量有关. 控制量是影响交战取胜性最为灵活和易于改变的因素, 其设计方式是作战系统交战取胜决策所研究的主要内容.

**注 3** 当 $M_1 = \sqrt{x_{10}^2 - (\alpha/\beta)x_{20}^2}$, $M_2 = 0$, $u = 0$, $v = 0$ 时, 定义 1 退化为经典的 Lanchester 方程取胜判据.

作战决策方是否能够实现交战取胜性, 主要取决于系统的结构和采用的作战策略, 或是作战策略需要满足的条件. 首先, 对于上述作战系统的取胜性, 从系统的控制量角度给出清空型取胜策略和非清空型取胜策略的定义.

**定义 2** (清空型取胜策略) 考虑作战系统 (1), 在给定的控制量和输入下, 如果在终止时刻 $T$ 双方剩余兵力满足

$$x_1(T) \geqslant M_1 > 0, \tag{5}$$

$$x_2(T) = 0, \tag{6}$$

则称控制策略 $u$ 对于攻击方 $X_1$ 为清空型取胜策略.

**定义 3** (非清空型取胜策略) 考虑作战系统 (1), 设定交战双方的兵力损耗界限为 $x_{1z} > 0$ 和 $x_{2z} > 0$, 在给定的控制输入下, 如果双方剩余兵力满足

$$x_1(T) > x_{1z}, \tag{7}$$

$$x_2(T) = x_{2z}, \tag{8}$$

则称控制策略 $u$ 对于攻击方 $X_1$ 为非清空型取胜策略.

**注 4** 非清空型策略主要用于研究交战双方能否完成各自预定的作战任务. 因此在战斗中, 交战双方预先设定一个明确的兵力损耗界限 $(x_{1z}, x_{2z})$, 当作战一方的损耗达到兵力界限时, 认定此作战方无法完成任务, 即作战失败.

## 3 基于 Lanchester 方程交战取胜策略求解

### 3.1 性能指标的选取

考虑一类输入量为兵力增援的作战决策问题, 设双方的兵力增援率为 $u > 0$ 和 $v > 0$, 其中 $u \in (u_{10}, u_{20})$, 且 $v = v_0$ 为固定常数. 设定作战决策方为攻击方 $X_1$, $x_1(T)$ 和 $x_2(T)$ 表示战斗终止时刻的双方剩余兵力. 考虑如下形式的性能指标:

$$J = x_1(T) - x_2(T) + \int_0^T (v(t) - u(t))\mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中

$$\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \leqslant X_{10}, \tag{10}$$

$X_{10}$ 表示攻击方可动用的增援兵力总量.

**注 5** 式 (10) 表示双方在作战过程中所增援的兵力数量不能超过各自可动用的增援兵力总量.

对于决策方 $X_1$ 实现交战取胜的最优决策问题即是寻找最优作战策略 $u$, 使得在战斗终止时刻 $T$ 的性能指标最大, 即决策方的剩余兵力尽可能大且兵力增援的数量尽可能少.

### 3.2 交战取胜最优策略

**定理 1** 考虑作战系统 (1), 若满足

$$x_{10} > \frac{v}{\beta},\ x_{20} > \frac{u}{\alpha}, \tag{11}$$

$$\gamma(\alpha\beta x_{10} + u\gamma) > \alpha(\alpha\beta x_{20} + v\gamma), \tag{12}$$

则攻击方 $X_1$ 具有交战取胜性, 即攻击方 $X_1$ 取胜, 控制策略 $u$ 为清空型取胜策略.

**证明** 首先依据作战系统 (1)可得到对应作战系统的解析解为

$$x_1(t) = \frac{v}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}D\mathrm{e}^{\gamma t} + F\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{13}$$

$$x_2(t) = \frac{u}{\alpha} - D\mathrm{e}^{\gamma t} + \frac{\gamma}{\alpha}F\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{14}$$

其中

$$D = \frac{1}{2}\Big[\frac{\gamma}{\alpha}\Big(x_{10} - \frac{v}{\beta}\Big) - \Big(x_{20} - \frac{u}{\alpha}\Big)\Big],$$

$$F=\frac{1}{2}\Big[\Big(x_{10}-\frac{v}{\beta}\Big)+\frac{\gamma}{\beta}\Big(x_{20}-\frac{u}{\alpha}\Big)\Big],$$
$$\gamma=\sqrt{\alpha\beta}.$$

假设满足

$$\gamma(\alpha\beta x_{10}+u\gamma)>\alpha(\alpha\beta x_{20}+v\gamma),$$

则由方程的解析解可知, $D>0$. 由 $x_{10}>v/\beta$ 和 $x_{20}>u/\alpha$ 可知, $F>0$. 因此, 对于任意 $t\geqslant 0$, 可得 $x_1(t)>0$. 对于 $x_2(t)$, 存在某一时刻 $T$, 使得 $x_2(T)=0$.

依据方程的解析解, 在时刻 $T$, 攻击方 $X_1$ 的剩余兵力为 $x_1(T)$. 设定 $M_1=x_1(T)$, $M_2=0$, 可得

$$x_1(T)\geqslant M_1,\ x_2(T)=0,$$
$$\beta M_1^2\geqslant\alpha M_2^2.$$

由定义 1 可知, 对于 $X_1$ 具有交战取胜性, 即攻击方 $X_1$ 取胜, 且满足条件 (11) 和 (12) 的控制量 $u$ 为 $X_1$ 的交战取胜策略. 否则, 假设下列不等式成立:

$$\gamma(\alpha\beta x_{10}+u\gamma)<\alpha(\alpha\beta x_{20}+v\gamma),$$

则 $x_{20}(t)>0$. 进而可知, 存在某一时刻 $T$ 使得 $x_{10}(T)=0$, 这与 $x_{10}(t)>0$ 相矛盾, 假设不成立. □

**定理 2**　考虑作战系统 (1), 设定交战双方的兵力损耗界限为 $x_{1z}>0$ 和 $x_{2z}>0$, 若满足

$$x_1(T)-\frac{x_{1z}}{x_{2z}}x_2(T)>0, \tag{15}$$
$$x_{10}>\frac{v}{\beta},\ x_{20}>\frac{u}{\alpha}, \tag{16}$$
$$\gamma(\alpha\beta x_{10}+u\gamma)>\alpha(\alpha\beta x_{20}+v\gamma), \tag{17}$$

其中 $x_2(T)=x_{2z}$, 则攻击方 $X_1$ 具有交战取胜性, 即攻击方 $X_1$ 取胜, $u$ 为非清空型取胜策略.

**证明**　类似定理 1 的证明, 可知定理 2 成立. □

由式 (9) 和 (10) 可知, 系统性能指标最大值的求取依赖于控制策略 $u$ 的选取, 所以, 如何选取一个适当的作战策略, 使得系统性能指标最大是十分关键的. 以下通过建立一类带有非线性约束的非线性优化模型, 求解相应的交战取胜最优策略.

**定理 3**　对于给定的作战系统 (1) 和性能指标 (9), 在满足定理 1 的前提下, 若非线性优化问题

$$\begin{aligned}&\max_u J;\\&\text{s.t. } x_2(T)=0,\ x_1(T)>0,\\&\quad x_{10}>\frac{v}{\beta},\ x_{20}>\frac{u}{\alpha},\\&\quad \gamma(\alpha\beta x_{10}+u\gamma)>\alpha(\alpha\beta x_{20}+v\gamma),\\&\quad \int_0^T u(t)\mathrm{d}t\leqslant X_{10}\end{aligned}$$

有解, 则 $u$ 是 $X_1$ 的清空型交战取胜最优策略.

**定理 4**　对于给定的作战系统 (1) 和性能指标 (9), 在满足定理 2 的前提下, 设定交战双方的兵力损耗界限为 $x_{1z}>0$ 和 $x_{2z}>0$, 若非线性优化问题

$$\begin{aligned}&\max_u J;\\&\text{s.t. } x_2(T)=x_{2z},\ x_1(T)>x_{1z},\\&\quad x_{10}>\frac{v}{\beta},\ x_{20}>\frac{u}{\alpha},\\&\quad \gamma(\alpha\beta x_{10}+u\gamma)>\alpha(\alpha\beta x_{20}+v\gamma),\\&\quad \int_0^T u(t)\mathrm{d}t\leqslant X_{10}\end{aligned}$$

有解, 则 $u$ 是 $X_1$ 的非清空型交战取胜最优策略.

**注 6**　上述优化问题是在取胜策略存在 (定理 1 和定理 2 成立) 的基础上, 按照给定的约束条件和性能指标来对可行取胜策略寻优. 由此, 优化问题是否有解的关键是交战取胜策略存在性条件是否被满足.

## 4　仿真例子

**算例 1**　针对给定的作战系统 (1) 和性能指标 (9), 考虑系统参数如下: $\alpha=0.9$, $\beta=0.4$, $x_{10}=500$, $x_{20}=500$, $v=40$, $X_{10}=1\,000$. 依据定理 1 和定理 3, 可得

$$\begin{aligned}&\max_u J;\\&\text{s.t. } x_1(T)>0,\ uT\leqslant 1\,000,\\&\quad 210\leqslant u\leqslant 450,\\&\quad \frac{u}{0.9}+D\mathrm{e}^{0.6T}+\frac{\gamma}{0.9}F\mathrm{e}^{-0.6T}=0.\end{aligned}$$

通过对上述优化问题求解可得, 最优策略 $u=380.869\,4$, 作战时间 $T=2.625\,6$, 最大性能指标 $J=77.782\,2$.

图 1 为交战双方的兵力变化轨线. 由图 1 可见, 攻击方的兵力存在最小值 $\min\{x_1(t)\}$. 设定 $M_1=\min\{x_1(t)\}$, $M_2=0$, 可得 $u$ 为清空型取胜最优策略.

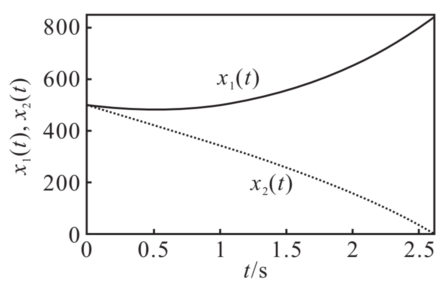


**图1　攻击方采取清空型作战策略时双方兵力变化轨线**

**算例 2**　针对给定的作战系统 (1) 和性能指标 (9), 设定 $x_{1z}=400$, $x_{2z}=280$. $\alpha,\beta,x_{10},x_{20},v,X_{10}$ 同算例 1. 根据定理 2 和定理 4, 可得

$$\begin{aligned}&\max_u J;\\&\text{s.t. } x_1(T)>400,\ uT\leqslant 1\,000,\\&\quad 210\leqslant u\leqslant 445,\\&\quad \frac{u}{0.9}+D\mathrm{e}^{0.6T}+\frac{\gamma}{0.9}F\mathrm{e}^{-0.6T}=280.\end{aligned}$$

通过计算可得, 最优作战策略为 $u=445$, 作战时间为 $T=1.2615$, 最大性能指标为 $J=170.2564$.

图 2 为交战双方兵力变化轨线. 从图 2 可以看出, 攻击方的兵力最小值为 $\min\{x_1(t)\}=500$, 因此, 在 $T$ 时刻, $u$ 为非清空型取胜最优策略.

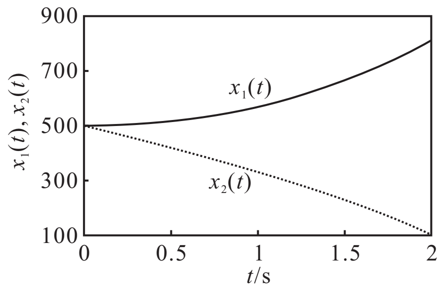


**图2 攻击方采取非清空型作战策略时双方兵力变化轨线**

表 1 给出了不同兵力损耗界限时, 计算获得的非清空型最优取胜策略和最大性能指标. 从表 1 可以看出, 当交战双方预先设定各自作战任务时, 决策方的最优策略就是以最大兵力增援率去支援作战.

**表 1 不同兵力损耗界限下非清空型结果**

| $x_{1z}$ | $x_{2z}$ | $u$ | $T$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|
| 450 | 400 | 445 | 0.6134 | 389.1124 |
| 400 | 350 | 445 | 0.8985 | 273.5306 |
| 350 | 300 | 445 | 0.1623 | 193.5297 |
| 400 | 280 | 445 | 1.2615 | 170.2564 |

## 5 结 论

本文研究了一类交战双方取胜最优决策问题, 所提出的交战取胜性理论和设计的两类取胜最优作战策略满足作战要求. 仿真结果表明了交战取胜性理论的可行性和所设计交战取胜策略的有效性. 下一步的工作是将取胜性理论推广到作战指挥对策问题的研究中[11].

## 参考文献(References)

[1] Taylor J G. Lanchester models of warfare[M]. Arlington: Operations Research Society of America, 1983.

[2] Taylor J G. Lanchester-tvpe models of warfare and optimal control[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1974, 21(1): 79-106.

[3] Ghose D, Krichman M, Speyer J L, et al. Modeling and analysis of air campaign resource allocation: A spatio-temporal decomposition approach[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 2002, 32(3): 403-418.

[4] Sheeba P S, Ghose D. Optimal resource allocation and redistribution strategy in military conflicts with Lanchester square law attrition[J]. Naval Research Logistics, 2008, 55(7): 581-591.

[5] 陈向勇, 井元伟, 李春吉, 等. 基于Lanchester方程的一类海战实例的决策分析[J]. 东北大学学报, 2009, 30(4): 535-538.
(Chen X Y, Jing Y W, Li C J, et al. Analysis of optimum strategy using Lanchester equation for naval battles like Trafalgar[J]. J of Northeastern University, 2009, 30(4): 535-538.)

[6] Chen X Y, Jing Y W, Li C J, et al. Effectiveness evaluation of warfare command systems with dissymmetrical warfare information[C]. Proc of the 2010 American Control Conf. Baltimore, 2010: 5556-5560.

[7] 沙基昌. 数理战术学[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 14-36.
(Sha J C. Mathematic tactics[M]. Beijing: Science Press, 2003: 14-36.)

[8] 李登峰, 孙涛, 王永春. 舰艇编队信息战火力分配微分对策模型及求解[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1163-1166.
(Li D F, Sun T, Wang Y C. Differential game model and its solution for the firepower-assignment in vessel formations in information war[J]. Control Theory and Applications, 2008, 25(6): 1163-1166.)

[9] 李登峰, 陈庆华. 兵力增援微分对策模型和求解[J]. 火力指挥与控制, 2004, 29(1): 41-43.
(Li D F, Chen Q H. Troops support differential game optimization model and solution[J]. Fire Control and Command Control, 2004, 29(1): 41-43.)

[10] 李登峰, 许腾. 海军作战运筹分析及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 147-166.
(Li D F, Xu T. Naval opterational research analysis and application[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2007: 147-166.)

[11] 方绍琨, 李登峰. 微分对策及其在军事领域的研究进展[J]. 指挥控制与仿真, 2008, 30(1): 114-117.
(Fang S K, Li D F. Research advances on differential games and applications to military field[J]. Command Control and Simulation, 2008, 30(1): 114-117.)