文章编号: 1001-0920 (2011) 09-1321-06

多时滞奇异系统鲁棒稳定性分析

刘丽丽[1,2], 彭济根[1], 吴保卫[2]

(1. 西安交通大学 理学院，西安 710049；2. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062)

摘 要: 讨论了多时滞奇异系统的鲁棒稳定性问题. 通过构造一种新的Lyapunov-Krasovskii泛函(LKF), 结合离散化LKF理论，给出了多时滞奇异系统正则、脉冲自由和渐近稳定的充分条件, 并将该结论推广到含有范数有界不确定性的多时滞奇异系统. 数值算例验证了该方法的有效性和可行性.

关键词: 时滞奇异系统；鲁棒稳定；完全二次Lyapunov-Krasovskii泛函；线性矩阵不等式

中图分类号: O231 **文献标识码:** A

Robust stability of singular systems with multiple delays

LIU Li-li[1,2], *PENG Ji-gen*[1], *WU Bao-wei*[2]

(1. Faculty of Science，Xi'an Jiaotong University，Xi'an 710049，China；2. College of Mathematics and Information Science，Shaanxi Normal University，Xi'an 710062，China. Correspondent：LIU Li-li，E-mail：liulily@snnu.edu.cn)

Abstract: Robust stability problem of singular systems with multiple delays is discussed. A new Lyapunov-Krasovskii functional(LKF) is introduced, which combines the discretization method of LKF to give the condition such that the singular system with multiple delays is regular, impulse free and stable. Furthermore, the result is extended to uncertain singular system with multiple delays, where the parameter uncertainty is assumed to be norm bounded. Numerical examples illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words: singular time-delay systems；robust stability；complete quadratic Lyapunov-Krasovskii functional；linear matrix inequality

1 引 言

由于奇异系统可以更好地描述物理系统, 近年来, 奇异系统的控制问题得到了广泛的研究[1-10]. 奇异系统模型中不仅包含动态方程, 而且包含静态方程, 其中有3种模态: 动态模, 脉冲模和非动态模. 后两者在状态空间系统中都不存在, 它们也使得奇异系统较正则系统的研究更为困难[1-2].

时滞现象广泛存在于各类系统中, 比如核反应, 工程化学系统, 生物系统, 人口动态模型等[11-12]. 因此, 时滞奇异系统的控制问题备受关注. 一般情况下, 时滞常被看作系统不稳定或系统性能恶化的主因, 因此在已有的时滞系统稳定性研究结论中, 利用简单LKF方法得到的诸多的稳定性条件中, 时滞为零时的标称系统稳定往往是时滞奇异系统稳定的必要条件[3-10]. 时滞奇异系统的稳定性判据分为时滞无关的和时滞相关的两类. 文献[3]中给出了时滞奇异系统稳定的时滞无关的充分条件及状态反馈控制器. [4,6]中采用模型变换得到了时滞相关的稳定性判据, 结论依模型变换的方式和交叉项的放大方法不同而保守性各有差异. [5,7]中利用自由权矩阵方法, 改进了已有结论, 遗憾的是数值实例表明, 结论与真值仍存在较大差距. [13]中引入完全二次LKF方法研究状态空间时滞系统的稳定性, 某些数值实例表明, 该稳定性方法极为有效, 所得时滞容许区间接近于用频域方法得到的解析解. 更重要的是, 完全二次LKF方法可用于判别区间时滞系统的稳定性, 其中时滞为零时的标称系统稳定不再是时滞系统稳定的必要条件.

本文将完全二次LKF方法推广到多时滞奇异系统, 结合奇异型完全二次LKF及简单LKF, 利用离散化LKF理论, 讨论了多时滞奇异系统的稳定性问题及带有范数有界不确定性的多时滞奇异系统的鲁棒稳

收稿日期: 2010-05-11；**修回日期:** 2010-11-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902062)；陕西省自然科学基础研究计划项目(SJ08A20)；陕西师范大学青年科技项目(200801009).

作者简介: 刘丽丽(1980−), 女, 讲师, 博士生, 从事奇异系统理论的研究；彭济根(1967−), 男, 教授, 博士生导师, 从事Lie群约束的优化理论及其应用的研究.

定性问题.

2 问题提出

考虑不确定时滞奇异系统

$$(\Sigma):\begin{cases}E\dot{x}(t)=(A_0+\Delta A_0)x(t)+\\ \qquad\sum_{i=1}^{p}(A_i+\Delta A_i)x(t-r_i),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-r,0].\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统状态, 矩阵 $E\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足 $\mathrm{rank}\,E=q\leqslant n, A_0$ 和 A_1 为已知适当维数常数矩阵, $0<r_p<r_{p-1}<\cdots<r_1=r$ 为常时滞, $\phi(t)$ 为相容的初值函数. ΔA_0 和 ΔA_i 为时变范数有界参数不确定性, 假设有下列形式:

$$[\ \Delta A_0\ \ \Delta A_i\ ]=MF(t)[\ N_0\ \ N_i\ ].\tag{2}$$

其中: $M,N_0,N_i\,(i=1,2,\cdots,p)$ 为已知实常数矩阵; 不确定矩阵 $F(t)$ 满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$. 记 (Σ) 的标称系统为

$$(\Sigma_0):\begin{cases}E\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{i=1}^{p}A_ix(t-r_i),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-r,0].\end{cases}\tag{3}$$

定义 1[1] 1) 若存在 $s\in\boldsymbol{C}$ 使得 $\det(sE-A_0)\neq 0$ 成立, 则称矩阵对 (E,A_0) 正则.

2) 若 $\deg(\det(sE-A_0))=\mathrm{rank}\,E$, 则称矩阵对 (E,A_0) 脉冲自由.

时滞奇异系统可能会含有脉冲解, 然而, 若矩阵对 (E,A_0) 正则, 脉冲自由, 则系统 (Σ_0) 的解存在, 唯一且无脉冲模.

引理 1[3] 若矩阵对 (E,A_0) 正则, 脉冲自由, 则系统 (Σ_0) 的解存在, 唯一且无脉冲模.

定义 2 1) 若矩阵对 (E,A_0) 正则, 脉冲自由, 则称时滞奇异系统 (Σ_0) 正则, 脉冲自由.

2) 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使对任意满足 $\sup\limits_{-r<t<0}\|\phi(t)\|\leqslant\delta(\varepsilon)$ 的相容初始条件, 系统 (Σ_0) 的解满足 $\|x(t)\|\leqslant\varepsilon\,(t\geqslant 0)$, 则称时滞奇异系统 (Σ_0) 稳定; 若系统稳定且 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, 则称时滞奇异系统 (Σ_0) 渐近稳定.

定义 3 若系统 (Σ_0) 对所有可容许的不确定性 $\Delta A_0,\Delta A_i$ 都正则, 脉冲自由且渐近稳定, 则称不确定时滞奇异系统 (Σ) 鲁棒稳定.

不失一般性, 设

$$E=\begin{bmatrix}I_q&0\\0&0\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}A_{01}&A_{02}\\A_{03}&A_{04}\end{bmatrix},\ A_i=\begin{bmatrix}A_{i1}&A_{i2}\\A_{i3}&A_{i4}\end{bmatrix},$$

$x(t)=\mathrm{col}\{x_1(t),x_2(t)\}$, $x_1(t)\in\boldsymbol{R}^q$ 为系统的慢状态变量, $x_2(t)\in\boldsymbol{R}^{n-q}$ 为系统的快状态变量. 定义差分算子 $(\mathcal{D}:\mathcal{C}_{n-q,r}\to\boldsymbol{R}^{n-q})$

$$D(x_{2t})=x_2(t)+\sum_{i=1}^{p}A_{04}^{-1}A_{i4}x_2(t-r_i).$$

引理 2[4] 若算子 $D(x_{2t})$ 稳定, 存在正数 α,β,γ, 连续泛函 $V(x_t):\mathcal{C}_{n,r}\to\boldsymbol{R}$, 使

$$\beta\|x_1(t)\|^2\leqslant V(x_t)\leqslant\gamma\|x_t\|^2,$$

$$\dot{V}(x_t)\leqslant-\alpha\|x_t\|^2,$$

$V(x_t)$ 绝对连续, 则系统 (Σ_0) 渐近稳定.

引理 3[14] 给定适当维数的矩阵 Y,F 和 E, 其中 Y 是对称的, 则

$$Y+E\Delta(t)F+F^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}<0$$

对所有满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I$ 的 $\Delta(t)$ 成立, 当且仅当存在一个常数 $\eta>0$, 使得

$$Y+\eta EE^{\mathrm{T}}+\eta^{-1}F^{\mathrm{T}}F<0.$$

引理 4[15] 对给定的对称矩阵 $S=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{12}^{\mathrm{T}}&S_{22}\end{bmatrix}$, 以下 3 个条件是等价的 (其中 S_{11} 是 $r\times r$ 维的):

1) $S<0$;

2) $S_{11}<0, S_{22}-S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12}<0$;

3) $S_{22}<0, S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}}<0$.

3 主要结论

下面首先给出标称时滞奇异系统 (Σ_0) 正则, 脉冲自由和渐近稳定的条件.

定理 1 若存在矩阵 $P_1=P_1^{\mathrm{T}},P_2,P_3=P_3^{\mathrm{T}},Q_i$, $S_i=S_i^{\mathrm{T}},R_{ij}=R_{ji}^{\mathrm{T}},i,j=0,1,\cdots,N$ 及 $R^{(k)},S^{(k)},k=2,3,\cdots,p$, 使得

$$\begin{bmatrix}P_1&\hat{Q}\\ *&\hat{R}+\hat{S}\end{bmatrix}>0,$$

$$\varPhi=\begin{bmatrix}\Delta&D^s&D^a&\tilde{D}\\ *&-R_d-S_d&0&0\\ *&*&-3S_d&0\\ *&*&*&\tilde{R}\end{bmatrix}<0$$

成立, 则时滞奇异系统 (Σ_0) 正则, 脉冲自由且渐近稳定. 其中

$$P=\begin{bmatrix}P_1&P_2\\0&P_3\end{bmatrix},\ \hat{Q}=[\ Q_0\ \ Q_1\ \ \cdots\ \ Q_N\ ],$$

$$\hat{S}=\mathrm{diag}\left(\ \frac{1}{h}S_0\ \ \frac{1}{h}S_1\ \ \cdots\ \ \frac{1}{h}S_N\ \right),$$

$$\hat{R}=\begin{bmatrix}R_{00}&R_{01}&\cdots&R_{0N}\\R_{10}&R_{11}&\cdots&R_{1N}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\R_{N0}&R_{N1}&\cdots&R_{NN}\end{bmatrix},\ \bar{Q}_j=\begin{bmatrix}Q_j\\0\end{bmatrix},$$

$$S_d=\mathrm{diag}(\ S_{d1}\ \ S_{d2}\ \ \cdots\ \ S_{dN}\ ),\ S_{di}=S_{i-1}-S_i,$$

$$\varDelta=\begin{bmatrix}\varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \cdots & \varDelta_{1,p+1}\\ * & \varDelta_{22} & \cdots & \varDelta_{2,p+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & * & * & \varDelta_{p+1,p+1}\end{bmatrix},$$

$$\varDelta_{11}=PA_0+A_0^{\rm T}P^{\rm T}+\bar{Q}_0+\bar{Q}_0^{\rm T}+S_0+\sum_{i=2}^{p}\Big(S^{(i)}-\frac{1}{r_i}E^{\rm T}R^{(i)}E\Big)$$

$$\varDelta_{12}=PA_1-\bar{Q}_N,\ \Delta_{22}=-S_N,$$

$$\Delta_{1,i+1}=PA_i+\frac{1}{r_i}E^{\rm T}R^{(i)}E,$$

$$\Delta_{i+1,i+1}=-S^{(i)}-\frac{1}{r_i}E^{\rm T}R^{(i)}E,$$

$$R_d=\begin{bmatrix}R_{d11} & R_{d12} & \cdots & R_{d1N}\\ R_{d21} & R_{d22} & \cdots & R_{d2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{dN1} & R_{dN2} & \cdots & R_{dNN}\end{bmatrix},$$

$$R_{dij}=h(R_{i-1,j-1}-R_{ij}),$$

$$D^s=[\ D_1^s\ \ D_2^s\ \ \cdots\ \ D_N^s\ ],$$

$$D_j^s=[\ D_{0j}^{s\rm T}\ \ D_{1j}^{s\rm T}\ \ \cdots\ \ D_{p+1,j}^{s\rm T}\ ]^{\rm T},$$

$$D_{0j}^s=\frac{h}{2}A_0^{\rm T}(\bar{Q}_{j-1}+\bar{Q}_j)+\frac{h}{2}(R_{0,j-1}+R_{0j})-(\bar{Q}_{j-1}-\bar{Q}_j),$$

$$D_{1j}^s=\frac{h}{2}A_1^{\rm T}(\bar{Q}_{j-1}+\bar{Q}_j)-\frac{h}{2}(R_{N,j-1}+R_{Nj}),$$

$$D_{ij}^s=\frac{h}{2}A_i^{\rm T}(\bar{Q}_{j-1}+\bar{Q}_j),\ D^a=[D_1^a\ D_2^a\ \cdots\ D_N^a],$$

$$D_j^a=[\ D_{0j}^{a\rm T}\ \ D_{1j}^{a\rm T}\ \ \cdots\ \ D_{p+1,j}^{a\rm T}\ ]^{\rm T},$$

$$D_{0j}^a=-\frac{h}{2}A_0^{\rm T}(\bar{Q}_{j-1}-\bar{Q}_j)-\frac{h}{2}(R_{0,j-1}-R_{0j}),$$

$$D_{1j}^a=-\frac{h}{2}A_1^{\rm T}(\bar{Q}_{j-1}-\bar{Q}_j)+\frac{h}{2}(R_{N,j-1}-R_{Nj}),$$

$$D_{ij}^a=-\frac{h}{2}A_i^{\rm T}(\bar{Q}_{j-1}-\bar{Q}_j),$$

$$i=2,3,\cdots,p,j=1,2,\cdots,N,$$

$$\tilde{D}=\begin{bmatrix}r_2A_0^{\rm T}R^{(2)} & r_3A_0^{\rm T}R^{(3)} & \cdots & r_pA_0^{\rm T}R^{(p)}\\ r_2A_1^{\rm T}R^{(2)} & r_3A_1^{\rm T}R^{(3)} & \cdots & r_pA_1^{\rm T}R^{(p)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_2A_p^{\rm T}R^{(2)} & r_3A_p^{\rm T}R^{(3)} & \cdots & r_pA_p^{\rm T}R^{(p)}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{R}={\rm diag}(\ -r_2R^{(2)}\ \ -r_3R^{(3)}\ \ \cdots\ \ -r_pR^{(p)}\ ).$$

证明 设 $\bar{Q}_0$ 和 S_0 具有与 A_i 相容的分块

$$\bar{Q}_0=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{01} & \bar{Q}_{02}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ S_0=\begin{bmatrix}S_{01} & S_{02}\\ * & S_{03}\end{bmatrix}.$$

将上述分块形式代入 $\varDelta<0$ 中, 可得

$$\begin{bmatrix}P_3A_{04}+A_{04}^{\rm T}P_3+S_{03} & P_3A_{14}\\ * & -S_{03}\end{bmatrix}<0,$$

类同于文献 [3,10] 中的证明, 可得系统 (Σ_0) 正则, 脉冲自由, 且 $\rho\Big(\sum\limits_{i=2}^{q}A_{04}^{-1}A_{i4}\Big)<1$. 下面证明系统的稳定性.

构造二次型 (LKF)

$$V(t,x_t)=x_1^{\rm T}(t)P_1x_1(t)+2x_1^{\rm T}(t)\int_{-r_1}^{0}Q(\xi)\phi(\xi){\rm d}\xi+\int_{-r_1}^{0}\int_{-r_1}^{0}\phi^{\rm T}(\xi)R(\xi,\eta)\phi(\eta){\rm d}\xi{\rm d}\eta+\int_{-r_1}^{0}\phi^{\rm T}(\xi)S(\xi)\phi(\xi){\rm d}\xi+\sum_{i=2}^{p}\int_{-r_i}^{0}\phi^{\rm T}(\xi)S^{(i)}\phi(\xi){\rm d}\xi+\sum_{i=2}^{p}\int_{-r_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\rm T}(s)E^{\rm T}R^{(i)}E\dot{x}(s){\rm d}s{\rm d}\theta.$$

其中: $x(t+\theta)=\phi(\theta)$, $-r\leqslant\theta\leqslant 0, Q(\xi)$, $S(\xi)=S^{\rm T}(\xi)$, $R(\xi,\eta)=R^{\rm T}(\eta,\xi)$ 连续, 沿着系统轨迹, $V(t,x_t)$ 的导数为

$$\dot{V}(t,x_t)=2\phi^{\rm T}(0)PE\dot{\phi}(0)+2\dot{\phi}^{\rm T}(0)E^{\rm T}\int_{-r_1}^{0}\bar{Q}(\xi)\phi(\xi){\rm d}\xi+2\phi^{\rm T}(0)\int_{-r_1}^{0}\bar{Q}(\xi)\dot{\phi}(\xi){\rm d}\xi+2\int_{-r_1}^{0}\phi^{\rm T}(\xi)S(\xi)\dot{\phi}(\xi){\rm d}\xi+2\int_{-r_1}^{0}\int_{-r_1}^{0}\phi^{\rm T}(\xi)R(\xi,\eta)\dot{\phi}(\eta){\rm d}\xi{\rm d}\eta+\sum_{i=2}^{p}\phi^{\rm T}(0)S^{(i)}\phi(0)-\sum_{i=2}^{p}\phi^{\rm T}(-r_i)S^{(i)}\phi(-r_i)+\sum_{i=2}^{p}r_i\dot{x}^{\rm T}(t)E^{\rm T}R^{(i)}E\dot{x}(t)-\sum_{i=2}^{p}\int_{t-r_i}^{t}\dot{x}^{\rm T}(s)E^{\rm T}R^{(i)}E\dot{x}(s){\rm d}s.$$

利用分部积分和 Jensen 不等式, 结合系统方程, 可得

$$\dot{V}(t,x_t)\leqslant\phi^{\rm T}(0)[PA_0+A_0^{\rm T}P^{\rm T}+\bar{Q}(0)+\bar{Q}^{\rm T}(0)]\phi(0)+\phi^{\rm T}(0)\Big[S(0)-\sum_{i=2}^{p}\frac{1}{r_i}E^{\rm T}R^{(i)}E\Big]\phi(0)+2\phi^{\rm T}(0)[PA_1-\bar{Q}(-r)]\phi(-r_1)+2\phi^{\rm T}(0)\sum_{i=2}^{p}\Big[PA_i+\frac{1}{r_i}E^{\rm T}R^{(i)}E\Big]\phi(-r_i)-\phi^{\rm T}(-r_1)S(-r_1)\phi(-r_1)-\sum_{i=2}^{p}\phi^{\rm T}(-r_i)\Big[S(-r_i)-\frac{1}{r_i}E^{\rm T}R^{(i)}E\Big]\phi(-r_i)+2\phi^{\rm T}(0)\int_{-r_1}^{0}[A_0^{\rm T}\bar{Q}(\xi)-\dot{\bar{Q}}(\xi)+R(0,\xi)]\phi(\xi){\rm d}\xi+2\phi^{\rm T}(-r_1)\int_{-r_1}^{0}[A_1^{\rm T}\bar{Q}(\xi)-R(-r_1,\xi)]\phi(\xi){\rm d}\xi+\sum_{i=2}^{p}\phi^{\rm T}(-r_i)\int_{-r_1}^{0}A_i^{\rm T}\bar{Q}(\xi)\phi(\xi){\rm d}\xi-$$

$$\int_{-r_1}^{0}\int_{-r_1}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\xi)\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi,\eta)\Big)\phi(\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta-$$
$$\int_{-r_1}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\xi)\dot{S}(\xi)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{i=2}^{p}r_i\dot{\phi}^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}R^{(i)}E\dot{\phi}(0).$$

采用文献[13]中的离散化方法: 在时滞区间 $[-r, 0]$ 内插入 $N-1$ 个分点, 将其等分为 N 个小区间 $[\theta_i, \theta_{i-1}], i=1,2,\cdots,N$, 每段长度为 $h=r/N$, 其中 $\theta_i=-ih$; 同时将方形区域 $[-r,0]\times[-r,0]$ 分割为 $N\times N$ 个小方块 $[\theta_i,\theta_{i-1}]\times[\theta_j,\theta_{j-1}]$, 每个小块进一步分为两个小三角形. 选取 $Q(\xi), S(\xi)$ 在每个小区间上线性, $R(\xi,\theta)$ 在每个小三角形上线性, 则由线性插值公式, $Q(\xi), S(\xi)$ 和 $R(\xi,\theta)$ 可由它们在分点的值表达为

$$Q(\theta_i+\alpha h)=(1-\alpha)Q_i+\alpha Q_{i-1};$$
$$S(\theta_i+\alpha h)=(1-\alpha)S_i+\alpha S_{i-1};$$
$$R(\theta_i+\alpha h,\theta_j+\beta h)=$$
$$\begin{cases}(1-\alpha)R_{i,j}+\beta R_{i-1,j-1}+(\alpha-\beta)R_{i-1,j},\ \alpha\geqslant\beta;\\(1-\beta)R_{i,j}+\alpha R_{i-1,j-1}+(\beta-\alpha)R_{i,j-1},\ \alpha<\beta.\end{cases}$$

其中: $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $i,j=1,2,\cdots,N$. 因此, LKF可完全由 P_1,P_2,P_3, $Q_i,S_i,R_{i,j},i,j=1,2,\cdots,N$ 确定. 此时

$$V(t,x_t)=$$
$$x_1^{\mathrm{T}}(t)P_1x_1(t)+2x_1^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{N}\int_0^1Q^{(i)}(\alpha)\phi^{(i)}(\alpha)h\mathrm{d}\alpha+$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\Big[\int_0^1\phi^{(i)\mathrm{T}}R^{(ij)}(\alpha,\beta)\phi^{(j)}h\mathrm{d}\alpha\Big]h\mathrm{d}\beta+$$
$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\phi^{(i)\mathrm{T}}(\alpha)S(\theta_i+\alpha h)\phi^{(i)}(\alpha)h\mathrm{d}\alpha+$$
$$\sum_{i=2}^{p}\int_{-r_i}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\xi)S^{(i)}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi+$$
$$\sum_{i=2}^{p}\int_{-r_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}R^{(i)}E\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.$$

其中

$$\phi^{(i)}(\alpha)=x(t+\theta_i+\alpha h),$$
$$Q^{(i)}(\alpha)=Q(\theta_i+\alpha h),$$
$$R^{(ij)}(\alpha,\beta)=R(\theta_i+\alpha h,\theta_j+\beta h).$$

利用分部积分和Jensen不等式可得, 当 $S_i>0$, $\begin{bmatrix}P & \hat{Q}\\ * & \hat{R}+\hat{S}\end{bmatrix}>0$ 时, $V(t,x_t)\geqslant\mu\|x_1(t)\|^2$, 其中 $\mu=\lambda_{\min}(P_1)$.

注意到 $Q(\xi), S(\xi), R(\xi,\eta)$ 的导数分别为

$$\dot{Q}(\xi)=\frac{1}{h}(Q_{i-1}-Q_i),\ \dot{S}(\xi)=\frac{1}{h}(S_{i-1}-S_i),$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi,\eta)=\frac{1}{h}(R_{i-1,j-1}-R_{i,j}),$$

则 $\dot{V}(t,x_t)$ 可改写为

$$\dot{V}(t,x_t)=$$
$$\phi^{\mathrm{T}}(0)[PA_0+A_0^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}+\bar{Q}_0+\bar{Q}_0^{\mathrm{T}}]\phi(0)+$$
$$\phi^{\mathrm{T}}(0)\Big[S_0-\sum_{i=2}^{p}\frac{1}{r_i}E^{\mathrm{T}}R^{(i)}E\Big]\phi(0)+$$
$$2\phi^{\mathrm{T}}(0)[PA_1-\bar{Q}_N]\phi(-r_1)+$$
$$2\phi^{\mathrm{T}}(0)\sum_{i=2}^{p}\Big[PA_i+\frac{1}{r_i}E^{\mathrm{T}}R^{(i)}E\Big]\phi(-r_i)-$$
$$\phi^{\mathrm{T}}(-r)S_N\phi(-r)-$$
$$\sum_{i=2}^{p}\phi^{\mathrm{T}}(-r_i)\Big[S(-r_i)-\frac{1}{r_i}E^{\mathrm{T}}R^{(i)}E\Big]\phi(-r_i)+$$
$$2\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\phi^{(i)\mathrm{T}}(\alpha)S_{di}\phi^{(i)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\Big[\int_0^1\phi^{(i)\mathrm{T}}(\alpha)R_{dij}\phi^{(j)}(\beta)\mathrm{d}\alpha\Big]\mathrm{d}\beta+$$
$$2\phi^{\mathrm{T}}(0)\sum_{i=1}^{N}\int_0^1(1-\alpha)(D_{0i}^s+D_{0i}^a)\phi^{(i)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$2\phi^{\mathrm{T}}(0)\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\alpha(D_{0i}^s-D_{0i}^a)]\phi^{(i)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$\phi^{\mathrm{T}}(-r_1)\sum_{i=1}^{N}\int_0^1(1-\alpha)(D_{1i}^s+D_{1i}^a)\phi^{(i)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$\phi^{\mathrm{T}}(-r_1)\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\alpha(D_{1i}^s-D_{1i}^a)]\phi^{(i)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\phi^{\mathrm{T}}(-r_i)(1-\alpha)(D_{ij}^s+D_{ij}^a)\phi^{(j)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\phi^{\mathrm{T}}(-r_i)\alpha(D_{ij}^s-D_{ij}^a)]\phi^{(j)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+$$
$$\sum_{i=2}^{p}r_i\dot{\phi}^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}R^{(i)}E\dot{\phi}(0).$$

应用文献[13]命题5.21及引理4, 若

$$\begin{bmatrix}\varDelta & D^s & D^a & \tilde{D}\\ * & -R_d & S_d & 0\\ * & * & -3S_d & 0\\ * & * & * & \tilde{R}\end{bmatrix}<0,$$

则存在 $\nu>0$ 使 $\dot{V}(t,x_t)\leqslant-\nu\|x(t)\|^2$. 由引理2, 系统 (Σ_0) 渐近稳定. 容易看出, 当矩阵不等式 $\varPhi<0$ 可行时, 显然有 $S_i>0, i=1,2,\cdots,N$ 成立. □

注 1 若 $\operatorname{rank}E=n, q=1$, 则系统为单时滞状态空间系统, 此结论为文献[13]中命题5.21. 因此, 定理1是文献[13]中的结论在奇异多时滞系统中的推广.

下面将本结论进一步推广到含有范数有界不确

定性的多时滞奇异系统中.

定理 2　若存在矩阵 $P_1=P_1^{\mathrm{T}}, P_2, P_3=P_3^{\mathrm{T}}, Q_i, S_i=S_i^{\mathrm{T}}, R_{ij}=R_{ji}^{\mathrm{T}}, i,j=0,1,\cdots,N, \lambda>0$, 使得

$$\begin{bmatrix} P_1 & \hat{Q} \\ * & \hat{R}+\hat{S} \end{bmatrix}>0,$$

$$\begin{bmatrix} \varDelta+\lambda\varDelta_N & D^s & D^a & \tilde{D} & E_P \\ * & -R_d & S_d & 0 & E_s \\ * & * & -3S_d & 0 & E_a \\ * & * & * & \tilde{R} & E_R \\ * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix}<0$$

成立, 则时滞奇异系统 (Σ) 正则, 脉冲自由且渐近稳定. 其中

$$\varDelta_N=\begin{bmatrix} N_0^{\mathrm{T}}N_0 & N_0^{\mathrm{T}}N_1 & \cdots & N_0^{\mathrm{T}}N_p \\ N_1^{\mathrm{T}}N_0 & N_1^{\mathrm{T}}N_1 & \cdots & N_1^{\mathrm{T}}N_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_p^{\mathrm{T}}N_0 & N_p^{\mathrm{T}}N_1 & \cdots & N_p^{\mathrm{T}}N_p \end{bmatrix},$$

$$E_P=\begin{bmatrix} PM \\ 0 \end{bmatrix},\ E_s=\begin{bmatrix} \frac{h}{2}(\bar{Q}_0+\bar{Q}_1)^{\mathrm{T}}M \\ \frac{h}{2}(\bar{Q}_1+\bar{Q}_2)^{\mathrm{T}}M \\ \vdots \\ \frac{h}{2}(\bar{Q}_{N-1}+\bar{Q}_N)^{\mathrm{T}}M \end{bmatrix},$$

$$E_a=\begin{bmatrix} -\frac{h}{2}(\bar{Q}_0-\bar{Q}_1)^{\mathrm{T}}M \\ -\frac{h}{2}(\bar{Q}_1-\bar{Q}_2)^{\mathrm{T}}M \\ \vdots \\ -\frac{h}{2}(\bar{Q}_{N-1}-\bar{Q}_N)^{\mathrm{T}}M \end{bmatrix},\ E_R=\begin{bmatrix} r_2R^{(2)}M \\ r_3R^{(3)}M \\ \vdots \\ r_pR^{(p)}M \end{bmatrix}.$$

证明　将矩阵 $\varPhi$ 中的 A_i 用不确定系统 (Σ_1) 的系数矩阵 $A_i+MF(t)N_i\,(i=0,1,\cdots,p)$ 分别替换, 记作 $\bar{\varPhi}$, 容易得 $\bar{\varPhi}=\varPhi+\tilde{E}^{\mathrm{T}}F(t)\tilde{N}+\tilde{N}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\tilde{E}$. 其中 $\tilde{E}=[\,E_P^{\mathrm{T}}\ \ E_s^{\mathrm{T}}\ \ E_a^{\mathrm{T}}\ \ E_R^{\mathrm{T}}\,], \tilde{N}=[\,\bar{N}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,], \bar{N}=[\,N_0\ \ N_1\ \ \cdots\ \ N_p\,]$. 利用引理3, 定理得证. □

4　仿真算例

例 1　考虑系统 (Σ_0) 只含有一个时滞, 选择系统矩阵为

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

表 1 中比较了用不同的稳定性判据得到的系统稳定的最大容许时滞的比较. 显然, 定理 1 的结论优于已有结论, 尤其当时滞分点增多, N 增大时, 所得容许时滞值与真值接近. 需要指出的是由文献 [6] 中的定理1得到的最大容许时滞是 1.547, 而不是 1.2011.

表 1　稳定性判据的比较

[4]	[16]	[6]	Th1($N=1$)	Th1($N=2$)
1.000	1.1547	1.1547	1.1930	2.2760

例 2　考虑含有两个时滞的奇异系统 (Σ_0), 系统矩阵选取为

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

当 $r_1=1, r_2=0$ 时, 由图 1 可以看出, 系统状态 x_1, x_2 稳定; 当 $r_1=0, r_2=0.5$ 时, 从图 2 容易看出, 该系统状态 x_1, x_2 不稳定. 因此, 简化的 LKF 方法不能再用于此双时滞系统稳定性的判别. 应用定理 1, 可以判别当 $r_2=0.5, r_1\in(0, 2.0455]$ 时系统稳定. 图 3 给出了 $r_1=1, r_2=0.5$ 时系统的状态 x_1, x_2 的相应曲线, 可以清晰地看出系统是稳定的.

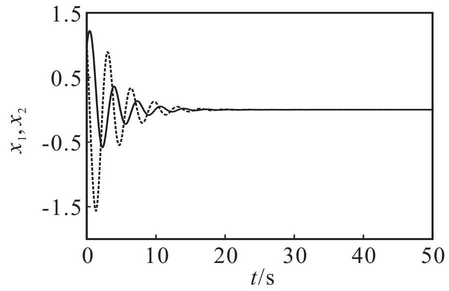

图 1　$r_1=1, r_2=0$

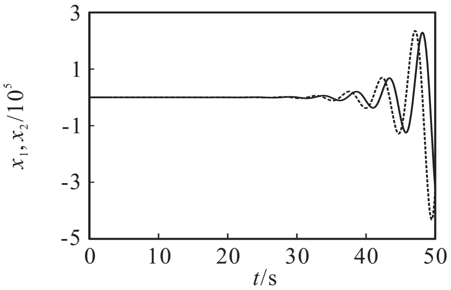

图 2　$r_1=0, r_2=0.5$

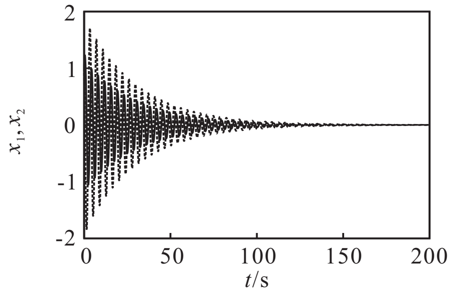

图 3　$r_1=1, r_2=0.5$

5　结　论

本文结合奇异型完全二次 LKF 和简单型 LKF, 利用离散化 LKF 方法, 讨论了多时滞奇异系统的稳定

性问题及含有不确定性的时滞奇异系统的鲁棒稳定问题. 此结论适用于多时滞奇异系统稳定性的判别, 尤其是多点时滞中有一个或多个为零时, 系统不稳定的情况, 此时, 简单型LKF失效. 在本结论中, 无时滞标称系统稳定不再是时滞奇异系统稳定的必要条件, 因此, 该方法可用于对不稳定系统采用时滞反馈使其稳定的问题. 数值实例表明了该方法的可行性和有效性.

参考文献(References)

[1] Dai L. Singular control systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] Lewis F L. A survey of linear singular systems[J]. Circiuts Systems Signal Process, 2002, 5(2): 3-36.

[3] Xu Shengyuan, Dooren P V, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

[4] Fridman E. Staibility of linear descritor systems with delay: A Lyapunov based approach[J]. J of Mathematic Analysis and Application, 2002, 273(1): 24-44.

[5] Su Hongye, Ji Xiaofu, Chu Jian. Delay dependent robust control for uncertain singular time delay systems[J]. Asian J of control, 2006, 8(2): 180-189.

[6] Zhu Shuqian, Zhang Chenghui, Cheng Zhaolin, et al. Delay dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(4): 880-885.

[7] Zhu Xunlin, Yang Guang-hong. Delay dependent stability criteria for systems with differentiable time delays[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(7): 765-771.

[8] Sun Yeong-jeu. Stability criterion for a class of descritor systems with discrete and distributed time delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 33(3): 986-993.

[9] Saadni S M, Chaabane M, Mehdi D. Robust stability and stabilization of a class of singular systems with multiple time varying delays[J]. Asian J of Control, 2006, 8(1): 1-11

[10] Boukas E K. Delay dependent robust stability of singular linear systems with delays[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2009, 27(4): 637-655.

[11] Hale J K. An introduction to functional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1993.

[12] Richard J P. Time delay systems: An overview of some recent advances and open problems[J]. Automatica, 2003, 39(10): 1667-1694.

[13] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time delay systems[M]. Berlin: Springer, 2003.

[14] Peterson I R. A stabilization algorithm for a class uncertain linear systems[J]. System Control Letters, 1987, 8(4): 351-357.

[15] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[16] Yue D, Han Q L. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2004, 51(12): 685-689.

(上接第1320页)

[12] Salman A, Ahmad I, Al-Madani S. Particle swarm optimization for task assignment problem[J]. Microprocessors and Microsystems, 2002, 26(8): 363-371.

[13] Peng-Yeng YinT, Shiuh-Sheng Yu, Pei-Pei Wang, et al. A hybrid particle swarm optimization algorithm for optimal task assignment in distributed systems[J]. Computer Standards & Interfaces, 2006, 28(4): 441-450.

[14] Abdelhalim M B. Task assignment for heterogeneous multiprocessors using re-excited particle swarm optimization[C]. 2008 Int Conf on Computer and Electrical Engineering. Thailand, 2008: 23-27.

[15] Maheswaran M, Au S, Siegel H J, et a1. A comparison of dynamic strategies for mapping a class of independent tasks onto heterogeneous computing systems[R]. School of Electrical and Computer Engineering, Purdue University, 1999.

[16] Tasgetiren M F, Liang Y C, Sevkli M, et al. A particle swarm optimization algorithm for makespan and total flowtime minimization in the permutation flowshop sequencing problem[J]. European J of Operational Research, 2007, 177(26): 1930-1947.

[17] 王凌, 刘波. 微粒群优化与调度算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
(Wang L, Liu B. Partical swarm optimization and scheduling algorithms[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.)